Asupra unor perechi de şiruri liniar recurente

D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU[1]

În această notă matematică vom evidenţia proprietăţile unor perechi de şiruri, fiecare satisfăcând o anumită recurenţă liniară omogenă de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi.

Spunem că un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale, satisface o recurenţă liniară (reală), omogenă de ordinul al doilea, dacă există $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ şi există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0,\ \forall n \geq k. \tag{1}$$

În funcţie de valorile coeficienţilor $a, b \in \mathbb{R}$ şi de condiţiile iniţiale $x_k = u \in \mathbb{R}$, $x_{k+1} = v \in \mathbb{R}$ se obţin diferite şiruri, dintre care unele cunoscute şi de elevii de liceu.

De exemplu, dacă $a = b = 1$, $k = 0$ se obţine recurenţa:

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

pe care o vom numi *recurenţa Fibonacci-Lucas.*

Dacă în recurenţa (2) considerăm $x_0 = F_0 = 0$, $x_1 = F_1 = 1$, $x_n = F_n$ se obţine *şirul lui Fibonacci* care satisface recurenţa:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Dacă în recurenţa (2) considerăm $x_0 = L_0 = 2$, $x_1 = L_1 = 1$, $x_n = L_n$ se obţine *şirul lui Lucas*, şir care satisface recurenţa:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Dacă în (1) luăm $a = -2$, $b = 1$, $k = 1$ se obţine recurenţa liniară:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = \cdots = x_2 - x_1 = r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{5}$$

numită *recurenţa progresiilor aritmetice de raţie* $r \in \mathbb{R}$.

În fine, dacă în recurenţa (1) luăm $a = -2$, $b = -1$, $k = 0$ obţinem *recurenţa liniară cu coeficienţi constanţi de tip Pell*:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Dacă în recurenţa (6) considerăm $x_0 = P_0 = 0$, $x_1 = P_1 = 1$, $x_n = P_n$ se obţine *şirul lui Pell*, care satisface recurenţa:

$$P_{n+2} = P_n + 2P_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

De asemenea, dacă în (6) luăm $x_0 = Q_0 = 1$, $x_1 = Q_1 = 1$, $x_n = Q_n$ obţinem *şirul lui Pell asociat* $(Q_n)_{n\geq 0}$, şir care satisface recurenţa:

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Mai departe, vom enunţa şi demonstra unele propoziţii care scot în evidenţă, anumite proprietăţi pe care le verifică unele perechi formate dintr-un şir care verifică recurenţa (2) şi un şir care verifică recurenţa (5).

Propoziţia 1. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ satisface recurenţa (2) în care $x_0 = c \in \mathbb{R}_+$, $x_1 = d \in \mathbb{R}_+^*$, iar $(u_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie $r \in \mathbb{R}$, atunci:*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x_4\right) - x_2 u_1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{9}$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti

Demonstraţie. Vom demonstra afirmaţia prin metoda inducţiei matematice.

Pentru $n = 1$ relaţia (9) devine $u_1x_1 = u_1x_3 - r(x_4 - x_4) - x_2u_1 \Leftrightarrow x_2u_1 = = u_1(x_3 - x_1) = u_1x_2$ ceea ce arată că pentru $n = 1$, enunţul este adevărat.

Pentru $n = 2$ relaţia (9) devine $u_1x_1 + u_2x_2 = u_2x_4 - r(x_5 - x_4) - x_2u_1 \Leftrightarrow u_2(x_4 - x_2) = u_1(x_1 + x_2) + r(x_5 - x_4) \Leftrightarrow u_2x_3 = (u_1 + r)x_3 = u_2x_3$ de unde se deduce că enunţul este adevărat şi pentru $n = 2$.

Presupunem că enunţul este adevărat pentru $n \geq 2$, (adică relaţia (9) este verificată) şi să demonstrăm că ea este verificată şi pentru $n + 1$. Avem de arătat că:

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_kx_k = u_{n+1}x_{n+3} - r(x_{n+4} - x_4) - x_2u_1. \tag{10}$$

Într-adevăr, relaţia (10) este echivalentă cu

$$\sum_{k=1}^{n} u_kx_k + u_{n+1}x_{n+1} = u_{n+1}x_{n+3} - r(x_{n+4} - x_4) - x_2u_1$$

relaţie care (în condiţiile verificării condiţiei (9)) este echivalentă cu:

$$u_nx_{n+2} - r(x_{n+3} - x_4) - x_2u_1 + u_{n+1}x_{n+1} = u_{n+1}x_{n+3} - r(x_{n+4} - x_4) - x_2u_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}(x_{n+3} - x_{n+1}) = u_nx_{n+2} + r(x_{n+4} - x_{n+3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+2}u_{n+1} = u_nx_{n+2} + rx_{n+2} = (u_n + r)x_{n+2} = u_{n+1}x_{n+2}$$

de unde (dacă ţinem seama că $x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$) deducem că relaţia (10) este adevărată. Conform principiului inducţiei matematice rezultă că enunţul este adevărat pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi astfel propoziţia este demonstrată.

