Unele şiruri monotone cu limita e sau e^{-1}

Gheorghe COSTOVICI [1]

În Propoziţiile care urmează, vom demonstra prin metode elementare monotonia unor şiruri cu limita e sau e^{-1}.

Propoziţia 1. *Şirul* $e_n(x) = (1 + \frac{1}{n+x})^n$ *este crescător,* $\forall x \geq 0$ *fixat.*

Demonstraţie. Din $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + ... + ab^{n-1} + b^n)$, în ipoteza $a > b \geq 0$, se obţine că $a^n[a - (a-b)(n+1)] < b^{n+1}$. Luând în această inegalitate $a = 1 + \frac{1}{n+x}$ şi $b = 1 + \frac{1}{n+1+x}$, găsim că $e_n(x)[1 + \frac{x}{(n+x)(n+x+1)}] < e_{n+1}(x)$, care atrage $e_n(x) < e_{n+1}(x)$, $\forall n \geq 1$, $\forall x \geq 0$ fixat.

Propoziţia 2. *Şirul* $a_n(x) = (1 + \frac{1}{n+x})^{n+1}$ *este descrescător,* $\forall x \in (-1,0]$ *fixat.*

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(t) = (1 + \frac{1}{t+x})^{t+1}$, cu $x \in (-1,0]$ arbitrar fixat. Avem $f'(t) = f(t)[\ln(1 + \frac{1}{t+x}) - \frac{t+1}{(t+x+1)(t+x)}]$, $t \geq 1$.

Folosind $\ln(1+y) < y$, $\forall y > 0$, rezultă $\ln(1 + \frac{1}{t+x}) - \frac{t+1}{(t+x+1)(t+x)} < \frac{1}{t+x} - \frac{t+1}{(t+x+1)(t+x)} = \frac{x}{(t+x+1)(t+x)} \leq 0$, adică $f'(t) < 0, \forall t \geq 1$ şi deci f este descrescătoare. Atunci $f(n) > f(n+1)$, i.e. $a_n(x) > a_{n+1}(x)$, $\forall n \geq 1$, ceea ce încheie demonstraţia.

Propoziţia 3. *Şirul* $b_n(x) = (1 - \frac{1}{n+x})^n$ *este descrescător,* $\forall x \geq 1$ *fixat.*

Demonstraţie. Observăm că $b_n(x) = (1 - \frac{1}{n+x})^n = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n+x-1})^n} = \frac{1}{e_n(x-1)}$, $\forall n \geq 1$. Şirul $e_n(x-1)$ este crescător pentru $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ şi are termeni pozitivi, deci $b_n(x)$ este descrescător pentru orice $x \geq 1$ fixat.

Propoziţia 4. *Şirul* $c_n(x) = (1 - \frac{1}{n+x})^{n+1}$ *este crescător,* $\forall x \in (0,1]$.

Demonstraţie. Observăm că

---

[1] Conf. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iași

$$c_n(x) = (1 - \frac{1}{n+x})^{n+1} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n+x-1})^{n+1}} = \frac{1}{a_n(x-1)},\ \forall n \ge 1 .$$

Conform cu Propoziția 2, șirul $a_n(x-1)$ este descrescător pentru $x-1 \in (-1,0] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in (0,1]$ și are termenii pozitivi, deci $c_n(x)$ este crescător pentru $x \in (0,1]$.

Propoziția 5. *Șirul* $E_n(p) = (1+\frac{1}{n})^{n+p}$ *este descrescător,* $\forall p \in \mathbf{N}^*$.

Demonstrație. Din identitatea

$$a^{n+p} - b^{n+p} = (a-b)(a^{n+p-1} + a^{n+p-2}b + ... + ab^{n+p-2} + b^{n+p-1}),\quad a > b > 0,$$

rezultă $a^{n+p} - b^{n+p} > (a-b)(n+p)b^{n+p-1}$. Punând aici $a = 1+\frac{1}{n}$ și $b = 1+\frac{1}{n+1}$, se obține $(1+\frac{1}{n})^{n+p} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+p}(1+\frac{n+p}{n(n+2)})$ pentru $n \ge 1$ și p fixat. Ținând seama că $1+\frac{n+p}{n(n+2)} > 1+\frac{1}{n+1}$, va rezulta $(1+\frac{1}{n})^{n+p} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+1+p} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow E_n(p) > E_{n+1}(p)$, ceea ce încheie demonstrația.

