Asupra unei clase de şiruri recurente

Dan POPESCU [1]

Scopul acestui articol este prezentarea unei metode de abordare a unei clase de şiruri recurente de primul ordin. Mai precis, dat şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin

$$x_1 \in D \subset R \quad \text{şi} \quad x_{n+1} = f(x_n), \forall\, n \in N^*, \tag{1}$$

unde $f : D \to D$, se pune problema existenţei limitei $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$ în $\overline{R}$.

În ipoteza că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \overline{R} - \{0\}$, şirul $(nx_n)_{n\geq 1}$ are limita evidentă; rămâne de investigat cazul în care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Rezultatul principal este cuprins în următoarea

Teoremă. *Fie* $D \subset R^*$ *având originea ca punct de acumulare, funcţia* $f : D \to D$ *şi şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin (1) astfel încât sunt îndeplinite condiţiile:* 1^0 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *şi* 2^0 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - f(x)}{xf(x)} = l \in \overline{R}$. *Au loc implicaţiile:*

(a) dacă $l \in \overline{R} - \{0\}$ *, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \dfrac{1}{l}$ *;*

(b) dacă l=0 şi există o vecinătate V_1 a originii încât $\dfrac{x - f(x)}{xf(x)} > 0, \forall\, x \in V_1 \cap D$ *, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = +\infty$ *;*

(c) dacă l=0 şi există o vecinătate V_2 a originii încât $\dfrac{x - f(x)}{xf(x)} < 0, \forall\, x \in V_2 \cap D$ *, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = -\infty$.

Demonstraţie. Se aplică criteriul Stolz-Cesàro şirului $\left(\dfrac{1}{nx_n}\right)_{n\geq 1}$ scris sub forma $\left(\dfrac{1/x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$. În ipotezele impuse avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/x_{n+1} - 1/x_n}{(n+1)-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - f(x_n)}{x_n f(x_n)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x - f(x)}{xf(x)} = l \in \overline{R}$. .

Urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nx_n} = l$ şi afirmaţiile (*a*), (*b*), (*c*) decurg imediat.

Prezentăm mai întâi câteva aplicaţii directe ale acestei teoreme.

1 (G.M. – 11,12/1986*, C: 649*, **M. Bencze**). *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1 > 0$ *şi* $x_{n+1} = \ln(1 + x_n), \forall\, n \in N^*$. *Să se demonstreze că* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 2$.

2 (G.M. – 3/1987*, 21056*, **F. Dumitrel**). *Dacă şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *se defineşte prin* $x_1 > 0$ *şi*

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional „Ştefan cel Mare", Suceava

$x_{n+1}=x_n 2^{-x_n}, \forall\, n\in N^*$, *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

3 (G.M. – 10/1987, *21253*, **M. Lascu**). *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq1}$ *definit prin* $x_1>0$ *şi* $x_{n+1}=\ln(1+arctg(x_n)), \forall\, n\in N^*$. *Să se arate că şirul* $(nx_n)_{n\geq1}$ *este convergent la 2.*

4 (R.M.T. – 2/1987, *6256*, **V. Bivolaru**). *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq1}$ *încât* $x_1>0$ *şi* $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2x_n-\ln(1+x_n)}, n\in N^*$. *Să se arate că şirul este convergent şi să i se calculeze limita.*

5 (G.M.– 4/1995, *23241*, **V. Nicula**). *Fie* $p\in N^*$, $x_1\in(0,\ 1/p)$ *şi* $x_{n+1}=x_n(1-x_n)(1-2x_n)...(1-px_n), \forall\, n\in N^*$. *Să se calculeze limita* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

6 (G.M. – 1/1997, *23668,* **A. Vernescu**). *Dacă şirul* $(x_n)_{n\geq1}$ *este definit prin* $x_1>0$ *şi* $x_{n+1}=\sqrt{x_n+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}, \forall\, n\in N^*$, *să se studieze natura şirului* $(nx_n)_{n\geq1}$ *şi, în caz de convergenţă, să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Condiţia 1^0 din teoremă se verifică uşor pentru fiecare dintre şirurile precedente. În privinţa condiţiei 2^0, pentru funcţia aferentă $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ indicăm:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$,

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x\,2^{-x}}{x^2 2^{-x}}=\ln 2$,

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+arctg\,x)}{x\ln(1+arctg\,x)}=\dfrac{1}{2}$,

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\dfrac{x^2}{2x-\ln(1+x)}}{\dfrac{x^3}{2x-\ln(1+x)}}=\dfrac{1}{2}$,

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x(1-x)(1-2x)...(1-px)}{x^2(1-x)(1-2x)...(1-px)}=\dfrac{p(p+1)}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}{x\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)}=1.$

Observaţie. În privinţa problemei 5, menţionăm că pentru $p=1$ se obţine o problemă din revista *Matematika v şkole, 5/1984*.

