Trei perle ale olimpiadelor de matematică

Gabriel DOSPINESCU[1]

Problemele propuse la testele de selecţie pentru OIM sau la fazele naţionale din diverse ţări se remarcă prin profunzimea (şi uneori simplitatea) ideilor care le rezolvă. În cele ce urmează, vom rezolva trei probleme propuse la astfel de teste de selecţie în anii 2002 şi 2003, demonstrând dificultatea rezolvării problemelor de "matematică elementară", precum şi tendinţa accentuată de a îmbina algebra, teoria numerelor şi analiza matematică în actul de concepere şi rezolvare a unor asemenea perle matematice.

1. Un prim exemplu este următoarea problemă propusă la unul din testele de selecţie pentru OIM în anul 2002, in Vietnam. În rezolvare vom folosi doar câteva rezultate legate de ecuaţia de gradul al doilea. După cum se ştie, multe probleme dificile se rezolvă relativ uşor folosind trinomul de gradul al doilea (metoda coborârii). Vom da doar două exemple, fără a insista prea mult.

1) *Arătaţi că dacă numărul* $d = \dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab}$ *este întreg, iar* a, b, c *sunt numere naturale, atunci* d *este* 1 *sau* 3.

2) *Arătaţi că, dacă numerele naturale distincte şi nenule* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *verifică* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = na_1a_2\cdots a_n$, *atunci ele sunt prime între ele două câte două.*

Încercaţi să rezolvaţi aceste două probleme înainte de abordarea problemei 1.

PROBLEMA 1. *Să se demonstreze că există un număr* $m \geq 2002$ *şi* m *numere naturale nenule* $a_1, a_2, \ldots, a_m$, *distincte, astfel încât* $\prod_{i=1}^{m} a_i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ *să fie pătrat perfect.*

Soluţie. Vom folosi trinomul pentru a crea soluţii pentru anumite ecuaţii diofantice, deci în mod constructiv.

Ar fi bine să dispară $\prod_{i=1}^{m} a_i^2$. Deci, să scriem expresia sub forma

$$\prod_{i=1}^{m} a_i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i - k\right)^2 .$$

Pentru a "scăpa" şi de 4, luăm $k = 2$. Aşadar am adus problema la o formă mai "acceptabilă" (dar nu mai puţin dificilă):

Arătaţi că există $m \geq 2002$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{N}^*$ *distincte astfel încât*

$$1 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 = a_1a_2\cdots a_m \, . \tag{1}$$

Să căutăm m astfel încât $m-3$ dintre necunoscutele ecuaţiei (1) să fie 1. Aceasta revine la ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 + m - 2 = xyz. \tag{2}$$

Privind această ecuaţie ca una de gradul al doilea în z, vom încerca să luăm discriminantul nul. Deci $x^2y^2 = 4\left(x^2 + y^2 + m - 2\right)$. Luăm $x = 2a$, $y = 2b$ şi obţinem

[1] Student, Facultatea de Matematică-Informatică, Bucureşti

$m = 4\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)-2$. Să concluzionăm: putem alege $b > a > 2002$ diferite şi putem lua $m = 4\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)-2 > 2002$. Atunci ecuaţia (2) va avea soluţiile $(x, y, z) = (2a, 2b, 2ab)$. Rezultă că ecuaţia (1) are soluţia $(2a, 2b, 2ab, 1, 1, \ldots, 1)$. Dar putem scrie (1) şi sub forma

$$1^2 - 1 \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2ab + (2a)^2 + (2b)^2 + (2ab)^2 + m - 3 = 0. \tag{3}$$

Din relaţiile lui Viète rezultă că şi $2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1$ este soluţie a ecuaţiei (3), în care în loc de 1 punem t. Aşadar am redus cu o unitate numărul celor $m-3$ de 1 şi am obţinut o nouă soluţie a ecuaţiei (1): $(2a, 2b, 2ab, 2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1, 1, 1, \ldots, 1)$.

Analog, scriem

$$1^2 - 1 \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2ab\,(2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1) + (2a)^2 + (2b)^2 + (2ab)^2 +$$
$$+ (2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1)^2 + m - 4 = 0.$$

Deci obţinem o altă soluţie a ecuaţiei (1), cu număr şi mai mic de 1:

$$(2a, 2b, 2ab, 2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1, 2a \cdot 2b \cdot 2ab \cdot (2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1) - 1, 1, 1, \ldots, 1).$$

Astfel, rezultă că putem elimina pe rând fiecare 1 din m-upla $(2a, 2b, 2ab, 1, 1, \ldots, 1)$. Riguros, aceasta înseamnă că folosind succesiv relaţiile lui Viète, obţinem câte o m-uplă $(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1, 1, \ldots, 1)$ în care este clar că $2a = x_1 < 2b = x_2 < 2ab = x_3 < \cdots < x_k$. La sfârşit (căci după cel mult m paşi am eliminat toţi de 1), obţinem o soluţie $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ a ecuaţiei (1), în care $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. Această m-uplă va satisface condiţiile enunţului.

