Fractali (II)

Ştefan FRUNZĂ[1], **Irina FRUNZĂ**[2]

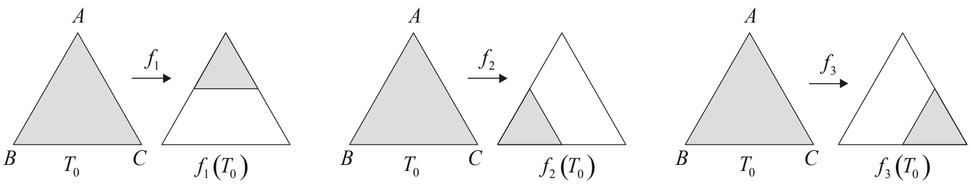
Fractal este un obiect fracţionat la infinit (cuvântul derivă din latinul *fractus*, derivat, la rândul său, din verbul *frangere* - a rupe, a sparge). Termenul a fost introdus de americanul de origine poloneză **Benoit Mandelbrot** în 1975. O definiţie în acelaşi timp precisă şi generală a unui obiect fractal este dificilă. Pentru a da o idee vagă, fractalii sunt, după Mandelbrot, mulţimi care prezintă neregularităţi la toate scările. O structură fractală e aceeaşi în mic ca şi în mare, aproape sau departe.

În natură se pot întâlni *structuri prefractale* (termenul îi aparţine de asemenea lui Mandelbrot). Ca exemple ar putea servi frunzele de spini, cele de ferigă, fulgii de zăpadă, norii etc. Structurile fractale sunt abstracţiuni matematice obţinute, de regulă, din structuri prefractale prin trecere la limită. Şirul de mulţimi prefractale care ne dă la limită o structură fractală este, de regulă, un şir recurent. El se obţine dintr-o structură prefractală iniţială (*iniţiator)* aplicându-i succesiv aceeaşi transformare (*generator*). Exemple în acest sens se găsesc în [**1**]-[**6**]: *curba lui Koch* şi *curba fulgului de zăpadă, praful lui Cantor, sita lui Sierpinski, carpeta lui Sierpinski, buretele lui Menger* etc.

În [**1**], pe care o continuăm în nota de faţă, au fost stabilite sau indicate dimensiunile în sens Richardson ale câtorva fractali: curba lui Koch are dimensiunea fractală $D=\dfrac{\log 4}{\log 3}$, praful lui Cantor – $\dfrac{\log 2}{\log 3}$, sita lui Sierpinski – $\dfrac{\log 3}{\log 2}$, sita tridimensională a lui Sierpinski – $\dfrac{\log 4}{\log 2}$, buretele lui Menger – $\dfrac{\log 20}{\log 3}$ etc.

O altă caracteristică a unei structuri fractale, pe care ne propunem să o prezentăm în continuare, este *autosimilaritatea.*

Majoritatea structurilor fractale sunt autosimilare într-un sens care va fi explicat în continuare. Să începem prin a considera *covorul lui Sierpinski.* El se poate obţine pornind de la triunghiul echilateral iniţial ABC şi aplicând succesiv trei omotetii: omotetia de centru A şi raport $1/2$ şi analoagele cu centrele B şi C (să le notăm respectiv cu f_1, f_2, f_3).

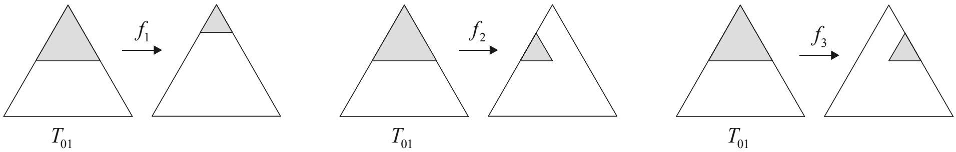


Astfel, după primul pas iterativ, putem scrie:

$$S_1 = f_1(T_0) \cup f_2(T_0) \cup f_3(T_0),$$

[1] Prof. dr., Facultatea de matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi
[2] Profesor, Grupul Şcolar Agricol "M. Kogălniceanu", Miroslava (Iaşi)

cele trei mulţimi ale reuniunii putând avea în comun două câte două cel mult un punct. Să notăm $f_1(T_0) = T_{01}$ şi să urmărim efectul aplicării celor trei omotetii asupra lui.