Prezentăm acum câteva probleme care sunt sub incidenţa Teoremei, fapt care nu este însă evident.

7 (G.M. – 5,6/1988, *21458*, **M. Banyai**). *Fie* $k>0$, $x_1>k$ *şi* $x_{n+1}=x_n^2/(x_n-k)$, $\forall\, n\in N^*$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{x_n}$.

Soluţie. Se constată că $(x_n)_{n\geq1}$ este crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. Aplicăm Teorema şirului $(y_n)_{n\geq1}$ definit prin $y_n=\dfrac{1}{x_n}, \forall\, n\in N^*$. Avem $y_{n+1}=y_n(1-ky_n)$, $\forall\, n\in N^*$, şi

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Funcția $f:(0,1)\to(0,1)$ dată de $f(x) = x(1-kx)$ are $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-f(x)}{xf(x)} = k.$

. Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{x_n} = \lim ny_n = \dfrac{1}{k}$.

8 (G.M. – 1/1989, *21668*, **M. Lascu**). *Fie șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit de* $x_1 = 1$ *și* $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}, \forall\, \mathrm{n}\in \mathrm{N}^*$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{2n}}$ (enunț parțial).

Soluție. Se constată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Notăm $y_n = 2/x_n^2, \forall n\in N^*$, și deducem că $y_{n+1} = 4y_n/(y_n^2+4y_n+4)$. Utilizând Teorema, obținem: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{ny_n}} = 1.$

9 (G.M. – 6,7/1990, *22115*, **M. P. Mihail**). *Dacă* $a,b,x_1 > 0$ *și* $x_n = x_n^2/(a+bx_n)$,

$\forall\, \mathrm{n}\in\mathrm{N}^*$, *să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{nx_n}}$.

Soluție. Se introduce șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ prin $y_n = x_n^2, n\geq 1$. Urmează $y_{n+1} = y_n^2/(a+b\sqrt{y_n})^2, n\geq 1, f(x) = x^2/(a+b\sqrt{x})^2, x>0$, etc. Discuție după b și x_1.

10 (G.M. – 11/1993, *C: 1463*, **L. Panaitopol).** *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1 > 1$ *și* $x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n} - 1, \forall\, \mathrm{n}\in\mathrm{N}^*$.*Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n^2}$.

Soluție. Cu $y_n = 1/\sqrt{x_n}, n\geq 1$, obținem $y_{n+1} = y_n/\sqrt{1+y_n-y_n^2}, n\geq 1$, și găsim, în cele din urmă, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n^2} = \dfrac{1}{4}$.

11 (R.M.T. – 2/1997, *X127*, **V.Bivolaru**). *Fie șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1 > 0$, $x_{n+1} = x_n\cdot a^{-x_n}, \forall n\in N^*$, *unde a>1. Dacă* $y_n = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{\ln n}, \forall n\in N^*$, *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Soluție. Cu criteriul Stolz-Cesàro, avem:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty} nx_n\frac{1}{\ln n-\ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty} nx_n = \frac{1}{\ln a}$$

ultima egalitate stabilindu-se cu ajutorul Teoremei (ca în Problema 3).

12 (G.M. – 1/1998, *C:2005*, **M. Bencze**). *Fie șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *astfel ca* $x_1 > 0$ *și* $(1+x_n)x_{n+1} = 1+x_n^2, \forall n\in N^*$. *Să se demonstreze că* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent și să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-x_n)$.

Soluție. Considerăm $y_n = 1 - x_n, n \geq 1$. Avem $y_{n+1} = (y_n - y_n^2)/(2 - y_n),\ n \geq 1$, şi $f(x) = (x - x^2)/(2 - x), x < 0$, etc. Limita este egală cu zero.