De la o problemă cu matrice la transformări elementare

Marian TETIVA[1]

1. Introducere. Problema la care ne referim în titlu este următoarea:

Să se arate că nu există matrice pătratice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $XY – YX = I_n$*,* I_n *fiind matricea unitate de ordinul* n*.*

Este o problemă cunoscută, care poate fi întâlnită în mai multe manuale sau culegeri, care s-a dat la concursuri etc. şi nu este tocmai simplă: un elev mediu este întotdeauna descurajat de enunţuri de tipul *"să se arate că există /nu există... "*. Mai mult, în această situaţie nu prea avem altă cale de abordare în afara celei care utilizează noţiunea de urmă a unei matrice şi proprietăţile sale. Istoria problemei este cam aşa: prin anii '70 ai secolului trecut ea era propusă la olimpiadă, prin anii '80 a pătruns în manuale pentru ca în anii '90 să ajungă a fi parte din diverse teste de bacalaureat sau admitere la facultate; aceasta spune ceva despre felul în care au evoluat programele învăţământului matematic elementar în România. Noi credem că elevul mediu din ziua de azi se află în acelaşi impas ca şi cel de acum douăzeci sau treizeci de ani (sau poate chiar mai rău) atunci când este confruntat cu asemenea probleme. De aceea această notă i se adresează, dar numai dacă este cu adevărat interesat de matematică.

Amintim că *urma* matricei $A = (a_{ij})_{1\le i,\, j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este, prin definiţie, numărul $\mathrm{Tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (suma elementelor situate pe "diagonala principală" a matricei). Sunt cunoscute următoarele proprietăţi ale urmei:

1° $\mathrm{Tr}\,(A + B) = \mathrm{Tr}\,(A) + \mathrm{Tr}\,(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

2° $\mathrm{Tr}\,(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{Tr}\,(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

3° $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Primele două egalităţi se mai pot scrie condensat în forma $\mathrm{Tr}\,(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{Tr}\,(A) + \beta\,\mathrm{Tr}\,(B)$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi exprimă *liniaritatea* urmei: $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ este *aplicaţie liniară* (sau *morfism* de $\mathbb{C}$ - spaţii vectoriale). De aici deducem $\mathrm{Tr}\,(XY - YX) = \mathrm{Tr}\,(XY) - \mathrm{Tr}\,(YX) = 0$ pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi aceasta explică de ce egalitatea din enunţ nu poate avea loc pentru nici o pereche de matrice X, Y: matricea $XY - YX$ are urma nulă, deci nu poate fi egală cu I_n, a cărei urmă este n.

Remarcăm că matricea I_n din enunţ poate fi înlocuită cu orice matrice de ordinul n având urma nenulă, enunţul şi rezolvarea rămânând valabile; problema poate fi uşor reformulată astfel:

Dacă pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *există* $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $A = XY - YX$*, atunci* $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$.

Atunci se naşte în mod natural întrebarea dacă reciproca acestei afirmaţii este adevărată, adică se pune problema valabilităţii următorului enunţ:

Fie A *o matrice pătratică de ordin* n *cu elemente numere complexe. Dacă urma matricei* A *este nulă, atunci există* $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $A = XY - YX$.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

În cele ce urmează ne propunem să rezolvăm această problemă; mai precis, să arătăm că răspunsul la întrebare este afirmativ.

Ideea rezolvării este să căutăm nişte matrice $Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât A să poată fi scrisă în forma $A = Z - YZY^{-1}$ (Y fiind inversabilă, desigur); atunci problema va fi rezolvată: e suficient să alegem $X = ZY^{-1}$ şi avem $A = \left(ZY^{-1}\right)Y - Y\left(ZY^{-1}\right) = XY - YX$.

Aici cititorul poate avea o nemulţumire: de unde şi până unde aceste matrice Y, Z în locul lui Xşi Y din enunţ? Să remarcăm că din proprietatea 3° rezultă că avem şi 4° $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(CAC^{-1}\right)$, $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, C inversabilă (se dovedeşte imediat, căci $A = \left(AC^{-1}\right)C$). Matricele de forma A şi CAC^{-1} sunt asemenea, iar proprietetea 4° spune că acestea au aceeaşi urmă.

Desigur, problemele abia încep. Sunt necesare câteva pregătiri.

