Inegalități geometrice. Aplicații

Dan-Ştefan MARINESCU [1] ***şi Ioan ŞERDEAN*** [2]

Scopul propus este de a demonstra, prin mijloace mai puțin folosite, două inegalități geometrice care au un număr mare de aplicații.

Propoziția 1. *Fie $n\in N$, $n\geq 2$ şi M, $A_1, A_2, \dots, A_n$ puncte din spațiu date. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n\in R$, atunci*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2\right)\geq \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j A_i A_j^2 . \qquad (1)$$

Egalitatea se obține dacă şi numai dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}=\vec{0}.$

Demonstrație. Avem: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}\right)\geq 0$, de unde

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 MA_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \overrightarrow{MA_i}\cdot\overrightarrow{MA_j}\geq 0 \text{ sau } \sum_{i=1}^{n} a_i^2 MA_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j MA_i MA_j \cos(A_i \hat{M} A_j)\geq 0.$$

Cum din teorema cosinusului în ΔMA_iA_j, eventual degenerat, avem

$2MA_i MA_j\cos(A_i\hat{M}A_j)=MA_i^2+MA_j^2-A_iA_j^2$, urmează că

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 MA_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j\left(MA_i^2+MA_j^2\right)\geq \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j A_i A_j^2$$ şi, deci, are loc inegalitatea (1).

Observație. Există şi alte demonstrații ale inegalității (1) pentru cazul în care punctele sunt coplanare şi $a_1, a_2, \dots, a_n>0$.

Următorul caz particular este util în aplicații :

Corolar. *Fie $n\geq 3$, $A_1A_2\dots A_n$ un poligon şi M un punct dat. Atunci $(\forall)$ $a_1, a_2, \dots, a_n\in$* **R** *are loc inegalitatea (1).*

Aplicația 1. *Dacă ABC este un triunghi oarecare şi $\alpha,\beta,\gamma\in R$, atunci*

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2R^2\geq a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta.$$

L. Panaitopol

Soluție. În (1) luăm $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$, $a_3=\gamma$ şi M punctul O (centru cercului circumscris). Ca un caz particular al acestei aplicații se obține

Aplicația 2. *Dacă ABC este un triunghi şi α, β, $\gamma\in R$, atunci $a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta\leq 0$.*

Aplicația 3. *Fie $x, y, z\in R_+^*$. Atunci*

$$\frac{xy}{(x+z)^2(y+z)^2}+\frac{yz}{(y+x)^2(z+x)^2}+\frac{zx}{(z+y)^2(x+y)^2}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{xy}-\frac{1}{yz}-\frac{1}{zx}\right).$$

---

[1] Profesor, Liceul teoretic „Iancu de Hunedoara", Hunedoara

[2] Profesor, Colegiul Național „Aurel Vlaicu", Orăştie

D-Şt. Marinescu, **I. Şerdean** (*etapa locală 1998*)

Soluție. În Aplicația 1 se va lua $\alpha=x$, $\beta=y$, $\gamma=z$ şi $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$. Din $R=\dfrac{abc}{4S}$, obținem $R=\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz\ (x+y+z)}}$ etc.

Aplicația 4 . *Pentru orice priamidă triunghiulară MABC avem* :
$aMA^2+bMB^2+cMC^2\ge abc$ ($a=BC$, $b=AC$, $c=AB$). G.M. – 2/1995, p.88

Soluție. Se obține din (1) pentru $n=3$ şi $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$.

Aplicația 5. *Fie ABC un triunghi şi M un punct al planului său. Atunci*
$MA^4+MB^4+MC^4\ge a^2b^2c^2/(a^2+b^2+c^2)$. **I. Tomescu**, G.M. – 6/1972

Soluție. Conform inegalității Cauchy – Buniakovski – Schwarz, avem:

$$\left(MA^4+MB^4+MC^4\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(aMA^2+bMB^2+cMC^2\right).$$

Combinând aceasta cu inegalitatea din Aplicația 4, deducem inegalitatea cerută.

Aplicația 6 . *Fie ABC un triunghi, P un punct în planul său, iar PA=x, PB=y, PC=z. Să se arate că* $ayz+bxz+cxy\ge abc$. **C. Cocea**

Soluție. Luăm în Corolar n=3, M=P, $a_1=a/x$, etc. Obținem:

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)\ge\frac{a^2bc}{yz}+\frac{ab^2c}{xz}+\frac{abc^2}{xy}=\frac{abc}{xyz}(ax+by+cz)$$

$$\Rightarrow\ \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}\ge\frac{abc}{xyz}\ \Rightarrow\ ayz+bxz+cxy\ge abc.$$

Aplicația 7. Dacă *$A_1A_2\ldots A_n$ este un poligon şi M un punct oarecare, atunci*

$$n\sum_{i=1}^{n}MA_i^2\ge\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^2\ .$$

G.M. – 5/1995, p.193

Soluție. Luăm $a_i=1, i=\overline{1,n}$ în Corolar.

Aplicația 8. Dacă *$A_1A_2,\ldots A_n$ este un poligon înscris în cercul C(O,R), atunci*

$$n^2R^2\ge\sum_{1\le i<j\le n}A_iA_j^2\ .$$

M. Chiriță, **M. Dincă** – *Numere complexe*

Soluție. În Corolar se consideră $a_i=1, i=\overline{1,n}$ şi punctul M în O.

