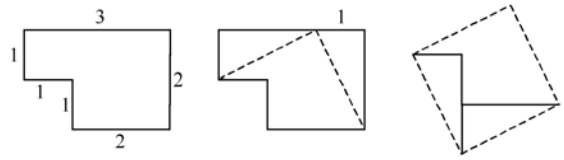
Recreaţie matematică şi nu numai

Horea BANEA[1]

Este cunoscută următoarea problemă - joc: *Să se descompună poligonul din figura alăturată prin două linii drepte astfel încât din poligoanele obţinute prin realipire să se realizeze un pătrat.* Soluţia este indicată în figură.



Sugerat de aceasta, propunem următoarea problemă:

Dintr-o bucată de carton, de forma poligonului de mai sus, printr-o tăietură după o dreaptă şi realipirea bucăţilor obţinute se realizează diferite figuri de forma unor poligoane convexe. Să se găsească toate situaţiile distincte. Să se calculeze lungimile laturilor poligoanelor obţinute.

În legătură cu enumerarea propusă facem următoarele precizări:

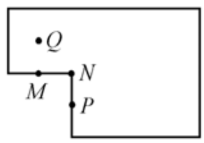
• Situaţii distincte sunt cele în care T = *tăietura* şi/sau P = *poligonul obţinut* diferă între ele.

• Cazurile în care cu aceeaşi T obţinându-se componente simetrice, se poate realiza acelaşi P în diferite moduri, vor fi considerate doar variante echivalente ale aceleiaşi situaţii cu excepţia cazurilor în care alipirea aceleiaşi componente se face la alt segment al componentei de bază (=cea mai mare) care vor fi considerate ca situaţii distincte.

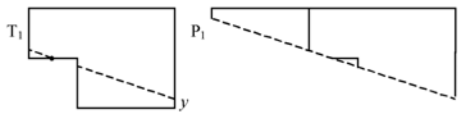
• Când T este variabilă, obţinându-se acelaşi tip de P dar cu dimensiuni variabile depinzând de un parametru, se consideră ca o singură situaţie, dar cazurile particulare ale parametrului care conduc la P cu anumite particularităţi se enumeră distincte de cazul general.

• Nu se enumeră, fiind socotite variante echivalente, figurile obţinute prin întoarcerea pe verso a întregii figuri obţinute într-un caz.

• Pentru a uşura urmărirea efectuării tăieturilor indicăm gruparea lor în raport cu anumite puncte remarcabile prin care au fost duse: $M : T_{1-16}$; $N : T_{17-22}$; $P : T_{23}$; $Q : T_{25,26}$.

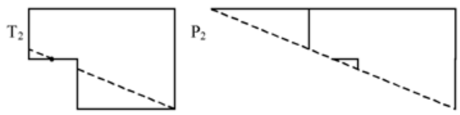


• Enumerarea lungimilor laturilor se face începând cu cea superioară, în sens matematic. Justificarea calculelor, bazându-se doar pe teorema lui Pitagora şi pe asemănarea triunghiurilor, se lasă pentru cititori.



Trapez dreptunghic variabil:

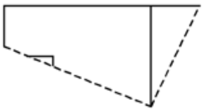
$$5,\ y,\ \sqrt{4y^2-8y+29},\ 2-y;\ 0<y<1.$$



Triunghi dreptunghic: 5, $\sqrt{29}$, 2.