2. Matrice asemenea şi transformări elementare. Fie K un corp comutativ; cititorul mai puţin familiarizat cu această noţiune abstractă poate considera K o notaţie pentru unul dintre corpurile numerice uzuale $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$ se numesc *matrice asemenea (*sau *similare*) dacă există $U \in \mathcal{M}_n(K)$ cu $\det U \neq 0$ astfel încât $Y = UXU^{-1}$ (vom nota $X \sim Y$). Cititorul poate verifica uşor faptul că relaţia de asemănare (similaritate) este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $\mathcal{M}_n(K)$.

Transformările elementare care se fac asupra unei matrice sunt, în principiu, cele mai simple modificări care nu îi afectează rangul, adică interschimbarea a două linii (sau coloane), adunarea unei linii (coloane) înmulţite cu un număr (în general: element al corpului K) la altă linie (respectiv coloană), sau chiar înmulţirea unei linii (coloane) cu un număr nenul. Una din cele mai simple aplicaţii ale lor este calculul rangului unei matrice; de asemenea, se pot folosi aceste transformări pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare.

Să începem prezentarea transformărilor elementare cu aşa numitele matrice elementare; legătura va apărea curând. Vom nota cu E_{ij} matricea pătratică de ordin n peste corpul K ale cărei elemente sunt toate nule, cu excepţia elementului de pe linia i şi coloana j care este egal cu 1. Se verifică uşor că matricele E_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ formează o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{M}_n(K)$ peste K, precum şi relaţiile $E_{ij}E_{kl} = 0_n$, $j \neq k$ şi $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$.

Se numesc *matrice elementare* următoarele tipuri de matrice pătratice de ordinul n, cu elemente din K:

1) Matricele $T_{ij}(a) = I_n + aE_{ij}$; aici $a \in K$ şi $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$ sunt indici *diferiţi*. Matricea $T_{ij}(a)$ se obţine din matricea unitate făcându-i o singură modificare: elementul de pe linia i şi coloana j devine a. Se constată imediat că (vezi proprietăţile matricelor E_{ij})

$$T_{ij}(0) = I_n,\ T_{ij}(a)\,T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b)\,,$$

$$T_{ij}(a) \in GL_n(K)\,,\ T_{ij}(a)^{-1} = T_{ij}(-a)\,,\ \forall a, b \in K,$$

unde $GL_n(K) = \{U \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det U \neq 0\}$ - *grupul general liniar de ordin n peste corpul K*. Deci $\{T_{ij}(a) \mid a \in K\}$ formează, pentru $i \neq j$ fixate, un grup izomorf cu grupul $(K, +)$. Să vedem ce efect are înmulţirea unei matrice oarecare cu o matrice

$T_{ij}(a)$. Fie $A = (a_{kl})_{1\leq k,l\leq n}$ o matrice din $\mathcal{M}_n(K)$, care mai poate fi scrisă şi $A = \sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}$. Atunci

$$T_{ij}(a)A = (I_n + aE_{ij})\left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} + \sum_{k,l=1}^{n} aa_{kl}E_{ij}E_{kl} =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} + \sum_{l=1}^{n} aa_{jl}E_{il}.$$

Ce înseamnă asta? Înseamnă că elementele matricei $T_{ij}(a)A$ rămân aceleaşi ca ale matricei A, cu excepţia celor de pe linia i: aici, în locul elementului a_{il} apare acum $a_{il} + aa_{jl}$, adică matricea $T_{ij}(a)A$ se obţine din A prin adunarea la linia i a liniei j înmulţite cu a, cu alte cuvinte înmulţirea la stânga cu o matrice $T_{ij}(a)$ realizează o transformare elementară a matricei A. De asemenea, se poate verifica în acelaşi fel că matricea $AT_{ij}(a)$ se obţine din A prin adunare la coloana j a coloanei i înmulţite cu a.

