Asupra unei probleme propuse la O. I. M. - 1982

Neculai ROMAN[1]

La O. I. M. în anul 1982 a fost propusă problema B3 – GB:

Fie ABC un triunghi şi P un punct în interiorul lui astfel ca $\angle PAC \equiv \angle PBC$. Fie L, M picioarele perpendicularelor din P pe BC, CA respectiv. Fie D mijlocul lui $[AB]$. Să se demonstreze că $DL = DM$.

Enunţul şi o soluţie a acestei probleme se poate găsi în [**1**], pag. 322 şi 333. Problema are şi o soluţie mai simplă, accesibilă şi elevului de gimnaziu şi care merită a fi cunoscută. De asemenea, vom arăta că problema are loc pentru o mulţime mai variată de puncte din planul triunghiului. În acest scop, vom demonstra următoarea

Teoremă. *Fie ABC un triunghi, D mijlocul lui $[AB]$ şi punctele $A^{'}, B^{'}$ pe dreptele AC, respectiv BC astfel ca $C \in (AA^{'})$ şi $C \in (BB')$. Fie P un punct în planul triunghiului şi L, M picioarele perpendicularelor din P pe BC, respectiv AC. Să se demonstreze că dacă $P \in \operatorname{Int}(\angle ACB) \cup \operatorname{Int}(\angle A'CB')$ astfel ca $\angle PAC \equiv \angle PBC$ sau dacă $P \in \operatorname{Int}(\angle BCA') \cup \operatorname{Int}(\angle ACB')$ astfel ca $m(\angle PAC) + m(\angle PBC) = 180^\circ$ atunci $DM = DL$.*

Demonstraţie. Fie punctele D' şi D'' mijloacele segmentelor $[PA]$, respectiv $[PB]$ (fig. 1, 2 şi 3).

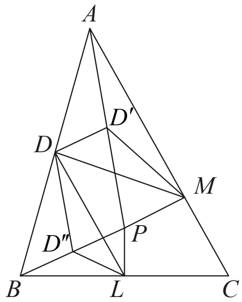

Fig. 1

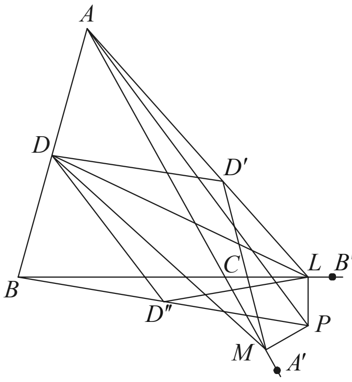

Fig. 2

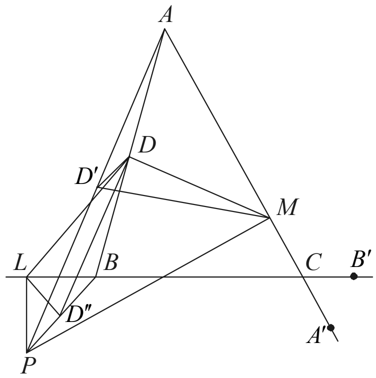

Fig. 3

Avem $MD' = \dfrac{PA}{2} = DD''$, ($[MD']$ mediana corespunzătoare ipotenuzei în $\triangle AMP$ şi $[DD'']$ linie mijlocie în $\triangle APB$).

Deci

$$[MD'] \equiv [DD'']\,. \tag{1}$$

Analog,

$$[LD''] \equiv [DD']\,. \tag{2}$$

Din $PD'DD''$ paralelogram, rezultă că

$$\angle PD'D \equiv \angle PD''D \tag{3}$$

[1] Profesor, Şcoala "V. Alecsandri", Mirceşti, Iaşi

Din $P \in \text{Int}\,(\angle ACB) \cup \text{Int}\,(\angle A'CB')$ astfel ca $\angle PAC \equiv \angle PBC$ (fig. 1 şi 2) deducem că $\angle PD'M \equiv \angle PD''L$ (teorema unghiului exterior).

Dacă $P \in \text{Int}\,(\angle BCA')$ astfel ca $m\,(\angle PAC) + m\,(\angle PBC) = 180°$ (fig. 3), atunci $\angle PAC \equiv \angle PBL$ şi deci $\angle PD'M \equiv \angle PD''L$ (teorema unghiului exterior). Dacă $P \in \text{Int}\,(\angle ACB')$ astfel ca $m\,(\angle PAC)+m\,(\angle PBC) = 180°$, atunci $\angle PBC \equiv \angle PAM$ şi deci $\angle PD'M \equiv \angle PD''L$.

În concluzie,

$$\angle PD'M \equiv \angle PD''L. \tag{4}$$

Din relaţiile (3) şi (4) rezultă că

$$\angle MD'D \equiv \angle LD''D. \tag{5}$$

Acum din relaţiile (1), (2) şi (5) rezultă că $\triangle MD'D \equiv \triangle DD''L$, de unde obţinem $[DM] \equiv [DL]$ şi deci $DM = DL$.

Teorema reciprocă. *Fie ABC un triunghi, D mijlocul lui $[AB]$ şi punctele A', B' pe dreptele AC respectiv BC astfel ca $C \in (AA')$ şi $C \in (BB')$. Fie punctele L, M pe dreptele BC respectiv AC astfel ca $DM = DL$. Perpendicularele în M şi L pe AC respectiv BC se întâlnesc în P. Să se demonstreze afirmaţiile:*

a) dacă $P \in \text{Int}\,(\angle ACB) \cup \text{Int}\,(\angle A'CB')$, atunci $\angle PAC \equiv \angle PBC$;

b) dacă $P \in \text{Int}\,(\angle ACB') \cup \text{Int}\,(\angle BCA')$, atunci $m\,(\angle PAC)+m\,(\angle PBC) = 180°$.

Demonstraţie. *a*) Fie punctele D' şi D'' mijloacele segmentelor $[PA]$ respectiv $[PB]$.

Se arată uşor că $\triangle MD'D \equiv \triangle DD''L$, de unde rezultă că

$$\angle MD'D \equiv \angle DD''L. \tag{6}$$

Din $PD'DD''$ paralelogram, rezultă

$$\angle PD'D \equiv \angle PD''D. \tag{7}$$

Din relaţiile (6) şi (7) obţinem

$$\angle PD'M \equiv \angle PD''L. \tag{8}$$

a) Dacă $P \in \text{Int}\,(\angle ACB) \cup \text{Int}\,(\angle A'CB')$, atunci din (8) rezultă $\angle PAC \equiv \angle PBC$ (fig.1 şi 2).

b) Dacă $P \in \text{Int}\,(\angle BCA')$ (fig. 3), atunci din relaţia (8) rezultă că $\angle PAC \equiv \angle PBL$ şi, deci, $m\,(\angle PAC) + m\,(\angle PBC) = 180°$.

Dacă $P \in \text{Int}\,(\angle ACB')$, atunci din relaţia (8) rezultă: $\angle PBC \equiv \angle PAM$. Deci $m\,(\angle PAC) + m\,(\angle PBC) = 180°$.

Bibliografie

1. I. Cuculescu - *Olimpiadele internaţionale de matematică ale elevilor*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1984.