O generalizare a lemei lui Riemann

Dan POPESCU [1] ***şi Florin POPOVICI*** [2]

În această notă sunt generalizate următoarele două rezultate:

Teorema 1 (Lema lui Riemann [3]). *Dacă* $f:[0,2\pi]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie integrabilă Riemann, atunci şirurile* $\left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)_{n\in N^*}$ *şi* $\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\right)_{n\in N^*}$ *sunt convergente şi avem* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$.

Teorema 2 (Problema XII.19 [1]). *Dacă* $f:[0,T]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie continuă şi* $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *este o funcţie continuă şi periodică de perioadă T, atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)\,g(nx)\,dx=\frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)\ dx\right)\left(\int_0^T g(x)\ dx\right).$$

Amintim mai întâi un rezultat la care vom face referire.

Teorema 3[2]. *Dacă* $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie integrabilă Riemann şi* $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ *este o funcţie bijectivă, derivabilă şi cu derivata integrabilă Riemann, atunci funcţia* $(f\circ\varphi)\varphi'$ *este integrabilă Riemann şi are loc formula "schimbării de variabilă"*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Corolar. *Fie* $\alpha\in \boldsymbol{R^*}$ *astfel încât funcţia de gradul întâi* $\varphi:[c,d]\to[a,b]$, $\varphi(x)=\alpha x+\beta$ *este o funcţie bijectivă. Dacă* $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie integrabilă Riemann atunci funcţia* $f\circ\varphi$ *este integrabilă Riemann şi are loc formula*

$$\int_a^b f(x)dx=\alpha\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))dt.$$

Rezultatul principal este dat de

Teorema 4 (Lema lui Riemann generalizată). *Dacă* $f:[0,T]\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie integrabilă Riemann şi* $g:[0,\infty)\to \boldsymbol{R}$ *este o funcţie periodică de perioadă T, astfel încât restricţia* $g\big|_{[0,T]}$ *este integrabilă Riemann, atunci avem:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)\,g(nx)\,dx=\frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)\ dx\right)\left(\int_0^T g(x)\ dx\right). \tag{1}$$

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava,
[2] Profesor, Liceul Teoretic "N. Titulescu" ,Braşov

Demonstrație. Conform Corolarului, funcția dată de $x \to g(nx)$, $x \in [0,T]$ este integrabilă Riemann. Urmează că șirul $\left(\int_0^T f(x)\, g(nx)\, dx \right)_{n \in N^*}$ este corect definit.

Pentru orice $n \in \boldsymbol{N^*}$ fie $\Delta_n = (0 = x_{n0} < x_{n1} < \ldots < x_{nn} = T)$, unde $x_{ni} = i\frac{T}{n}, (\forall) i \in \{0,1,\ldots n\}$. Conform primei teoreme de medie, pentru orice $i \in \{0,1,\ldots n\}$ există $\gamma_{ni} \in \left[\inf \{ f(x) | x \in [x_{n,\,i-1}, x_{ni}] \},\ \sup \{ f(x) | x \in [x_{n,\,i-1}, x_{ni}] \} \right]$ astfel încât

$$\int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} f(x)dx = \gamma_{ni}\left(x_{ni} - x_{n,i-1}\right) = \gamma_{ni}\frac{T}{n} \tag{2}$$

Evident, avem

$$\int_0^T f(x)\,g(nx)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{n,i-1}}^{x_{ni}} f(x)\,g(nx)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} (f(x) - \gamma_{ni})g(nx)dx + \sum_{i=1}^n \gamma_{ni} \int_{x_{n,i-1}}^{x_{ni}} g(nx)dx. \tag{3}$$

Deoarece funcția g este periodică de perioadă T și restricția $g\big|_{[0,T]}$ este integrabilă Riemann, rezultă că funcția g este mărginită, deci există $M \in (0, \infty)$ astfel încât $|g(x)| \le M, (\forall) x \in [0, \infty)$. Urmează că

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} (f(x) - \gamma_{ni})g(nx) \right| \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} |f(x) - \gamma_{ni}|\,|g(nx)|dx \le$$
$$\le M \sum_{i=1}^n \int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} |f(x) - \gamma_{ni}|\, dx \le M\left(S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)\right).$$

unde $S_{\Delta_n}(f), s_{\Delta_n}(f)$ notează sumele Darboux superioară și inferioară relative la Δ_n.
De aici rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \int_{x_{n,\,i-1}}^{x_{ni}} (f(x) - \gamma_{ni})g(nx)dx = 0. \tag{4}$$

Ținând cont de relația (2) și de periodicitatea funcției g, se obțin egalitățile:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{ni} \int_{x_{n,i-1}}^{x_{ni}} g(nx)dx = \sum_{i=1}^n \gamma_{ni} \int_{(i-1)\frac{T}{n}}^{i\frac{T}{n}} g(nx)dx = \sum_{i=1}^n \gamma_{ni} \frac{1}{n} \int_{(i-1)T}^{iT} g(t)dt =$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^n \gamma_{ni} \frac{T}{n} \int_0^T g(t)dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(t)dt\right)\left(\sum_{i=1}^n \gamma_{ni}(x_{n,i-1} - x_{ni})\right) = \frac{1}{T}\left(\int_0^T g(t)dt\right)\left(\int_0^T f(x)dx\right). \tag{5}$$

Din (3), (4) și (5) rezultă că are loc (1).

Observație. Teoremele 1 și 2 sunt particularizări ale Teoremei 4.

Bibliografie

1.D. Popescu - *Problema XII.19*, Recreații matematice 1/2001, p. 77.

2.F. Popovici, M. Bencze - *Asupra schimbării de variabile in integrala Riemann,* G.M. metodică, 3/1996, 161-164.

3.Gh. Sirețchi - *Calcul diferențial și integral, vol I*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985.