2) Matricele $Q_{ij} = T_{ij}(-1)T_{ji}(1)T_{ij}(-1)$ $(i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq j)$ intră şi ele în categoria matricelor elementare. Avem

$$Q_{ij} = T_{ij}(-1)T_{ji}(1)T_{ij}(-1) = (I_n - E_{ij})(I_n + E_{ji})(I_n - E_{ij}) =$$
$$= (I_n + E_{ji} - E_{ij} - E_{ii})(I_n - E_{ij}) = I_n + E_{ji} - E_{ij} - E_{ii} - E_{ij} - E_{jj} + E_{ij} =$$
$$= I_n - E_{ii} - E_{jj} - E_{ij} + E_{ji},$$

deci Q_{ij} este matricea care se obţine din matricea unitate prin schimbarea a patru elemente: elementele de pe diagonala principală, de pe linia i, coloana i şi de pe linia j, coloana j se înlocuiesc cu zerouri; în locul elementului de pe linia i şi coloana j avem -1, iar în locul celui de pe linia j şi coloana i se găseşte 1. La fel ca mai sus, să calculăm

$$Q_{ij}A = (I_n - E_{ii} - E_{jj} - E_{ij} + E_{ji})\left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}\right) =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{ii}E_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{jj}E_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{ij}E_{kl} + \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{ji}E_{kl} =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} - \sum_{l=1}^{n} a_{il}E_{il} - \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{jl} - \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il} + \sum_{l=1}^{n} a_{il}E_{il};$$

aşadar, matricea $Q_{ij}A$ se obţine din A prin înlocuirea liniei i, respectiv j, cu linia j înmulţită cu -1, respectiv cu linia i. Asemănător, se poate observa că schimbările pe care le produc asupra lui A înmulţirea cu matricea Q_{ij} la dreapta sunt următoarele: coloana i se înlocuieşte cu coloana j, iar coloana j se înlocuieşte cu coloana i înmulţită cu -1. Să mai spunem că, fiind produs de matrice inversabile, Q_{ij} este, de asemenea, matrice inversabilă; avem

$$Q_{ij}^{-1} = T_{ij}(-1)^{-1}T_{ji}(1)^{-1}T_{ij}(-1)^{-1} = T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$$

şi, deci, $Q_{ij}^{-1} = Q_{ij}$.

3) Un alt tip de matrice elementare sunt matricele $D_i(d) = I_n + (d-1)E_{ii}$, $1 \le i \le n$, $d \in K$ fiind nenul; o astfel de matrice se obţine din matricea unitate modificându-i un singur element: în locul lui 1 de pe linia i şi coloana i punem d. Nu e greu de văzut că înmulţirea unei matrice A oarecare cu $D_i(d)$ la stânga (respectiv la dreapta) îi modifică doar linia (respectiv coloana) i, anume o înlocuieşte pe aceasta cu linia (respectiv coloana) i înmulţită cu d. De asemenea, $D_i(d)$ este inversabilă şi are inversa $D_i(d)^{-1} = D_i\left(d^{-1}\right)$.

4) Vom folosi matricele P_{ij} pe care le definim prin

$$P_{ij} = D_i(-1)\,Q_{ij} = Q_{ij}D_j(-1) = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

Verificaţi aceste egalităţi! Observaţi forma matricei P_{ij} şi efectul său la înmulţire: matricea AP_{ij} (respectiv $P_{ij}A$) se obţine din A prin interschimbarea liniilor (respectiv coloanelor) i şi j. Şi nu în ultimul rând, arătaţi că P_{ij} este inversabilă şi $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

3. Rezolvarea problemei. Să demonstrăm aşadar următoarea

Propoziţie. *Fie K un corp comutativ infinit şi $A \in \mathcal{M}_n(K)$ o matrice a cărei urmă este zero. Atunci există matricele $X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $A = XY - YX$.*

Demonstraţie. Pentru început vom presupune că nu există nici o submulţime a mulţimii $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ a elementelor de pe diagonala principală a matricei A pentru care suma elementelor să fie nulă, desigur, cu excepţia întregii mulţimi (vom vedea imediat la ce ne foloseşte această presupunere, iar la sfârşit ne vom da seama că nu este prea restrictivă). Deoarece, conform ipotezei, avem $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0$, se pot determina elementele $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_{11} = a_1 - a_2,\ a_{22} = a_2 - a_3,\ \dots\ ,\ a_{n-1,n-1} = a_{n-1} - a_n\ ,\ a_{nn} = a_n - a_1.$$

E clar că, datorită ipotezei suplimentare pe care am făcut-o, oricare două dintre elementele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt distincte; vom folosi acest lucru mai departe.