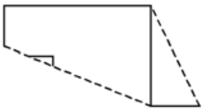
[1] Conf. dr., Univ. "Transilvania", Braşov

P_3



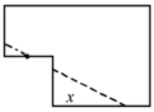
Patrulater inscriptibil: $\frac{19}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3\sqrt{29}}{5}, \frac{2\sqrt{29}}{5}.$

P_4

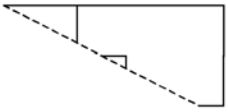


Pentagon: $3, \frac{4}{5}, \frac{3\sqrt{29}}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{29}}{5}.$

T_3



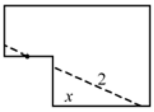
P_5



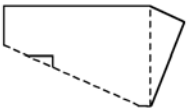
Trapez dreptunghic variabil:

$3 + x,\ \sqrt{4x^2 + 4x + 5},\ 2 - x,\ 2;\ 0 < x < 2.$

T_4



P_6



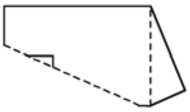
Hexagon:

$3,\ \sqrt{4 - x^2},\ \frac{2x + 2}{x},\ 2 - x,\ x,\ \sqrt{4 - x^2};$

$x \approx 1,84,\ x^4 + x^3 - 2,75x^2 - 4x - 1 = 0.$

Obs. Nu se consideră şi P_5.

P_7



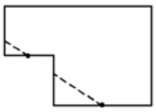
Hexagon:

$3,\ \sqrt{4 - x^2},\ \frac{2x + 2}{x},\ 2 - x,\ \sqrt{4 - x^2},\ x;$

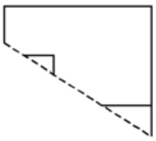
x ca la P_6.

Obs. Aceeaşi ca la P_6.

T_5

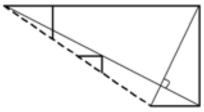


P_8



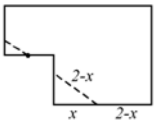
Trapez dreptunghic: $3,\ \frac{2}{3},\ \sqrt{13},\ \frac{8}{3}.$

P_9

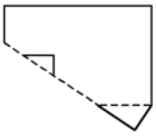


Trapez dreptunghic ortogonal: $4,\ \sqrt{13},\ 1,\ 2.$

T_6



P_{10}

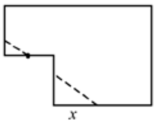


Pentagon: $3,\ 2\sqrt{1 - x},\ \frac{x + 2}{x},\ 2\sqrt{1 - x},\ 2;$

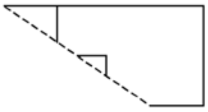
$$x \approx 0,89\,,\quad 4x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Obs. Nu se consideră şi P_5.

T_7



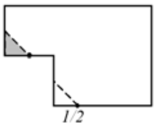
P_{11}



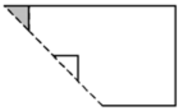
Trapez dreptunghic circumscriptibil:

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{2},\ 3,\ \frac{5 - \sqrt{5}}{2},\ 2;\quad x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

T_8



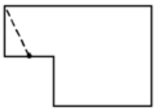
P_{12}



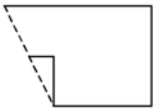
Trapez dreptunghic: $7/2,\ 2\sqrt{2},\ 3/2,\ 2.$

Obs. Realizat prin alipirea altor triunghiuri faţă de P_5.

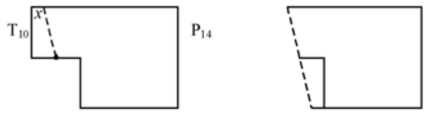
T_9



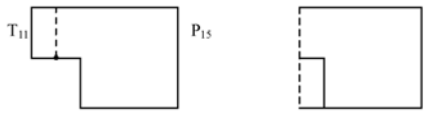
P_{13}



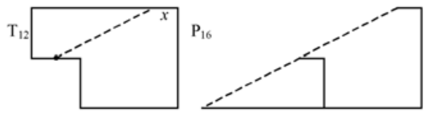
Trapez dreptunghic: $3,\ \sqrt{5},\ 2,\ 2.$



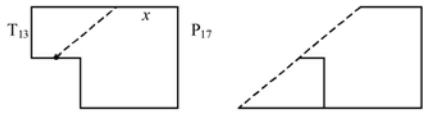
Trapez dreptunghic variabil:
$3-x,\ \sqrt{4x^2-4x+5},\ 2+x,\ 2;\ 0<x<1/2.$



Dreptunghi: $\frac{5}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 2.$
Obs. Are variante echivalente.