Urmărind analog transformările lui $f_2(T_0) = T_{02}$ şi $f_3(T_0) = T_{03}$ constatăm că

$$S_2 = f_1(S_1) \cup f_2(S_1) \cup f_3(S_1).$$

Se poate demonstra prin inducţie că

$$S_{n+1} = f_1(S_n) \cup f_2(S_n) \cup f_3(S_n), \quad n \geq 1, \tag{1}$$

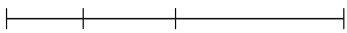
unde S_n este aproximanta de ordin n a covorului lui Sierpinski S [**1**]. Mulţimile din membrul drept al relaţiei (1) nu pot avea în comun două câte două decât cel mult un punct.

Din relaţia (1) se poate deduce (elementar) că

$$S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S). \tag{2}$$

Mulţimile din membrul drept al lui (2) pot avea două câte două cel mult un punct în comun şi fiecare este similară cu S cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.

O asemenea situaţie am mai întâlnit-o doar la figurile cele mai simple din geometria elementară (segmente de dreaptă sau arce de cerc).



Un segment de dreaptă poate fi împărţit în oricât de multe segmente adiacente similare fiecare cu segmentul iniţial.

Rezultatul precedent are o strânsă legătură cu noţiunile de măsură şi dimensiune. Să amintim rezultatul din plan că raportul ariilor a două figuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare. Un rezultat similar are loc în spaţiu: raportul volumelor a două corpuri asemenea este egal cu puterea a treia a raportului de asemănare.

În [**1**] s-a arătat că şi obiectele fractale pot fi "măsurate" şi că măsura lor are legătură cu dimensiunea fractală. Dacă rezultatul de geometrie clasică amintit mai sus s-ar extinde corespunzător la obiecte fractale, atunci din relaţia (2) am obţine

$$\begin{aligned} m(S) &= m(f_1(S)) + m(f_2(S)) + m(f_3(S)) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^D m(S) + \left(\frac{1}{2}\right)^D m(S) + \left(\frac{1}{2}\right)^D m(S), \end{aligned} \tag{3}$$

unde $m(S)$ este măsura lui S iar D este dimensiunea fractală a lui S. Admiţând că

$0 < m(S) < \infty$ (ceea ce e destul de rezonabil), obţinem din (3) relaţia

$$1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^D \tag{4}$$

care permite determinarea directă a lui D: $2^D = 3$, $D = \dfrac{\log 3}{\log 2}$. Regăsim astfel dimensiunea determinată prin metoda lui Richardson.

O proprietate analoagă de "autosimilaritate" o prezintă şi *mulţimea lui Cantor*, ale cărei aproximante succesive sunt:

$$C_0 = [0,1], \qquad C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^3}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, \frac{9}{3^2}\right], \quad \ldots$$

Se observă că $\left[0, \dfrac{1}{3}\right] = f_1(C_0)$, unde $f_1(x) = \dfrac{x}{3}$ şi $\left[\dfrac{2}{3}, 1\right] = f_2(C_0)$, unde $f(x) = \dfrac{x+2}{3}$. Se poate demonstra că

$$C_{n+1} = f_1(C_n) \cup f_2(C_n), \quad n \geq 1,$$

de unde se deduce (elementar) că

$$C = f_1(C) \cup f_2(C).$$

Întrucât f_1 şi f_2 sunt similarităţi de raport $\dfrac{1}{2}$, pentru determinarea dimensiunii fractale se obţine ecuaţia $1 = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^D$, de unde $D = \dfrac{\log 2}{\log 3}$ în concordanţă cu valoarea determinată prin metoda lui Richardson.

Sistemele de funcţii $\{f_1, f_2, f_3\}$ (implicat în covorul lui Sierpinski) şi $\{f_1, f_2\}$ (implicat în mulţimea lui Cantor) se numesc sisteme iterate de funcţii. *Curba lui Koch* se poate obţine printr-un sistem iterat de 4 similarităţi (implicând omotetii şi rotaţii), toate de raport $\dfrac{1}{3}$ [**2**]. Pentru determinarea dimensiunii fractale a curbei lui Koch se obţine ecuaţia $1 = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^D$, de unde $D = \dfrac{\log 4}{\log 3}$ în concordanţă iarăşi cu valoarea determinată prin metoda lui Richardson.

Bibliografie

1. **Şt. Frunză** - *Fractali*, RecMat - 2/2002, 1-5.
2. **Şt. Frunză** - *Fractali*, curs opţional, anul IV, Fac. Matematică - Informatică, 2004.
3. **J. - F. Gornyet** - *Physique et structures fractales*, Masson, Paris, 1992.
4. **B. B. Mandelbrot** - *Les objects fractales: forme, hasard et dimension*, Flammarion, Paris 1975.
5. **A. Le Méhauté** - *Les géométries fractales*, Hermès, Paris, 1990.
6. **H. Takayasu** - *Fractales in the physical sciences*, Manchester University Press, Manchester and New York, 1990.