Putem scrie pe A în forma $A = B - C$, unde

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_n \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a_2 & -a_{12} & \dots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ 0 & a_3 & \dots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Aşa cum am arătat la început, pentru rezolvarea problemei ar fi suficient să arătăm că matricele B şi C sunt asemenea. În acest scop, vom arăta că $B \sim B'$, $C \sim C'$, unde

$$B' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},\ C' = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

şi $B' \sim C'$. Folosind faptul că asemănarea matricelor este o relaţie de echivalenţă, obţinem că $B \sim C$.

Să le luăm pe rând. Ne amintim că înmulţirea unei matrice cu matricea P_{ij} la stânga (respectiv la dreapta) schimbă între ele liniile (respectiv coloanele) i şi j ale acelei matrice. De aceea, pentru $M \in \mathcal{M}_n(K)$, matricea $P_{ij}MP_{ij}^{-1} = P_{ij}MP_{ij}$

are schimbate între ele elementele de pe diagonala principală situate pe liniile (şi coloanele) i şi j; de asemenea, mai sunt afectate şi celelalte elemente de pe liniile şi coloanele i şi j. Aceasta nu are însă importanţă în cazul unor matrice precum B' sau C', la care toate elementele din afara diagonalei principale sunt zerouri; astfel $P_{ij}B'P_{ij}^{-1} = P_{ij}B'P_{ij}$ este o matrice care diferă de B' doar prin aceea că şi-au schimbat între ele locurile două elemente de pe diagonala principală, anume a_i şi a_j. Cum orice permutare e produs de transpoziţii, e clar că după un număr finit de asemenea transformări o putem aduce pe B' la orice formă în care pe diagonala principală apar elementele $a_1, a_2, \dots, a_n$ permutate cumva (şi în rest, zerouri). În particular, B' este asemenea cu C'.

Să arătăm acum că $B \sim B'$ (şi nu vom mai face demonstraţia pentru $C \sim C'$, ea fiind întru totul asemănătoare). Începem prin a observa următorul calcul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a(\alpha-\gamma)+\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

dacă a este ales convenabil, adică dacă $a = \beta/(\gamma-\alpha)$; desigur, asta se poate face numai în cazul în care $\alpha \neq \gamma$.

Un calcul asemănător se poate face şi pentru matrice de ordin n. Dacă vom considera $T_{ij}(a)BT_{ij}(a)^{-1} = T_{ij}(a)BT_{ij}(-a)$, unde $i > j$, elementul a_{ij} din poziţia (i,j) se înlocuieşte cu $a(a_j - a_i) + a_{ij}$ şi a poate fi ales astfel încât acest element să devină nul (căci am presupus că $a_i \neq a_j$). Mai sunt afectate şi celelalte elemente ale liniei i (la care se adună linia j înmulţită cu a) şi ale coloanei j (la care se adună coloana i înmulţită cu $-a$). Remarcăm că aceste transformări oricum nu pot modifica zerourile de deasupra diagonalei principale, care rămân intacte, şi nici elementele de pe diagonala principală.

Acum e clar ce avem de făcut: mai întâi calculăm $T_{21}(a)BT_{21}(a)^{-1}$ care, pentru un a bine ales reprezintă o matrice B_1 asemenea cu B care are în poziţia $(2,1)$ pe zero (asta dacă nu era dinainte; de altfel se poate vedea uşor că, dacă $a_{21} = 0$, atunci a care ne trebuie este $a = 0$ deci $T_{21}(a) = T_{21}(0)$ este, de fapt, matricea identică). Apoi, pentru această matrice calculăm $T_{31}(a)B_1T_{31}(a)^{-1}$, care pentru un anumit a este o matrice asemenea cu B_1 (deci şi cu B) şi are 0 în poziţia $(3,1)$; se poate vedea că elementul 0 obţinut la pasul anterior nu va fi afectat. Continuăm astfel, lucrând cu matrice de forma $T_{i1}(a)$ până când toate elementele de pe prima coloană "de sub" a_1 devin zerouri, apoi trecem şi facem zerouri pe coloana a doua, "sub" a_2, folosind transformări de tip $T_{32}(a), \dots, T_{n2}(a)$ (adică înmulţim cu acestea la stânga şi cu inversele lor la dreapta; la fiecare pas similaritatea matricelor se păstrează), în ordine, alegând, desigur, de fiecare dată valoare care trebuie pentru a. Elementele nule obţinute pe prima coloană nu vor fi afectate, la fel cele de pe sau de deasupra diagonalei principale, Tot aşa vom proceda până când, la urmă, ajungem la o matrice care are partea de deasupra diagonalei principale neschimbată, la fel diagonala principală, iar sub diagonala principală are numai zerouri, adică ajungem la B' şi la concluzia dorită că aceasta este asemenea cu B.

