Câteva consecințe ale unei relații a lui Gergonne

Ioan SĂCĂLEANU [1]

În triunghiul ABC considerăm cevienele AA', BB', CC' concurente în M. Notăm $x = \frac{AM}{MA'}$, $y = \frac{BM}{MB'}$, $z = \frac{CM}{MC'}$; constatăm că dacă M este centrul de greutate al triunghiului, atunci x, y, z sunt numere naturale. Ne propunem să determinăm toate punctele $M \in \operatorname{Int} ABC$ cu proprietatea următoare:

rapoartele x, y, z corespunzătoare lui M sunt numere naturale. (*)

În particular, vom aşeza într-un cadru firesc şi vom extinde rezultatul obținut în [**1**].

Pornim de la următoarea

Teoremă(Gergonne). *În triunghiul ABC, cevienele AA', BB', CC' sunt concurente în M. Atunci* $\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1$ (vezi [**2**]).

Cu notațiile inițiale, putem rescrie concluzia $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$; în mod necesar, unul dintre termenii sumei din stânga trebuie să fie cel puțin $\frac{1}{3}$. Vom presupune că $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{3}$, de unde $x \leq 2$. Cum $x \in \mathbf{N}^*$, rezultă că $x = 1$ sau $x = 2$.

Dacă $x = 1$, atunci $\frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}$, i.e. $(y-1)(z-1) = 4$ şi deoarece $y, z \in \mathbf{N}^*$, rezultă că $(y, z) \in \{(2,5), (3,3), (5,2)\}$.

Dacă $x = 2$, atunci $\frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{2}{3}$. Unul dintre termenii din stânga trebuie să fie cel puțin $\frac{1}{3}$; să presupunem că $\frac{1}{y+1} \geq \frac{1}{3}$, adică $y \leq 2$. Dacă $y = 1$, obținem $z = 5$, iar dacă $y = 2$, rezultă $z = 2$.

În concluzie, (x, y, z) poate lua valorile (2,2,2), (1,3,3), (1,2,5), precum şi toate permutările posibile ale acestor triplete. Avem astfel 3 tipuri de puncte M cu proprietatea (*), pe care le vom nota corespunzător M[2,2,2], M[1,3,3], M[1,2,5]. Ne propunem în continuare să caracterizăm geometric fiecare dintre aceste tipuri de puncte.

Propoziția 1. *Un punct M este de tipul M[2,2,2] dacă şi numai dacă este centrul de greutate al triunghiului ABC.*

---

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Ştefan cel Mare", Hârlău

Demonstrație. Suficiența este evidentă. Pentru a demonstra necesitatea, aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul $AB'M$ cu transversala $BA'C$; obținem $\frac{BM}{BB'}\cdot\frac{B'C}{CA}\cdot\frac{AA'}{A'M}=1$. Din ipoteză, $\frac{AA'}{A'M}=3$, $\frac{BM}{BB'}=\frac{2}{3}$ și atunci $\frac{B'C}{CA}=\frac{1}{2}$, adică B' este mijlocul lui $[AC]$. Rezultă că M se află situat pe mediana $[BB']$ astfel încât $\frac{MB'}{BB'}=\frac{1}{2}$, deci M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Propoziția 2. *Un punct M este de tipul $M[1,3,3]$ dacă și numai dacă este mijlocul medianei $[AA']$ (analog pentru $M[3,1,3]$ și $M[3,3,1]$).*

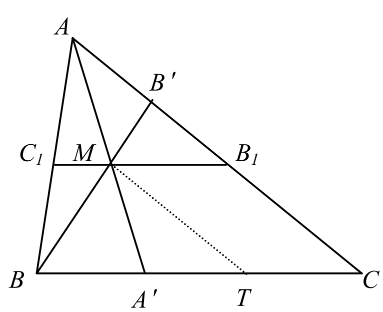
Demonstrație. Dacă $M[1,3,3]$, atunci $\frac{C'M}{MC}=\frac{B'M}{MB}=\frac{1}{3}$, deci $B'C'\,//\,BC$ conform reciprocei teoremei lui Thales aplicată în triunghiul MBC. Rezultă de aici că $\frac{AC'}{C'B}=\frac{AB'}{B'C}$ și folosind teorema lui Ceva obținem că $\frac{BA'}{A'C}=1$, deci $[AA']$ este mediană, iar M este mijlocul său.