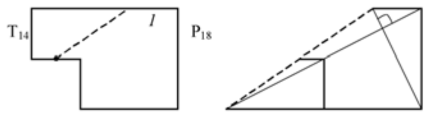


Trapez dreptunghic variabil:
$x,\ \sqrt{4x^2-20x+29},\ 5-x,\ 2;\ 0<x<5/2.$

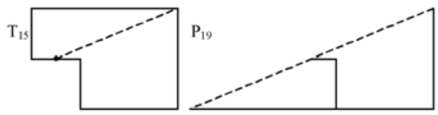


Trapez dreptunghic circumscriptibil:

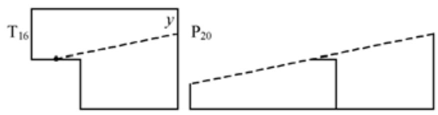
$$x=\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ 3,\ \frac{5+\sqrt{5}}{2},\ 2.$$



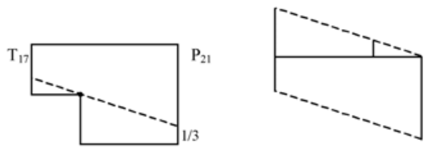
Trapez dreptunghic ortogonal: $1,\ \sqrt{13},\ 4,\ 2.$



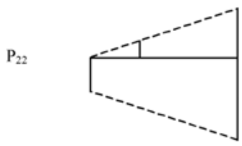
Triunghi dreptunghic: $\sqrt{29},\ 5,\ 2.$



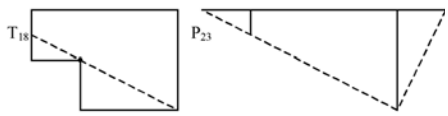
Trapez dreptunghic variabil:
$\sqrt{4y^2-8y+29},\ y,\ 5,\ 2-y;\ 0<y<1.$



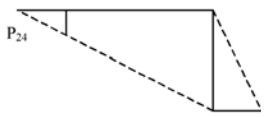
Paralelogram: $\sqrt{10},\ \frac{5}{3},\ \sqrt{10},\ \frac{5}{3}.$



Trapez isoscel: $\sqrt{10},\ \frac{2}{3},\ \sqrt{10},\ \frac{8}{3}.$

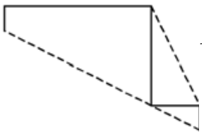


Triunghi dreptunghic: $5,\ 2\sqrt{5},\ \sqrt{5}.$



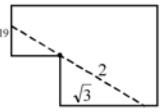
Trapez: $4,\ 2\sqrt{5},\ 1,\ \sqrt{5}.$

P_{25}

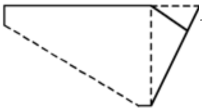


Pentagon: $3,\ \frac{1}{2},\ 2\sqrt{5},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{5}.$

T_{19}



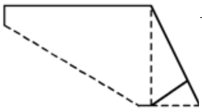
P_{26}



Pentagon:

$$\frac{9+2\sqrt{3}}{3},\ \frac{3-\sqrt{3}}{3},\ \frac{6+2\sqrt{3}}{3},\ 2-\sqrt{3},\ \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

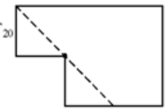
P_{27}



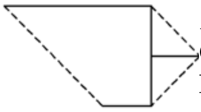
Pentagon:

$$3,\ \frac{3-\sqrt{3}}{3},\ \frac{6+2\sqrt{3}}{3},\ \frac{6-\sqrt{3}}{3},\ \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

T_{20}

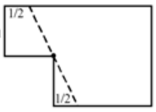


P_{28}
P_{29}

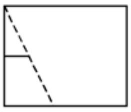


Pentagon: $3,\ 2\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2}.$
Obs. Cele două triunghiuri îşi pot schimba locurile. Sunt şi variante echivalente.