În concluzie, am arătat că matricele B şi C sunt asemenea, deci am ajuns acolo unde ne-am propus: există $V \in GL_n(K)$ astfel încât $C = VBV^{-1}$; atunci $A = B - C = B - VBV^{-1}$ şi notând $X = BV^{-1}$, $Y = V$ avem $A = XY - YX$.

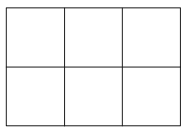
Demonstraţia ar fi încheiată, dacă n-ar mai fi un mic amănunt de lămurit: ce facem cu ipoteza suplimentară pe care am impus-o (şi de care, s-a dovedit pe parcurs, avem mare nevoie, căci dacă elementele de pe diagonală nu sunt distincte, nu-l putem alege pe a astfel încât $T_{ij}(a)$ să producă un zero în locul lui a_{ij})? Răspunsul nu e atât de greu şi arată, cum spuneam, că restricţia dată de această ipoteză nu este chiar atât de ... restrictivă. E suficient să împărţim mulţimea elementelor de pe diagonală în submulţimi disjuncte două câte două, fiecare dintre acestea având suma elementelor 0 şi fiecare nemaiavând altă submulţime (strictă) pentru care suma elementelor este 0. Să numim $b_1, \ldots, b_k$ elementele unei asemenea submulţimi (a căror sumă este, aşadar, zero); pentru acestea putem determina $c_1, c_2, \ldots, c_k$ astfel încât $b_1 = c_1 - c_2$, $b_2 = c_2 - c_3, \ldots, b_{k-1} = c_{k-1} - c_k$, $b_k = c_k - c_1$. Mai mult, oricare două dintre $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sunt distincte două câte două şi proprietăţile lor se păstrează dacă le înlocuim cu $c_1 + t$, $c_2 + t, \ldots, c_k + t$, $t \in K$. Găsim câte o grupare de asemenea c-uri distincte două câte două pentru fiecare submulţime de b-uri a mulţimii elementelor de pe diagonala principală, iar apoi alegem câte un t pentru fiecare astfel de grupare încât toate c-urile să fie distincte două câte două (ceea ce sigur se poate face în cazul în care corpul K este infinit; gândiţi-vă de ce!). Mai departe totul decurge la fel, deoarece putem scrie matricea noastră ca diferenţa a două matrice, una inferior, alta superior triunghiulară, fiecare dintre aceste elemente sunt distincte două câte două. Propoziţia este complet demonstrată.

Noi ne-am propus să rezolvăm problema în cazul corpurilor uzuale de numere: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, de aceea ipoteza pe care am făcut-o asupra infinităţii corpului K nu ne deranjează foarte mult; totuşi, se prea poate ca această presupunere să fie strict legată de rezolvarea pe care am dat-o aici şi să nu fie esenţială. Aşadar, *rămâne întrebarea dacă este valabil enunţul propoziţiei demonstrate şi în cazul unui corp finit.*

În încheiere, să mai spunem că nu există nici o pretenţie de originalitate în elaborarea acestei note; este foarte posibil ca această soluţie să fie cunoscută, atâta doar că autorul nu are nici un fel de referinţă pentru problema discutată, pe care o cunoaşte doar din folclor (în urmă cu câţiva ani această problemă mi-a fost comunicată "prin viu grai" de către un elev, actualmente student strălucit al Facultăţii de Matematică din Bucureşti; aşa că îi mulţumesc pe această cale lui **Dragoş Deliu**, care m-a făcut să caut să rezolv această problemă, căutări din care s-a născut şi această notă).

Recreații ... matematice

1. Să se îndepărteze patru segmente din figura alăturată (alcătuită din şase pătrate) astfel încât noua figură să fie formată din trei pătrate.



Notă. Soluţia problemei se poate găsi la pagina 39.