O teoremă uitată - inegalitatea lui Surányi

Gabriel DOSPINESCU[1]

Cu mult timp în urmă, pe lista problemelor propuse pentru prestigiosul *Concurs "Miklos Schweitzer"* a apărut şi următoarea inegalitate datorată lui Surányi:

Teoremă. *Pentru orice numere reale nenegative* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *are loc inegalitatea*

$$(n-1)\left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n\right) + na_1a_2\cdots a_n \geq$$
$$\geq \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1}\right). \quad (1)$$

Departe de a fi o simplă aplicaţie a unor inegalităţi cunoscute – cel puţin, nu din câte cunoaştem până în prezent – această teoremă dificilă reprezintă o inegalitate foarte tare, ce permite rafinări ale multor inegalităţi clasice. Fiind mai puţin cunoscută, vom prezenta pentru început demonstraţia ei, deloc facilă, urmând ca ulterior să subliniem câteva consecinţe interesante. Aşadar,

Demonstraţia teoremei. Vom folosi inducţia matematică. Pentru $n = 2$, inegalitatea este trivială. Să presupunem că am reuşit să o demonstrăm pentru n variabile şi să considerăm $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \geq 0$. Datorită simetriei şi omogenităţii acestei inegalităţi, putem presupune că $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{n+1}$ şi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Să observăm însă că inegalitatea pe care trebuie să o demonstrăm se rescrie

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} + na_{n+1}^{n+1} + na_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i - (1+a_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^n + a_{n+1}^n\right) \geq 0. \quad (2)$$

Ipoteza de inducţie asigură valabilitatea inegalităţii

$$na_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i \geq a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} - (n-1)a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i^n. \quad (3)$$

Ca urmare, mai rămâne de demonstrat inegalitatea

$$\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n\right) - a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) +$$
$$+ a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1}\right) \geq 0. \quad (4)$$

Desigur, va fi suficient să demonstrăm inegalităţile

$$\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n\right) - a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) \geq 0, \quad (5)$$

$$a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1}\right) \geq 0 \quad (6)$$

pentru a finaliza demonstraţia pasului inductiv. Din fericire, (5) şi (6) nu sunt dificile. Într-adevăr, (5) rezultă combinând trei observaţii simple. Prima este inegalitatea

[1] Student, École Normale Supérieure, Paris

$n\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{n-1} \geq 0$, ce rezultă imediat din inegalitatea lui Cebâşev, a doua este relaţia evidentă $a_{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$ şi, în sfârşit, a treia observaţie este inegalitatea

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n \geq \frac{1}{n}\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right),$$

ce se poate obţine adunând toate inegalităţile de forma $na_i^{n+1} + \dfrac{1}{n}a_i^{n-1} \geq 2a_i^n$, $i = \overline{1,n}$. (6) este şi mai uşor de demonstrat; rezultă din următorul şir de inegalităţi şi identităţi evidente:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1} = \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_{n+1} + a_{n+1}) + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1} \geq$$

$$\geq a_{n+1}^n + a_{n+1}^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{n+1}) + (n-1)a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1} = 0.$$

Astfel, am reuşit să dovedim (2) şi demonstraţia se încheie.

Odată demonstrată (1), să vedem ce obţinem pentru valori mici ale numărului de variabile.

Pentru $n = 3$ obţinem

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 3a_1a_2a_3 \geq a_1^2(a_2 + a_3) + a_2^2(a_3 + a_1) + a_3^2(a_1 + a_2),$$

adică binecunoscuta *inegalitate a lui Schur*.

Pentru $n = 4$, după calcule de rutină, rezultă inegalitatea

$$2\left(\sum_{i=1}^{4} a_i^4 + 2\prod_{i=1}^{4} a_i\right) \geq \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_ia_j\left(a_i^2 + a_j^2\right),$$

care este mai tare decât *inegalitatea lui Turkevici* [**1**]:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i^4 + 2\prod_{i=1}^{4} a_i \geq \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_i^2a_j^2.$$

Continuăm cu simple observaţii ce decurg din (1). Astfel, luând $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, rezultă că

$$n \cdot a_1a_2\cdots a_n \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\left(s - (n-1)a_i\right). \tag{7}$$

Să observăm că în ipoteza $a_i < \dfrac{s}{n-1}$, $i = \overline{1,n}$, obţinem o întărire a clasicei inegalităţi a lui *D. S. Mitrinović* şi *D. D. Adamović* [**2**]:

$$a_1a_2\cdots a_n \geq (s-(n-1)a_1)(s-(n-1)a_2)\cdots(s-(n-1)a_n), \quad s = a_1+a_2+\cdots+a_n, \tag{8}$$

dacă $a_i < \dfrac{s}{n-1}$, $i = \overline{1,n}$. (Pentru a vedea că (7) este mai tare decât (8), nu avem decât să aplicăm inegalitatea mediilor în (7).)