Propoziția 6. *Șirul* $E_n(x) = (1+\frac{1}{n})^{n+x}$ *este descrescător,* $\forall x \ge 1$ *fixat.*

Demonstrație. Se consideră funcția $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(t) = (1+\frac{1}{t})^{t+x}$, unde $x \ge 1$ fixat. Atunci $f'(t) = f(t)[\ln(1+\frac{1}{t}) - \frac{t+x}{t(t+1)}]$ și folosind inegalitatea $\ln(1+y) < y$ pentru $y \ge 0$, avem $\ln(1+\frac{1}{t}) - \frac{t+x}{t(t+1)} < \frac{1}{t} - \frac{t+x}{t(t+1)} = \frac{1-x}{t(t+1)}$, de unde $f'(t) < 0$ și deci f este descrescătoare pentru $t \ge 1$. Avem $f(n) > f(n+1) \Leftrightarrow E_n(x) > E_{n+1}(x)$ pentru $n \ge 1$, ceea ce încheie demonstrația.

Observație. Propoziția 5 este un caz particular al Propoziției 6, având însă o demonstrație elementară.

Propoziția 7. *Șirul* $u_n(x) = (1-\frac{1}{n})^{n+x}$ *este crescător,* $\forall x \ge 0$ *fixat.*

Demonstrație. Putem scrie $u_{n+1}(x) = (1-\frac{1}{n+1})^{n+1+x} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+x+1}} = \frac{1}{E_n(x+1)}$.

Conform Propoziției 6, șirul $E_n(x+1)$ este descrescător pentru $x+1 \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 0$ și are termenii pozitivi. Rezultă ca șirul $u_{n+1}(x)$ este crescător, adică $u_2(x) < u_3(x) < ... < u_n(x) < ...$. Dar $u_1(x) = 0$, deci avem și $u_1(x) < u_2(x)$, ceea ce încheie demonstrația.

Propoziția 8. *Şirul* $v_n(x) = (1 - \frac{1}{n+1})^{n+x}$ *este descrescător,* $\forall x \le 0$ *fixat.*

Demonstrație. Se consideră funcția $g:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $g(t) = (1 - \frac{1}{t+1})^{t+x}$, unde $x \le 0$ fixat. Avem $g'(t) = g(t)[\ln(1 - \frac{1}{t+1}) + \frac{t+x}{t(t+1)}]$ şi folosind inegalitatea $\ln(1-y) < -y, \forall\, 0 < y < 1$, găsim $\ln(1 - \frac{1}{t+1}) + \frac{t+x}{t(t+1)} < -\frac{1}{t+1} + \frac{t+x}{t(t+1)} = \frac{x}{t(t+1)} \le 0$ pentru $t \in (0,\infty)$. Deci $g'(t) < 0$, $\forall t \in (0,\infty)$, adică g este descrescătoare pe $(0,\infty)$. Vom avea $g(n) > g(n+1) \Leftrightarrow v_n(x) > v_{n+1}(x)$, $\forall n \ge 1$, ceea ce încheie demonstrația.

Propoziția 9. *Şirul* $v_n(x) = (1 - \frac{1}{n+1})^{n+x}$ *este crescător,* $\forall x \ge 1$ *fixat.*

Demonstrație. Avem $v_n(x) = (1 - \frac{1}{n+1})^{n+x} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+x}} = \frac{1}{E_n(x)}$, $\forall n \ge 1$.

Conform Propoziției 6, şirul $E_n(x)$ este descrescător pentru $x \ge 1$ şi are termenii pozitivi, deci $v_n(x)$ este crescător, $\forall x \ge 1$ fixat.

Observații. În demonstrația Propoziției 1, ne-am inspirat din [**1**;p. 24-25]. Relativ la şirul $E_n(x)$, în [**2**; p. 223-224] se arată pe cale neelementară că este descrescător pentru $x \ge \frac{1}{2}$ şi crescător pentru $x < \frac{1}{2}$. In [**3**; p. 13-14] se arată pe cale elementară ca şirul $E_n(\frac{1}{2})$ este descrescător. Şirurile studiate în Nota de față au aplicație în studiul unor serii de funcții.

Bibliografie

1. Fr. Junker – *Höhere Analysis I,* 1920.
2. G. Klambauer – *Problems and Propositions in Analysis*, New York, 1979.
3. A. Vernescu – *Şiruri de numere reale,* Bucureşti, 2000.