T_{21}

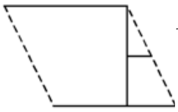


P_{30}



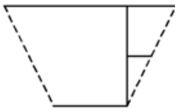
Dreptunghi: $\frac{5}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 2.$

P_{31}



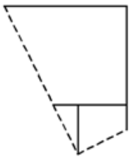
Paralelogram: $\frac{5}{2},\ \sqrt{5},\ \frac{5}{2},\ \sqrt{5}.$

P_{32}



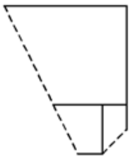
Trapez isoscel: $\frac{7}{2},\ \sqrt{5},\ \frac{3}{2},\ \sqrt{5}.$

P_{33}



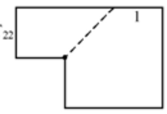
Patrulater inscriptibil: $\frac{5}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{5}{2}.$

P_{34}

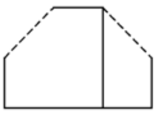


Pentagon: $\frac{5}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ 2.$

T_{22}

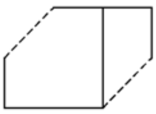


P_{35}

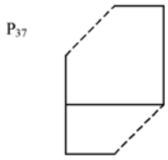


Hexagon inscriptibil cu axă de simetrie:
$1,\ \sqrt{2},\ 1,\ 3,\ 1,\ \sqrt{2}.$

P_{36}

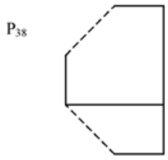


Hexagon cu centru de simetrie:
$2,\ \sqrt{2},\ 1,\ 2,\ \sqrt{2},\ 1.$



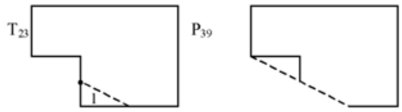
Hexagon cu centru de simetrie:

$$1,\ \sqrt{2},\ 2,\ 1,\ \sqrt{2},\ 2.$$

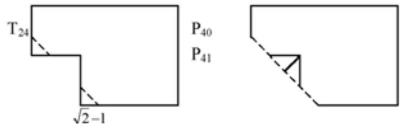


Hexagon inscriptibil cu axă de simetrie:

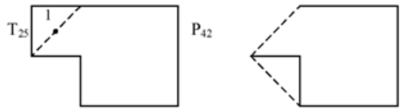
$$1,\ \sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2},\ 1,\ 3.$$



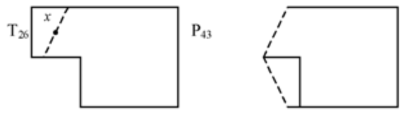
Pentagon: $3,\ 1,\ \sqrt{5},\ 1,\ 2.$



Pentagon: $3,\ 2-\sqrt{2},\ 2,\ 3-\sqrt{2},\ 2,.$
Obs. Cele două truinghiuri îşi pot schimba locurile. Sunt şi variante echivalente.

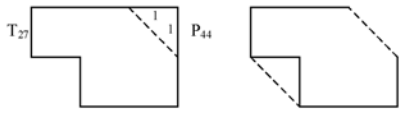


Pentagon cu axă de simetrie: $2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2,\ 2.$
Obs. Are variante echivalente.



Pentagon variabil cu axă de simetrie:
$3-x,\ \sqrt{4x^2-4x+2},\ \sqrt{4x^2-4x+2},\ 3-x,\ 2;$

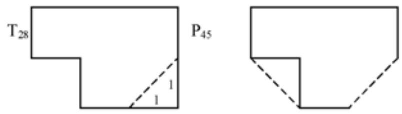
$$1/2 < x < 1.$$



Hexagon cu centru de simetrie:

$$2,\ 1,\ \sqrt{2},\ 2,\ 1,\ \sqrt{2}.$$

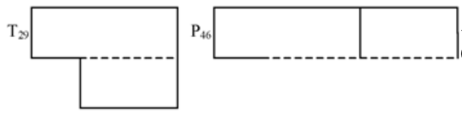
Obs. Are variante echivalente.



