Asupra ipotezei lui Goldbach

Petru MINUȚ [1]

Una din problemele care au impulsionat considerabil dezvoltarea teoriei numerelor şi care nu este încă rezolvată, în ciuda eforturilor făcute în ultimii 250 de ani de matematicieni dintre cei mai renumiţi, este aşa numita ***ipoteză a lui Goldbach***.

Problema a fost pusă pentru prima dată în corespondenţa dintre *Christian Goldbach* şi *Leonhard Euler*, la vremea respectivă matematicieni la Academia din Sankt Petersburg. La 7 iunie 1742, Goldbach îi scrie lui Euler: *"Evident, orice număr (natural) este suma a trei numere prime"*. La 30 iunie 1742, Euler îi răspunde: *"Consider ca o teoremă pe deplin adevărată că orice număr par este suma a două numere prime, deşi nu pot să o demonstrez"*. Prin tradiție s-a păstrat sub denumirea de ipoteza lui Goldbach următoarea afirmație:

Propoziția 1. *Orice număr natural par, mai mare ca* 2*, este suma a două numere prime* (de exemplu, $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7=5+5$ etc.).

A fost formulată şi o ipoteză mai tare:

Propoziția 2. *Orice număr natural par, mai mare ca* 6*, este suma a două numere prime diferite.*

Propoziția 2 a fost verificată de *Pipping* pentru toate numerele pare până la 100000.

Teorema 1. *Propoziția 2 este echivalentă cu afirmația: orice număr natural mai mare ca 17 este suma a trei numere prime diferite.*

Demonstrație. Observăm că dacă n se reprezintă sub forma $n=p+q+r$, p,q,r prime, în cazul când n este impar toate trei numerele p,q,r sunt impare, iar în cazul când n este par unul dintre ele este par (deci 2) şi celelalte două impare.

Să mai observăm că nu există numere $n\in\mathbf{N}$ care să admită patru reprezentări de forma: $n=3+3+r_1$, $n=5+5+r_2$, $n=7+7+r_3$, $n=11+11+r_4$ (r_1,r_2,r_3,r_4 prime). Într-adevăr, în caz contrar ar rezulta că $r_1=r_4+16$, $r_2=r_4+12$, $r_3=r_4+8$. Ca urmare, dacă r_4 este de forma $r_4=3k$, atunci r_2 este multiplu de 3; dacă $r_4=3k+1$, atunci r_3 este multiplu de 3 şi dacă $r_4=3k+2$, atunci r_1 este multiplu de 3, absurd.

Presupunem că Propoziția 2 este adevărată şi fie $n>17$, n impar. Numerele pare $n-3$, $n-5$, $n-7$, $n-11$ sunt mai mari ca 6 şi se scriu sub forma unei sume de două numere prime diferite: $n-3=p_1+q_1$, $n-5=p_2+q_2$, $n-7=p_3+q_3$, $n-11=p_4+q_4$. Conform observației de mai sus, din aceste patru reprezentări ale lui n ca sume de trei numere prime există cel puțin una în care toți termenii sunt diferiți.

Dacă n este par, $n-2$ este par şi se poate scrie sub forma $n-2=p+q$, unde p şi q sunt două numere prime impare diferite, deci $n=2+p+q$.

[1] Prof. dr. , Catedra de algebră, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

Invers, presupunem că orice număr mai mare ca 17 este suma a trei numere prime diferite. Dacă n este par, $n > 15$, avem $n+2$ par, $n+2 > 17$, $n+2 = 2+p+q$, deci $n = p+q$, p şi q numere prime diferite. Pentru $6 < n \leq 15$ avem: 8=3+5, 10=3+7, 12=5+7, 14=3+11. Cu aceasta demonstraţia este completă.

Teorema 2. *Dacă ipoteza lui Goldbach este adevărată, orice număr natural impar, mai mare ca 7, este suma a trei numere prime impare.*

Demonstraţie. Dacă $2n+1 > 7$, $(2n+1)-3 = 2(n-1) > 4$ şi conform ipotezei lui Goldbach $(2n+1)-3 = p+q$, p, q prime, impare. Deci $2n+1 = 3+p+q$.

Observaţie. *I.M. Vinogradov* a demonstrat, în 1937, că *orice număr natural impar mai mare ca* $3^{3^{16}}$ *este sumă de trei numere prime*.

Considerăm propoziţia:

Propoziţia 3. *Orice număr natural impar, mai mare ca* 7*, este sumă de trei numere prime impare.*

Pentru a arăta că Propoziţia 3 este o teoremă (propoziţie adevărată) ar trebui verificat că orice număr natural impar *n*, $7 < n < 3^{3^{16}}$ se poate scrie ca o sumă de trei numere prime impare.

Teorema 3. *Dacă ipoteza lui Goldbach este adevărată, atunci orice număr întreg impar n se poate reprezenta, într-o infinitate de moduri sub forma* $n = p+q-r$*, unde* p, q, r *sunt numere prime.*

Demonstraţie. Fie n un număr întreg impar. Putem alege, într-o infinitate de moduri, un număr prim impar r astfel încât $n+r > 4$. Conform ipotezei lui Goldbach există două numere prime impare p şi q astfel încât $n+r = p+q$.

Teorema 4. *Orice număr natural mai mare ca 11 este suma a două numere compuse.*

Demonstraţie. Dacă n este par, $n-4$ este par (deci compus) şi $n = 4+(n-4)$. Dacă n este impar, $n-9$ este par (deci compus) şi $n = 9+(n-9)$.

Observaţie. *G.H. Hardy şi J.E. Littlewood* au formulat **ipoteza** că *orice număr natural n, suficient de mare este suma unui număr prim şi a unui pătrat* : $n = p+k^2$, p prim, $k \in \mathbf{N}$. Ipoteza nu a putut fi încă confirmată sau infirmată. O altă ipoteză a lui Hardy şi Littlewood a devenit teoremă prin demonstraţia dată de *I.V. Linnik* în 1959 :

Teorema 5. *Orice număr natural, suficient de mare, este suma între un număr prim şi două pătrate:* $n = p+k^2+h^2$, *p prim* , $k, h \in \mathbf{N}$.

Demonstraţia acestei teoreme nu poate fi făcută cu mijloace elementare.

Bibliografie

1. **D. A. Buhştab** – *Teoria cisel*, Moskva, 1960.
2. **C. Creangă, C. Cazacu, P. Minuţ, Gh. Opaiţ, C. Reischer** – *Introducere în teoria numerelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti , 1965.
3. **P. Minuţ** – *Teoria numerelor. Capitole introductive*, Ed. "Crenguţa Gâldău", Iaşi, 1997.
4. **W. Sierpinski** – *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.