Putem obţine uşor din (1) şi următoarea rafinare a inegalităţii mediilor:

$$\frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n}{n} - a_1 a_2 \cdots a_n \geq \frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n - a_1 a_2 \cdots a_n\right]. \tag{9}$$

Într-adevăr, să remarcăm că inegalitatea lui Jensen implică imediat inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1}\right) \geq n^2\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n. \tag{10}$$

Din (1) şi (10), dupa câteva calcule simple, obţinem (9). Din păcate, prin această metodă nu obţinem cea mai bună constantă în locul lui $\frac{n}{n-1}$ din membrul drept al inegalităţii (9). Am reuşit să demonstrăm că aceasta este $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$, dar demonstraţia depăşeşte cadrul acestei scurte note.

O aplicaţie surprinzătoare a inegalităţii lui Surányi o constituie şi următoarea

Propoziţie (Vasile Cârtoaje). *Pentru orice numere $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ are loc inegalitatea*

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n + n(n-1)a_1 a_2 \cdots a_n \geq$$
$$\geq a_1 a_2 \cdots a_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right). \tag{11}$$

Demonstraţie. Din nou, vom folosi inducţia, dar vom vedea că pasul inductiv se reduce exact la inegalitatea lui Surányi. Pentru $n = 3$, (11) coincide cu (1) şi cu inegalitatea lui Schur. Să presupunem acum că (11) este adevărată pentru $n-1$ variabile şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Aplicând ipoteza inductivă pentru fiecare grupă de $n-1$ numere dintre a_1, a_2, $\ldots$, a_n, obţinem

$$a_j \cdot \sum_{i \neq j} a_i^{n-1} + (n-1)(n-2)a_1 a_2 \cdots a_n \geq a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i \neq j} a_i\right)\left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{a_i}\right), \quad j = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Însumând relaţiile din (12), rezultă inegalitatea

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i^{n-1}\right) - \sum_{i=1}^n a_i^n + n(n-1)(n-2)a_1 a_2 \cdots a_n \geq$$
$$\geq a_1 a_2 \cdots a_n \cdot \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \neq j} a_i\right)\left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{a_i}\right). \tag{13}$$

Fie acum $A = \sum\limits_{i=1}^n a_i$, $B = \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$. Este evident lanţul de egalităţi următor:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \neq j} a_i\right)\left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{a_i}\right) = \sum_{j=1}^n (A - a_j)\left(B - \frac{1}{a_j}\right) = nAB - AB - AB + n = (n-2)AB + n,$$

care, împreună cu (13), implică

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right)-\sum_{i=1}^{n} a_i^{n}+n(n-1)(n-2)a_1a_2\cdots a_n \geq a_1a_2\cdots a_n\,(n+(n-2)AB)\,. \tag{14}$$

Combinând acum (1) cu (14), obţinem

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i^{n} + n(n-1)(n-2)a_1a_2\cdots a_n \geq (n-2)a_1a_2\cdots a_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right),$$

care nu este altceva decât (11) înmulţită cu $n-2$. Pasul inductiv fiind demonstrat, propoziţia este dovedită.

Să observăm că şi (11) este o rafinare a inegalităţii mediilor. Scriind-o sub forma

$$\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}-a_1a_2\cdots a_n \geq$$
$$\geq \frac{a_1a_2\cdots a_n}{n}\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-n^2\right],$$

ne întrebăm dacă nu cumva este mai slabă decât (9). Răspunsul este negativ, căci inegalitatea

$$\frac{n^2}{n-1}\left[\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n-a_1a_2\cdots a_n\right]\geq$$
$$\geq a_1a_2\cdots a_n\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-n^2\right]$$

nu este adevarată pentru orice $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Aceasta se observă imediat luând $a_1 \to 0$ şi $a_2 = a_3 = ... = a_n = 1$. Însă nici (11) nu este mai tare decât (9), ceea ce rezultă iarăşi uşor.

În încheiere, menţionăm că, folosind aceeaşi tehnică precum cea utilizată pentru a demonstra (11), se poate arăta că inegalitatea

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n}{a_1a_2\cdots a_n}-n\geq$$
$$\geq (n-1)^{n-1}\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-n^2\right] \tag{14}$$

este adevărată pentru $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ şi că este mai tare decât (11). Dar despre aceasta şi multe altele, într-o altă poveste…

Bibliografie

1. *Colecţia revistei Kvant.*

2. D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink - *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

3. T. Andreescu, V. Cârtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu - *Old and New Inequalities*, Gil Publishing House, 2004.