Reciproc, dacă M este mijlocul medianei $[AA']$, evident că $x=1$. Din teorema lui Ceva obținem că $\frac{AC'}{C'B}=\frac{AB'}{B'C}$, deci $B'C'\,//\,BC$, de unde $\Delta C'MB'\sim\Delta CMB$ și $\Delta AB'C'\sim\Delta ABC$. Obținem de aici că $\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{AB'}{AC}$. Pe de altă parte, aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul $AA'C$ cu transversala BMB', rezultă că $\frac{BA'}{BC}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{MA}{MA'}=1$ și cum $\frac{BA'}{BC}=\frac{1}{2}$, $\frac{MA}{MA'}=1$, avem că $\frac{CB'}{B'A}=2$, i.e. $\frac{AB'}{AC}=\frac{1}{3}$. În concluzie, $y=z=3$, deci M este de tipul $M[1,3,3]$.

Propoziția 3. *Un punct M este de tipul M[1,2,5] dacă și numai dacă aparține liniei mijlocii $[C_1B_1]$ și o împarte în două segmente având raportul 2 (au loc și afirmațiile analoage pentru M[1,5,2] etc.).*

Demonstrație.

Fie $M[1,2,5]$; cum $x=1$, rezultă că M aparține liniei mijlocii $[C_1B_1]$. Ducem $MT\parallel AC$, $T\in BC$; atunci MB_1CT este paralelogram și deci $[MB_1]\equiv[TC]$. Aplicând teorema lui Thales în triunghiul BCB' obținem $\frac{BT}{TC}=\frac{BM}{MB}=2$, deci $CT=\frac{1}{3}BC=\frac{2}{3}B_1C_1$, adică $MB_1=\frac{2}{3}B_1C_1$.



Reciproc, fie $M \in [C_1 B_1]$ astfel încât $\frac{MB_1}{C_1M} = 2$. Cum M aparține liniei mijlocii, evident că $x = 1$. Cu notațiile precedente, $CT = MB_1 = \frac{2}{3} C_1B_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{3} BC$, deci $\frac{BT}{TC} = 2$. Din teorema lui Thales aplicată în $\Delta BCB'$ rezultă că $\frac{BM}{MB'} = \frac{BT}{TC} = 2$, adică $y = 2$. Folosind acum relația lui Gergonne, se deduce că $z = 5$.

Aplicația 1. *Centrul cercului circumscris triunghiului ABC are proprietatea (*) dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.*

Demonstrație. Presupunem că O are proprietatea (*). Dacă, prin absurd, $O \in B_1C_1$, atunci $C_1O \perp AB$ şi $B_1O \perp AC$, deci *A, B, C* ar fi coliniare. Rezultă că $O \notin B_1C_1$ şi de aici urmează că *O* este de tipul O [2,2,2], adică $O \equiv G$, deci triunghiul ABC este echilateral. Reciproca este imediată.

Aplicația 2. *Centrul cercului înscris are proprietatea (*) dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstrație. Presupunem că I are proprietatea (*). Dacă, prin, absurd, $I \in B_1C_1$, atunci $\angle C_1IB \equiv \angle IBC$ şi deci $\angle C_1IB \equiv \angle C_1BI$, adică triunghiul C_1BI este isoscel cu $[BC_1] \equiv [C_1I]$. Analog, $[CB_1] \equiv [B_1I]$, de unde $BC = 2B_1C_1 = 2C_1I + 2B_1I = 2BC_1 + 2CB_1 = AB + AC$, imposibil. Rezultă că I este punct de tipul *I*[2,2,2], adică $I \equiv G$, deci triunghiul *ABC* este echilateral. Reciproca este evidentă.

Observația 1. Acest rezultat este demonstrat pe o altă cale în [**1**].

Observația 2. Există triunghiuri neechilaterale al căror ortocentru are proprietatea (*). Caracterizarea acestora este dată mai jos (Aplicația 4) şi o propunem spre rezolvare, împreună cu două probleme ajutătoare:

Aplicația 3. *Fie triunghiul ABC, M si N mijloacele laturilor [AB], respectiv [AC] iar H intersecția inălțimilor AA' şi BB'. Au loc echivalențele:*

1) $\frac{BC}{3} = \frac{AB}{\sqrt{5}} = \frac{AC}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow H \in [MN]$ *şi HN=2HM* $\Leftrightarrow \frac{HA}{HA'} = 1$ *şi* $\frac{HB}{HB'} = 2$*;*

2) $\frac{BC}{2} = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow H$ *este mijlocul lui [MN]* $\Leftrightarrow \frac{HA}{HA'} = 1$ *şi* $\frac{HA}{HB'} = 3$.

Aplicația 4. *Ortocentrul triunghiului ABC are proprietatea (*) dacă şi numai dacă laturile triunghiului sunt direct proporționale fie cu* 1,1,1, *fie cu* 3, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, *fie cu* 2, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.

Bibliografie

1. **Iulica Georgescu** – *Asupra unei clase de triunghiuri*, G.M. 2-3/1982.
2. **Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff** – *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.