Observaţie. Dacă $x_0 = 0 = F_0$, $x_1 = 1 = F_1$ iar $(u_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie r din relaţia enunţului deducem că

$$\sum_{k=1}^{n} u_kF_k = u_nF_{n+2} - r(F_{n+3} - F_4) - u_1,$$

adică am obţinut *Problema C:2310* propusă de **Florin Rotaru** în G.M.-9/2000, p.360. Dacă aici luăm $r = 0$ şi $u_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ deducem că şirul lui Fibonacci verifică relaţia

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Propoziţia 2. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale strict pozitive care satisface recurenţa (2) iar şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea că există $r \in \mathbb{R}^*$ astfel încât*

$$\sum_{k=1}^{n} u_kx_k = u_nx_{n+2} - r(x_{n+3} - x_4) - x_2u_1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{11}$$

atunci şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie r.

Demonstraţie. Vom face şi aici demonstraţia prin metoda inducţiei matematice. Pentru $n = 2$ relaţia enunţului devine:

$$u_1x_1 + u_2x_2 = u_2x_4 - r(x_5 - x_4) - x_2u_1 \Leftrightarrow u_1x_1 + r(x_4 + x_3 - x_4) + u_1x_2 = u_2(x_4 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow u_1(x_1 + x_2) + rx_3 = u_2x_3 \Leftrightarrow u_1x_3 + rx_3 = u_2x_3 \Leftrightarrow (u_1 + r)x_3 = u_2x_3$$

de unde dacă ţinem seama că $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ deducem că $u_2 = u_1 + r$.

Presupunem că $u_n = u_{n-1} + r$, $n \geq 2$ şi să demonstrăm că $u_{n+1} = u_n + r$. Într-adevăr, pentru $n+1$ relaţia (11) se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k x_k = u_{n+1}x_{n+3} - r\left(x_{n+4} - x_4\right) - x_2 u_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k x_k + u_{n+1}x_{n+1} = u_{n+1}x_{n+3} - r\left(x_{n+4} - x_4\right) - x_2 u_1$$

în care dacă ţinem seama de relaţia (11) obţinem:

$$u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x_4\right) - x_2 u_1 + u_{n+1}x_{n+1} = u_{n+1}x_{n+3} - r\left(x_{n+4} - x_4\right) - x_2 u_1 \Leftrightarrow$$

$$u_{n+1}\left(x_{n+3} - x_{n+1}\right) = u_n x_{n+2} + r\left(x_{n+4} - x_{n+3}\right) \Leftrightarrow u_{n+1}x_{n+2} = u_n x_{n+2} + r x_{n+2}$$

de unde prin simplificare cu $x_{n+2} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ deducem că $u_{n+1} = u_n + r$.

Conform principiului inducţiei matematice rezultă că $u_{n+1} = u_n + r$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ceea ce arată că $(u_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie r.

Propoziţia 3. *Dacă $(u_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie $r > 0$, $u_1 > 0$ iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale astfel încât $x_0 \geq 0$, $x_1 > 0$, $x_2 = x_1 + x_0$ şi dacă*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k x_k = u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x_4\right) - x_2 u_1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{12}$$

atunci $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Procedăm şi acum prin inducţie matematică. Conform enunţului pentru $n = 0$, avem $x_2 = x_1 + x_0$. Pentru $n = 1$ relaţia (12) devine $u_1 x_1 = u_1 x_3 - r\left(x_4 - x_4\right) - x_2 u_1 \Leftrightarrow u_1 x_1 + u_1 x_2 = u_1 x_3$ de unde, dacă ţinem seama că $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obţinem că $x_3 = x_2 + x_1$, adică afirmaţia enunţului este adevărată şi pentru $n = 1$. Presupunem că $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$, $\forall k = \overline{0, n}$ şi să demonstrăm că

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1}. \tag{13}$$

Dacă în (12) înlocuim n cu $n-1$ deducem că

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k x_k = u_{n-1}x_{n+1} - r\left(x_{n+2} - x_4\right) - x_2 u_1,\ \forall n \geq 2. \tag{14}$$

Dacă în (12) ţinem seama de (14) obţinem că

$$u_n x_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k x_k = u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x_4\right) - x_2 u_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n x_n + u_{n-1}x_{n+1} - r\left(x_{n+2} - x_4\right) - x_2 u_1 = u_n x_{n+2} - r\left(x_{n+3} - x_4\right) - x_2 u_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n\left(x_n + x_{n+1} - x_{n+2}\right) + r\left(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}\right) = 0,$$

dar $x_n + x_{n+1} - x_{n+2} = 0$ în baza ipotezei de inducţie şi deci rămâne

$$r\left(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1}\right) = 0 \Rightarrow x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1}.$$

Conform principiului inducţiei matematice rezultă că $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi astfel propoziţia este demonstrată.

Bibliografie

1. **M. D. Bătineţu** - *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.
2. *Gazeta Matematică*, Colecţia 1895-2001.