Hexagon inscriptibil cu axă de simetrie:

$$3,\ 1,\ \sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2},\ 1.$$

Obs. Are variante echivalente.



Dreptunghi: 5, 1, 5, 1.
Obs. Are variante echivalente.

Dreptunghi: 5, 1, 5, 1.
Obs. Are variante echivalente.

*

* *

Această listă lungă de poligoane (adresăm cititorilor provocarea de a mai găsi altele remarcabile) permite utilizarea ei în diferite moduri adaptate la nivelul cunoştinţelor celor cărora li se adresează şi la scopurile urmărite de propunător. De exemplu, propunem următoarele:

1) Să se găsească doar situaţiile care dau triunghiuri sau patrulatere (eventual

particulare: trapeze ş. a.)

2) În ce situaţie se obţine figura cu perimetrul maxim sau minim?

3) Ce tipuri distincte de poligoane se pot obţine? (triunghi dreptunghic, dreptunghi, paralelogram, trapez, trapez isoscel, trapez dreptunghic, trapez circumscriptibil, trapez ortodiagonal, patrulater inscriptibil, pentagon, pentagon cu axă de simetrie, hexagon, hexagon cu centru de simetrie, hexagon cu axă de simetrie; s-au luat în considerare doar particularităţile "clasice" neluând în considerare particularităţi ca: pentagon cu două unghiuri drepte ş. a.).

4) Care tăietură dă cel mai mare număr de variante echivalente? (adică să se obţină acelaşi poligon; de exemplu T_{20} dă 16 variante căci dacă notăm triunghiurile decupate prin I cel de sus şi II cel de jos, respectiv prin F (faţă) şi V (verso), atunci ele pot fi aşezate pentru a forma pentagonul în cele două poziţii S (sus) şi J (jos) astfel:

$$\begin{array}{rcccccccc} S: & IF & IF & IV & IV & IIF & IIV & IIF & IIV \\ J: & IIF & IIV & IIF & IIV & IF & IF & IV & IV \end{array}$$

şi toate aceste combinaţii încă o dată numărate dacă întoarcem întreg pentagonul pe verso.

5) Dacă se consideră o singură faţă a cartonului care situaţii nu se pot realiza? (De exemplu T_2 cu P_4).

6) Care situaţii duc la poligoane congruente? (De exemplu P_{35}, P_{39}, P_{45}).

7) De ce nu se pot realiza poligoane convexe cu mai mult de şase laturi?

8) Rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor de gradul 3 şi 4 care au apărut. (Acestea pot constitui un pretext pentru a prezenta la o activitate suplimentară formulele lui Cardano, respectiv Ferrari).

9) Relativ la tăieturi: care este cea mai mică? cea mai mare? cea care împarte poligonul în două bucăţi echivalente (de aceeaşi arie)?

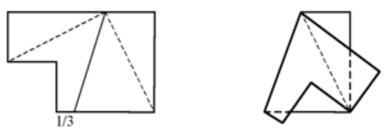
*

* *

În încheiere să revenim la problema iniţială adaptând-o la mulţimea de situaţii de mai sus şi anume:

Se poate ca printr-o singură tăietură în linie dreaptă să realizăm din figura iniţială un pătrat?

Răspunsul este afirmativ doar dacă îndoim în prealabil cartonul aşa cum este indicat mai jos (după bisectoarea unghiului drept format de cele două tăieturi prezentate în soluţia sa).



Dar această problemă cu îndoire şi tăiere poate iniţia o altă RECREAŢIE MATEMATICĂ.