Câteva relații metrice deduse vectorial

Marian TETIVA [1]

Ne propunem să prezentăm în cele ce urmează o modalitate de deducere a unor relații metrice în triunghi sau în tetraedru cu ajutorul calculului vectorial. Ideea (simplă, dar eficientă) am întâlnit-o în lucrarea [**3**] și este exprimată în

Propoziția 1. *Fie K, M, L trei puncte necoliniare. Pentru un punct P oarecare, următoarele afirmații sunt echivalente:*

a) Punctele L, M, P sunt coliniare;

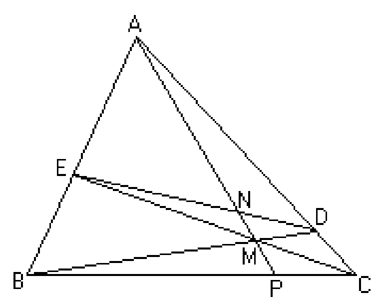
b) Există numerele reale l, m astfel încât $l+m=1$ *și* $\overrightarrow{KP}=l\overrightarrow{KL}+m\overrightarrow{KM}$

Demonstrație. $P\in LM \Leftrightarrow \exists l\in \mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{MP}=l\overrightarrow{ML}\Leftrightarrow \exists l\in\mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{KP}-\overrightarrow{KM}=l(\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{KM})\Leftrightarrow \exists l\in\mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{KP}=l\overrightarrow{KL}+(1-l)\overrightarrow{KM}$, q.e.d .

Mai departe vom rezolva câteva probleme folosind rezultatul din Propoziția 1. Începem cu problema din [**3**] care ne-a condus la această notă.

Problema 1. *Fie ABC un triunghi, iar E, D puncte situate pe laturile AB, respectiv AC. Considerăm punctul M, intersecția dreptelor BD și CE; P și N sunt intersecțiile dintre AM și BC, respectiv AM și DE. Să se arate ca are loc egalitatea:* $\dfrac{PN}{NA}=2\dfrac{PM}{MA}$.

Soluție. Să notăm $p=\dfrac{AE}{EB}$, $q=\dfrac{AD}{DC}$, $m=\dfrac{AM}{MP}$, $n=\dfrac{AN}{NP}$. Cum $P\in BC$, există numerele x, y astfel încât $x+y=1$, și $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$. Din $\overrightarrow{AE}=p\overrightarrow{EB}$ rezultă imediat $\overrightarrow{AE}=\dfrac{p}{p+1}\overrightarrow{AB}$; la fel , $\overrightarrow{AD}=\dfrac{q}{q+1}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}=\dfrac{m}{m+1}\overrightarrow{AP}$ și $\overrightarrow{AN}=\dfrac{n}{n+1}\overrightarrow{AP}$. Egalitatea de mai sus poate fi scrisă în următoarele forme echivalente :



$\dfrac{m+1}{m}\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{q+1}{q}y\overrightarrow{AD}$,

$\dfrac{n+1}{n}\overrightarrow{AN}=\dfrac{p+1}{p}x\overrightarrow{AE}+\dfrac{q+1}{q}y\overrightarrow{AD},$

$\dfrac{m+1}{m}\overrightarrow{AM}=\dfrac{p+1}{p}x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$. Ținând seama de unicitatea scrierii unui vector în bazele $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}),(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC})$ respectiv $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ și de Propoziția 1, obținem egalitățile: $\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{p+1}{p}x+\dfrac{q+1}{q}y$ (1); $\dfrac{m+1}{m}=\dfrac{p+1}{p}x+y$ (2); $\dfrac{m+1}{m}=x+\dfrac{q+1}{q}y$ (3). Adunând (2)

[1] Profesor, Colegiul Național “Gh. Roșca Codreanu”, Bârlad

cu (3) şi ţinând seama de (1) şi de faptul că $x+y=1$, obţinem că $\frac{2}{m}=\frac{1}{n}$, q.e.d.

Problema 2 *(relaţia lui Van Aubel)***.** *Cu notaţiile din problema precedentă, are loc egalitatea* $\frac{AE}{EB}+\frac{AD}{DC}=\frac{AM}{MP}$.

Soluţie. Relaţia (2) de mai sus se scrie: $1+\frac{1}{m}=\left(1+\frac{1}{p}\right)x+1-x$, adică $mx=p$. Analog, din (3) obţinem $my=q$. Atunci $\frac{AE}{EB}+\frac{AD}{DC}=p+q=m(x+y)=m=\frac{AM}{MP}$, q.e.d.

Problema 3 ([**1**])**.** *Păstrăm notaţiile din Problema 1. În plus, considerăm punctele T, S pe laturile AB, AC astfel încât* $\frac{TA}{TB}=\alpha, \frac{SA}{SC}=\beta$. *Să se arate că* $M\in TS \Leftrightarrow \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}=1$.

Soluţie. Vom avea, ca mai sus, $\overrightarrow{AT}=\frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AS}=\frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{AC}$. Din relaţia $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ rezultă că $\frac{m+1}{m}\overrightarrow{AM}=x\frac{\alpha+1}{\alpha}\overrightarrow{AT}+y\frac{\beta+1}{\beta}\overrightarrow{AS}$. Conform Propoziţiei 1 şi ţinând seama de unicitatea scrierii unui vector în baza $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AS}\right)$, avem: $M\in TS \Leftrightarrow \frac{m+1}{m}=\frac{\alpha+1}{\alpha}x+\frac{\beta+1}{\beta}y \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{p}{m\alpha}+\frac{q}{m\beta} \Leftrightarrow 1=\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}$, q.e.d.

