Studiu comparativ privind câteva medii uzuale

Claudiu-Ştefan POPA [1]

Vom folosi în cele ce urmează următoarele convenții de notare: dacă $x, y > 0$, atunci $m_h = \dfrac{2xy}{x+y}$, $m_g = \sqrt{xy}$, $m_a = \dfrac{x+y}{2}$, $m_p = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ sunt *mediile armonică*, *geometrică*, *aritmetică*, respectiv *pătratică* ale numerelor x şi y. De asemenea, introducem $m = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ – *media ponderată* a numerelor x şi y cu ponderile reale x, respectiv y. În acest context, m_h poate fi privită ca media ponderată a numerelor x şi y cu ponderile y, respectiv x. Au loc următoarele inegalități între medii:

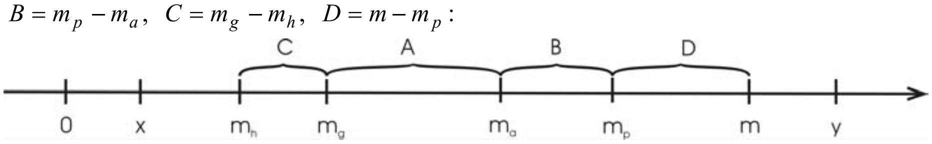
$$m_h \le m_g \le m_a \le m_p \le m \tag{1}$$

cu egalitate pentru $x = y$.

Se observă uşor prin calcul că $m - m_a = m_a - m_h$, (2)

deci media aritmetică a numerelor x şi y este medie aritmetică şi pentru numerele m_h şi m. De asemenea, aşa cum m_g este şi medie geometrică între m_h şi m_a, la fel m_p este medie geometrică între m_a şi m, deoarece $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{x+y}{2} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{x+y}}$. (3)

Vom presupune în continuare $x < y$ şi, ca în figura de mai jos, notăm $A = m_a - m_g$, $B = m_p - m_a$, $C = m_g - m_h$, $D = m - m_p$:



Propoziție. *Cu notațiile de mai sus, avem*: $\dfrac{A}{2} < C < B < D < A$. (4)

Demonstrație. Pentru prima inegalitate, avem echivalent:

$$\frac{A}{2} < C \Leftrightarrow m_a - m_g < 2m_g - 2m_h \Leftrightarrow m_a + 2m_h < 3m_g .$$

Însă $m_a + 2m_h = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{4ab}{a+b} \le 2\sqrt{\dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{4ab}{a+b}} = 2\sqrt{2ab} < 3\sqrt{ab} = 3m_g$. La fel,

$$C < B \Leftrightarrow m_g - m_h < m_p - m_a \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} < \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \sqrt{xy} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right) < \frac{x^2+y^2}{2} - xy \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2}\left[1 - \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right) \cdot \frac{1}{x+y}\right] > 0$$

[1] Profesor, Şcoala „Alecu Russo”, Iași

$$\overset{x \neq y}{\Leftrightarrow} 1 > \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy} \right) \cdot \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow x+y > \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy} \Leftrightarrow A > B \ .$$

Pentru a arăta că $A > B$, să observăm mai întâi că $m_p^2 + m_g^2 = 2m_a^2$, relație ce rezultă în urma unui calcul de rutină; deci $m_a = \sqrt{(m_p^2 + m_g^2)/2}$. Pe de altă parte, aplicând (1) numerelor m_p și m_g, avem că $\sqrt{(m_p^2 + m_g^2)/2} \geq (m_p + m_g)/2$, cu egalitate pentru $m_p = m_g \Leftrightarrow x = y$. Cum $x \neq y$, rezultă că $m_a > (m_p + m_g)/2$, adică $A > B$.

În continuare să aplicăm inegalitatea $\sqrt{xy} - x \leq y - \sqrt{xy}$ (echivalentă cu $m_g \leq m_a$) numerelor m_a și m.. Ținând seama de (3) rezultă că $m_p - m_a \leq m - m_p \Leftrightarrow B \leq D$, egalitatea fiind atinsă pentru cazul exceptat $x = y$.

În fine, inegalitatea $D < A$ rezultă din faptul că $A + C = B + D$ (relație echivalentă cu (2)) și $C < B$.

Observația 1. Rezultatul demonstrat generalizează unele probleme apărute în *Gazeta Matematică*. Astfel problemele

E: 11 997. *Dacă* $x, y > 0$, *demonstrați că* $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{4} + \frac{xy}{x+y}$.

Gh. Necşuleu şi Ion Necşuleu

E: 12 162. *Dacă* $x, y > 0$, *să se arate că* $x + y \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}$.

Claudiu-Ştefan Popa

sunt simple transcripții ale inegalităților $A > C$, respectiv $A > B$.

Observația 2. Se pot obține inegalități mai interesante, în care să apară mai multe dintre medii. Prezentăm un exemplu: adunând membru cu membru inegalitățile $A \geq B$, $A \geq C$ și $A \geq A$ obținem $3A \geq A + B + C \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \geq \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{2xy}{x+y} \right)$, inegalitate a cărei demonstrație directă este destul de laborioasă.

Observația 3. Relațiile (4) arată că oricum am alege trei dintre numerele A, B, C, D, ele pot constitui laturile unui triunghi (în cazul $x \neq y$).

Observația 4. Continuând ideea, aşezăm pe o axă numerele $C < B < D < A$ şi comparând lungimile intervalelor care apar, obținem noi inegalități în care apar mediile. În acest sens, problema:

E: 12 177. *Dacă* $x, y > 0$, *demonstrați că* $\frac{x+y}{4} + \frac{xy}{x+y} - \sqrt{xy} \leq \left| \frac{x-y}{2} \right|$.

Manuela Prajea

este banală, întrucât se reduce la $A - C \leq |x - y|$, inegalitate grosieră.