2. Continuăm cu o frumoasă problemă propusă la ultima rundă a olimpiadei poloneze în anul 2003. Simplitatea soluţiei care urmează nu are însă nici o legătură cu dificultatea problemei, căci multe metode de atacare a problemei nu duc la nici un rezultat.

PROBLEMA 2. *Determinaţi polinoamele cu coeficienţi întregi f cu proprietatea că pentru orice n natural avem $f(n) \mid 2^n - 1$.*

Soluţie. Evident, problema ar fi banală dacă s-ar demonstra că există o infinitate de numere n pentru care 2^n-1 este număr prim. Dar, dupa cum vom vedea, problema acceptă şi soluţii mai "blânde".

Cum este clar că nu putem afla prea multe despre divizorii şi factorii primi ai lui $2^n - 1$, vom încerca să lucrăm cu divizori ai numerelor de forma $f(n)$. Primul lucru care ne vine în minte, ţinând seama că f are coeficienţi întregi, este să folosim rezultatul următor: $m - n \mid f(m) - f(n)$. Deci, va trebui să căutăm m şi n astfel încât $f(m) \mid f(n)$. După căutări mai mult sau mai puţin lungi, găsim că $f(n) = n + f(n) - n \mid f(n + f(n)) - f(n)$. Deci $f(n) \mid f(n + f(n))$.

În acest moment, jumătate din problemă este rezolvată. Într-adevăr, schimbând f cu $-f$, putem presupune că f are coeficientul dominant pozitiv. Atunci există M astfel încât pentru $n > M$ să avem $f(n) \in \mathbb{N}$. Fixăm un $n > M$. Avem $f(n) \mid 2^n-1$ şi $f(n) \mid f(n + f(n)) \mid 2^{n+f(n)} - 1 = (2^n - 1)\,2^{f(n)} + 2^{f(n)} - 1$ (evident, $n + f(n) \in \mathbb{N}$), deci $f(n) \mid 2^{f(n)} - 1$. Dacă am putea demonstra că singurul număr natural n pentru care $n \mid 2^n - 1$ este 1, atunci ar rezulta că pentru $n > M$ avem $f(n) = 1$, adică f ar fi constanta 1. Dar faptul că $n \mid 2^n - 1$ implică $n = 1$ este binecunoscut şi destul de simplu. Să presupunem că $n > 1$ şi să luăm p cel mai mic factor prim al lui n.

Atunci este clar că $(n, p-1) = 1$. Dar $p \mid n \mid 2^n - 1$ şi $p \mid 2^{p-1} - 1$ (teorema lui Fermat). Deci $p \mid \left(2^n - 1, 2^{p-1} - 1\right)$. Se ştie că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = 2^n - 1$ este şir Mersenne (adică $(x_m, x_n) = x_{(m,n)}$). Rezultă că $p \mid (x_n, x_{p-1}) = x_{(n,p-1)} = x_1 = 1$, contradicţie. Aşadar $n = 1$ şi f este constanta 1. Cum, dacă f este soluţie, atunci şi $-f$ este soluţie, deducem că polinoamele cerute sunt constantele -1 şi 1.

3. Încheiem scurta incursiune prin matematica elementară cu o problemă extrem de dificilă, propusă la un test de selecţie în Vietnam, 2002. Dificultatea problemei constă mai ales în faptul că admite multe soluţii (care nici nu se intrezăresc uşor), iar frumuseţea constă în îmbinarea algebrei cu analiza matematică şi teoria numerelor. Nu exagerăm dacă afirmăm că următoarea problemă este una dintre cele mai dificile şi frumoase probleme referitoare la polinoame, propuse la vreun concurs pentru elevi.

PROBLEMA 3. *Determinaţi toate polinoamele $p \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea că există un polinom $q \in \mathbb{Z}[X]$ pentru care $q^2(X) = \left(X^2 + 6X + 10\right) p^2(X) - 1$.*

Soluţie. Evident, orice rezolvitor "sârguincios" va scrie relaţia din enunţ sub forma $q^2(X-3) = \left(X^2+1\right) p^2(X-3) - 1$ şi va nota $f(X) = p(X-3)$, $g(X) = q(X-3)$. Deci

$$\left(X^2+1\right) f^2(X) = g^2(X) + 1. \tag{1}$$

Aici este însă punctul de oprire, căci orice încercare ulterioară de rezolvare eşuează. Ca de obicei, vom putea presupune că f şi g au coeficienţii dominanţi pozitivi (căci putem schimba f cu $-f$ sau g cu $-g$, fără a se modifica nimic). Deci există M astfel încât pentru orice $n > M$ să avem $f(n), g(n) \in \mathbb{N}$.