Două cazuri particulare mai des întâlnite ale Problemei 3 sunt acelea în care punctul *M* este centrul de greutate G, respectiv centrul cercului înscris I pentru triunghiul ABC; cititorul se poate convinge că este valabil următorul enunţ:

Problema 3. *Fie ABC un triunghi şi punctele T, S pe laturile AB, AC. Atunci:*

a) $G\in TS \Leftrightarrow \frac{TB}{TA}+\frac{SC}{SA}=1;$

b) $I\in TS \Leftrightarrow b\frac{TB}{TA}+c\frac{SC}{SA}=a,$ *unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor triunghiului.*

Iată în continuare şi variantele în spaţiul cu trei dimensiuni ale chestiunilor discutate anterior; rezultatul similar celui din Propoziţia 1 este conţinut în:

Propoziţia 2. *Fie K, L, M, N patru puncte necoplanare. Un punct P este situat în acelaşi plan cu L, M, N dacă şi numai dacă există numerele reale l, m, n astfel încât* $l+m+n=1$ *şi* $\overrightarrow{KP}=l\overrightarrow{KL}+m\overrightarrow{KM}+n\overrightarrow{KN}$. *Altfel spus, dacă x,y,z sunt coordonatele vectorului* $\overrightarrow{KP}$ *în baza,* $\left(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KN}\right)$, *atunci* $P\in(LMN)$ *dacă şi numai dacă* $x+y+z=1$.

Demonstraţia este asemanătoare. Avem $P\in(LMN) \Leftrightarrow \exists\, m,n\in\mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{LP}=m\overrightarrow{LM}+n\overrightarrow{LN} \Leftrightarrow \exists\, m,n\in \mathrm{R}$ astfel încât $\overrightarrow{KP}-\overrightarrow{KL}=m\left(\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KL}\right)+n\left(\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{KL}\right)\Leftrightarrow$ $\exists l,m,n\in\mathbf{R}$, $l=1-m-n$ (deci cu $l+m+n=1$), astfel încât $\overrightarrow{KP}=l\overrightarrow{KL}+m\overrightarrow{KM}+n\overrightarrow{KN}$, q.e.d.

Folosind Propoziţia 2 putem rezolva:

Problema 4 ([**3**])**.** *Fie ABCD un tetraedru şi F, G, H puncte pe AB, AC, AD respectiv; fie M punctul comun planelor* (*FCD*)*,* (*GBD*)*,* (*HBC*)*, iar P şi N punctele de intersecţie ale dreptei AM cu planele* (*BCD*) *respectiv* (*FGH*)*. Atunci are loc:* $\frac{PN}{NA}=3\frac{PM}{MA}$.

Soluţie. Ca în Problema 1, să notăm $p=\frac{AF}{FB}$, $q=\frac{AG}{GC}$, $r=\frac{AH}{HD}$, $m=\frac{AM}{MP}$, $n=\frac{AN}{NP}$. Ţinând cont de unicitatea scrierii unui vector într-o bază şi de Propoziţia 2, obţinem mai întâi existenţa numerelor reale x, y, z astfel încât $x+y+z=1$ şi $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AC}$, iar apoi echivalenţele:

$$\frac{n+1}{n}=\frac{p+1}{p}x+\frac{q+1}{q}y+\frac{r+1}{r}z \Leftrightarrow \frac{1}{n}=\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r};$$

$$\frac{m+1}{m}=\frac{p+1}{p}x+y+z \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{x}{p};\ \frac{m+1}{m}=x+\frac{q+1}{q}y+z \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{y}{q};$$

$\frac{m+1}{m}=x+y+\frac{r+1}{r}z \Leftrightarrow \frac{1}{m}=\frac{z}{r}$. De aici $\frac{3}{m}=\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=\frac{1}{n}$, adică relaţia din enunţ.

De asemenea vom avea $1=x+y+z=\frac{p+q+r}{m}\Rightarrow p+q+r=m$, deci am rezolvat şi

Problema 5. *Cu aceleaşi notaţii din Problema 4 avem* $\frac{AF}{FB}+\frac{AG}{GC}+\frac{AH}{HD}=\frac{AM}{MP}$.

În încheiere propunem cititorului să rezolve problemele :

Problema 6. *Păstrăm notaţiile din Problemele 4 şi 5; în plus fie punctele S, T, U pe AB, AC, respectiv AD astfel încât* $\frac{AS}{SB}=\alpha, \frac{AT}{TC}=\beta, \frac{AU}{UD}=\gamma$. *Să se arate că:* $M\in(STU)\Leftrightarrow\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}=1$.

Caz particular. Centrul de greutate al tetraedrului se află în planul (*STU*) dacă şi numai dacă $\frac{SB}{AS}+\frac{TC}{AT}+\frac{UD}{AU}=1$ ([**4**]).

Problema 7. *Fie ABCD un patrulater convex şi punctele M ,N, P, Q pe laturile sale AB, BC, CD, DA respectiv, astfel încât* $\frac{AM}{MB}=\frac{DP}{PC}=a, \frac{BN}{NC}=\frac{AQ}{QD}=b$. *Fie S intersecţia dreptelor MP şi NQ. Să se calculeze rapoartele* $\frac{QS}{SN}$ *şi* $\frac{MS}{SP}$ (O frumoasă soluţie sintetică a acestei probleme poate fi găsită în [**2**]).

Bibliografie

1. M. Andronache – *Problema 4* (p. 158) *,* G.M. 4/2000.
2. D. Brânzei, R. Brânzei – *Metodica predării matematicii,* Editura "Paralela 45", 2000.
3. V.N. Dubrovski – *Soluţia problemei M1062,* Kvant 1/1988.
4. Gh. **Szöllösy** – *Problema C: 2275,* G.M. 4/2000.