Cel de-al doilea rezultat general este următorul:

Propoziția 2. *Pentru orice $n\in N$, $n\ge3$ şi orice $x_1, x_2,\ldots, x_n\in R$ avem:*

$$2\sum_{k=1}^{n}x_k^2-2\sum_{k=1}^{n}x_k+2\sum_{k=1}^{n}x_k\left(1-x_{k+1}\right)\cos\frac{2\pi}{n}+n\ge n\cos^2\frac{\pi}{n}\ (x_{n+1}=x_1)\ . \qquad (2)$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1=x_2=\ldots=x_n=1/2$.

Demonstrație. Pentru $n=3$ inegalitatea revine la

$A=2\sum_{k=1}^{3}x_k^2-3\sum_{k=1}^{3}x_k+\sum_{k=1}^{3}x_kx_{k+1}+\frac{9}{4}\geq 0$ (cu $x_4=x_1$). Deoarece $\sum x_k^2\geq\sum x_kx_{k+1}$,

avem: $A\geq\sum x_k^2+2\sum x_kx_{k+1}-3\sum x_k+\frac{9}{4}=\left(\sum x_k\right)^2-3\sum x_k+\frac{9}{4}=\left(\sum x_k-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$,

deci (2) are loc pentru n=3.

Pentru $n\geq 4$ inegalitatea (2) revine la

$$B=2\sum x_k^2-2\sum x_k\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)-2\sum x_kx_{k+1}\cos\frac{2\pi}{n}+n\sin^2\frac{\pi}{n}\geq 0.$$

Cum $-2x_kx_{k+1}\geq-\left(x_k^2+x_{k+1}^2\right), k=\overline{1,n}$, prin multiplicare cu $\cos\frac{2\pi}{n}$ (ce este ≥ 0 pentru $n\geq 4$) şi apoi sumare după k, obţinem: $-2\sum x_kx_{k+1}\cos\frac{2\pi}{n}\geq-2\sum x_k^2\cos\frac{2\pi}{n}$.

Ca urmare, avem: $B\geq 2\sum x_k^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)-2\sum x_k\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)+n\sin^2\frac{\pi}{n}=$

$$=4\sum x_k^2\sin^2\frac{\pi}{n}-4\sum x_k\sin^2\frac{\pi}{n}+n\sin^2\frac{\pi}{n}=\sum\left(2x_k-1\right)^2\sin^2\frac{\pi}{n}\geq 0 \quad \text{q.e.d}$$

Aplicaţia 9. *Se consideră triunghiul echilateral ABC de latură 1 şi punctele $A_1\in(BC)$, $B_1\in(CA)$, $C_1\in(AB)$. Să se arate că* $A_1B_1^2+B_1C_1^2+C_1A_1^2\geq\frac{3}{4}$.

Concurs de matematică 1988 – etapa finală

Soluţie. Notând $x_1=BA_1, x_2=CB_1, x_3=AC_1$ şi , conform teoremei cosinusului , inegalitatea revine la

$2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2\left(x_1+x_2+x_3\right)-x_1(1-x_2)-x_2(1-x_3)-x_3(1-x_1)+3\geq\frac{3}{4}$, adică (2) pentru n=3.

Aplicaţia 10. *Pe laturile unui pătrat ABCD de latură 1 se consideră punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$, $Q\in(DA)$ astfel încât* $MN^2+NP^2+PQ^2+QM^2=2$. *Să se arate că MNPQ este pătrat.* **C. Năsturică**, Cardinal – 3/1991, p.55

Soluţie. Notăm $AM=x_1$, $BN=x_2$, $CP=x_3$, $DQ=x_4$. Egalitatea se scrie: $2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)-2\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)+4=2$, adică în (2) pentru $n=4$ are loc egalitate, deci $x_1=x_2=x_3=x_4=1/2$ şi M, N, P, Q, vor fi mijloacele laturilor pătratului *ABCD*. În consecinţă *MNPQ* este pătrat.

Aplicaţia 11. *Fie $A_1A_2,\dots A_n$, $n\geq 4$, un poligon regulat de latură 1 şi $P_1\in(A_1A_2)$, $P_2\in(A_2A_3)$, … , $P_n\in(A_nA_1)$. Să se arate că* $P_1P_2^2+P_2P_3^2+\dots+P_nP_1^2\geq n\cos\frac{2\pi}{n}$.

R.M.T – 1,2 / 1989 , Problema 6539

Soluţie. Notând cu $P_1A_2=x_1, P_2A_3=x_2,\dots, P_nA_1=x_n$, teorema cosinusului aplicată triunghiurilor $P_1A_2P_2, P_2A_3P_3, \dots, P_nA_1P_1$ ne conduce la

$$P_1P_2^2=x_1^2+(1-x_1)^2-2x_1(1-x_1)\cos\frac{(n-2)\pi}{n},\cdots,P_nP_1^2=x_n^2+(1-x_n)^2-2x_n(1-x_n)\cos\frac{(n-2)\pi}{n}$$

Prin sumare obținem: $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + ... + P_nP_1^2 = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + 2\sum_{k=1}^{n} x_k(1 - x_k)\cos\frac{2\pi}{n} + n$

şi, în conformitate cu (2), deducem inegalitatea cerută.