Apelăm acum la teoria numerelor. Este binecunoscut faptul că toate soluţiile în numere naturale ale ecuaţiei Pell $x^2 + 1 = 2y^2$ sunt date de

$$x_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2}, \quad y_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}.$$

Ce se întâmplă dacă substituim x_n în (1)? Obţinem $g^2(x_n) + 1 = 2\left(y_n f(x_n)\right)^2$. Da, şi perechea $(g(x_n), y_n f(x_n))$ este soluţie a ecuaţiei Pell şi aceasta se întâmplă pentru orice $n > M$. Deci există şirurile $(a_n)_{n>M}$, $(b_n)_{n>M}$ astfel încât $g(x_n) = x_{a_n}$, $y_n f(x_n) = y_{b_n}$.

Acum începe partea analizei matematice. Fie $\operatorname{grad} g = k$, $\operatorname{grad} f = m$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\sqrt{2}\right)^{2a_n - 1 - k(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_{a_n}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{k(2n-1)}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)}{x_n^k} \left(\frac{x_n}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{(2n-1)}}\right)^k = \text{finit}.$$

Rezultă că şirul de numere întregi $\left(2a_n - 1 - k(2n-1)\right)_{n>M}$ este convergent, deci staţionar. Aşadar, există $n_0 > M$ astfel încât pentru $n > n_0$ să avem $2a_n - 1 - k(2n-1) = u$, pentru o constantă întreagă u. Ca urmare, pentru $n > n_0$ avem

$$g\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2}\right) = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{k(2n-1)+u} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{k(2n-1)+u}}{2}.$$

Rezultă că

$$g\left(\frac{x-\dfrac{1}{x}}{2}\right)=\frac{x^k\left(1+\sqrt{2}\right)^u+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k\left(1-\sqrt{2}\right)^u}{2} \tag{2}$$

pentru orice x din mulţimea $\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} \mid n>n_0\right\}$. Aducând la acelaşi numitor în (2), obţinem o identitate polinomială adevărată pentru o infinitate de valori ale variabilei, deci (2) este adevărată pentru orice x nenul. După ce aducem la acelaşi numitor şi egalăm coeficienţii dominanţi în (2), deducem că $2^{k-1}\left(1+\sqrt{2}\right)^u=\alpha_k$, unde α_k este coeficientul dominant al lui g. Dar aceasta implică $u=0$. Aşadar, pentru orice x nenul, avem

$$g\left(\frac{x-\dfrac{1}{x}}{2}\right)=\frac{x^k+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k}{2}. \tag{3}$$

Dacă notăm $x=t+\sqrt{t^2+1}$, din (3) obţinem că pentru orice t avem

$$g(t)=\frac{\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^k+\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^k}{2}. \tag{4}$$

Luăm în (1) $x=i$ şi obţinem că $g^2(i)=-1$. Deci, folosind (4), obţinem $i^{2k}=-1$, adică k este impar. Din (4) şi (1) rezultă prin calcul că

$$f^2(X)=\left[\frac{\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)^k+\left(\sqrt{X^2+1}-X\right)^k}{2\sqrt{X^2+1}}\right]^2, \ k \text{ impar.} \tag{5}$$

Cum f este polinom şi are coeficientul dominant pozitiv, deducem din (5) că

$$f(X)=\frac{\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)^k+\left(\sqrt{X^2+1}-X\right)^k}{2\sqrt{X^2+1}}. \tag{6}$$

Dar, dacă f verifică (1), atunci şi $-f$ verifică aceeaşi relaţie. Mai mult, polinomul din membrul drept al relaţiei (6) are coeficienţi întregi. Rezultă că există două tipuri de polinoame care verifică relaţia (1)

$$\pm\frac{\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)^k+\left(\sqrt{X^2+1}-X\right)^k}{2\sqrt{X^2+1}}, \ k \text{ impar.} \tag{7}$$

În sfârşit, obţinem că polinoamele p cerute se obţin din polinoamele (7) înlocuind X cu $X+3$.

Ce-ar mai fi de adăugat după prezentarea acestor trei nestemate din şiragul nesfârşit al problemelor elementare de matematică? Şlefuite cu răbdarea bijutierului, cele trei probleme adaugă o paletă de lumini începând cu actul creator al conceperii lor şi terminând cu soluţiile propuse. Fiecare dintre noi are nevoie de asemenea perle, iar această scurtă prezentare se înscrie pe această linie.