În legătură cu o problemă de concurs

Dan Ştefan MARINESCU[1]

La etapa finală a Olimpiadei de matematică din anul 1989 prof. univ. dr. *T. Precupanu* a propus următoarea problemă:

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este o funcţie integrabilă, continuă pe* (a,b) *şi* $\int_a^b f(x)\,dx\neq 0$, *atunci pentru fiecare* $n\in\mathbb{N}^*$ *există* n *numere distincte* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a,b)$ *astfel ca*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{n(b-a)}{\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}+\cdots+\dfrac{1}{f(x_n)}}. \tag{1}$$

(enunţ parţial)

Enunţul şi o soluţie a problemei pot fi aflate în [**3**]. În cele ce urmează vom prezenta o generalizare a acestei frumoase probleme.

Pentru ceea ce ne-am propus, avem nevoie de

Propoziţia 1. *Fie* $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ *două funcţii cu următoarele proprietăţi:*

i) $f,\ g$ *continue pe* $[0,1]$,

ii) $f,\ g$ *derivabile pe* $(0,1)$,

iii) $f(1)\neq f(0)$ *şi* $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in(0,1)$.

Atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ *şi orice* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n>0$ *cu* $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ *există* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,1)$ *cu* $x_1<x_2<\cdots<x_n$ *astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\frac{g'(x_i)}{f'(x_i)}=\frac{g(1)-g(0)}{f(1)-f(0)}\ . \tag{2}$$

Demonstraţie. Fie $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{f(1)-f(0)}$; evident h este continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$ şi $h(0)=0$, $h(1)=1$.

Pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ considerăm funcţia continuă $h_k:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h_k(x)=h(x)-\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$. Cum $h_1(0)=-\alpha_1<0$, $h_1(1)=h(1)-\alpha_1=1-\alpha_1>0$, conchidem, din continuitatea funcţiei h_1, că există $c_1\in(0,1)$ cu $h_1(c_1)=0\Leftrightarrow h(c_1)=\alpha_1$. Analog, $h_2(c_1)=h(c_1)-\alpha_1-\alpha_2=-\alpha_2<0$, $h_2(1)=h(1)-\alpha_1-\alpha_2==1-\alpha_1-\alpha_2>0$, de unde acelaşi raţionament conduce la existenţa unui $c_2\in(c_1,1)$ astfel încât $h_2(c_2)=0\Leftrightarrow h(c_2)=\alpha_1+\alpha_2$. Inductiv, găsim $0<c_1<c_2<\cdots<<c_{n-1}<1$ astfel încât

$$h(c_1)=\alpha_1,\quad h(c_2)=\alpha_1+\alpha_2,\quad \ldots\quad,\ h(c_{n-1})=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}. \tag{3}$$

Fie $c_0=0$ şi $c_n=1$, atunci pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ funcţiile h şi g verifică condiţiile din teorema lui Cauchy pe intervalul $[c_{k-1},c_k]$; ca urmare, deducem că există $x_1\in(c_0,c_1)$, $x_2\in(c_1,c_2)$, $\ldots$, $x_n\in(c_{n-1},c_n)$ astfel încât

$$\frac{h'(x_1)}{g'(x_1)}=\frac{h(c_1)-h(c_0)}{g(c_1)-g(c_0)},\ \frac{h'(x_2)}{g'(x_2)}=\frac{h(c_2)-h(c_1)}{g(c_2)-g(c_1)},\ \ldots,\ \frac{h'(x_n)}{g'(x_n)}=\frac{h(c_n)-h(c_{n-1})}{g(c_n)-g(c_{n-1})},$$

de unde, împreună cu (3), avem:

---

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

$$\frac{\alpha_1}{g(c_1)-g(c_0)}=\frac{h'(x_1)}{g'(x_1)},\ \frac{\alpha_2}{g(c_2)-g(c_1)}=\frac{h'(x_2)}{g'(x_2)},\ \ldots,\ \frac{\alpha_n}{g(c_n)-g(c_{n-1})}=\frac{h'(x_n)}{g'(x_n)}$$
ceea ce, ţinând seama de faptul că $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n>0$, conduce la relaţiile
$$\alpha_1\frac{g'(x_1)}{h'(x_1)}=g(c_1)-g(c_0)\,,\ \alpha_2\frac{g'(x_2)}{h'(x_2)}=g(c_2)-g(c_1)\,,\ \ldots,\ \alpha_n\frac{g'(x_n)}{h'(x_n)}=g(c_n)-g(c_{n-1})\,.$$
De aici, prin adunare, obţinem $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g'(x_i)}{h'(x_i)}=g(c_n)-g(c_0)=g(1)-g(0)$. Cum $h'(x)=\frac{f'(x)}{f(1)-f(0)}$, $\forall x\in(0,1)$, conchidem că are loc relaţia (2).

Corolarul 1 [1]. *Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, atunci pentru orice $n\in N^*$ şi orice $k_1,k_2,\ldots,k_n>0$ există $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,1)$ distincte două câte două astfel încât* $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i$ (vezi şi [**2**], [**4**]).

Demonstraţie. Considerăm în Propoziţia 1, $\alpha_i=k_i\Big/\sum_{i=1}^{n}k_i$, pentru orice $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ şi $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x$.

Corolarul 2. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii integrabile, continue pe (a,b), $\int_a^b f(x)\,dx\neq 0$ şi $g(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Atunci, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ şi $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n>0$ cu $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$, există n numere distincte $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a,b)$ astfel ca
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g(x_i)}{f(x_i)}=\int_a^b g(x)\,dx\Big/\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Demonstraţie. Fie $f_1,g_1:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=\int_0^x f((1-t)a+tb)\,dt$, $g_1(x)=\int_0^x g((1-t)a+tb)\,dt$. În mod evident, f_1 şi g_1 sunt bine definite, verifică condiţiile din Propoziţia 1 şi $g_1(1)-g_1(0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$, $f_1(1)-f_1(0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. De unde există $c_1<c_2<\cdots<c_n$ din $(0,1)$ astfel încât
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g_1'(c_i)}{f_1'(c_i)}=\frac{\int_a^b g(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g((1-c_i)a+c_ib)}{f((1-c_i)a+c_ib)}=\frac{\int_a^b g(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$
Luând $x_i=(1-c_i)a+c_ib$, $\forall i=\overline{1,n}$, evident că $x_1<x_2<\cdots<x_n$ şi obţinem formula (4).

Observaţie. Egalitatea (1) se obţine luând în (4) $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=1/n$ şi $g(x)=1$, $\forall x\in[a,b]$.

Bibliografie

1. **G. G. Z. Giang -** *Problema 1125*, Math. Mag.
2. **P. Orno -** *Problema 1053*, Math. Mag.
3. **I. Tomescu (coordonator)** - *Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee (1950–1990)*, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1992.
4. ******* - *Problema C:1791*, G. M. 3/1996.