Generalizarea teoremei de omologie a lui Barbilian

Constantin COCEA [1]

Strălucitul matematician Dan Barbilian a demonstrat că două triunghiuri echilaterale, de acelaşi centru, sunt triomoloage. Vom extinde în cele ce urmează acest rezultat. Are loc următoarea

Teoremă. *Fie ABC un triunghi cu centrul cercului înscris I;* A_1, B_1, C_1 *punctele de contact ale cercului înscris cu laturile, iar* $A_2B_2C_2$ *un triunghi având centrul cercului circumscris în I şi invers asemenea cu* $A_1B_1C_1$. *Atunci dreptele* AA_2, BB_2, CC_2 *sunt concurente (adică triunghiurile* ABC *şi* $A_2B_2C_2$ *sunt omologice)*

Demonstraţie. Fie *0, a, b, c* afixele punctelor I, A, B, C, iar $\mathcal{C}$ *(I,1)* cercul înscris de rază unitate. Atunci:

$$|a_1| = |b_1| = |c_1| = 1 \tag{1}$$

Triunghiul $A_2B_2C_2$ fiind invers asemenea cu $A_1B_1C_1$, cu centrul cercului circumscris I, rezultă că există $\lambda \in \mathbf{C}$ încât

$$a_2 = \lambda\overline{a_1}, b_2 = \lambda\overline{b_1}, \; c_2 = \lambda\overline{c_1} \tag{2}$$

În loc să demonstrăm concurenţa dreptelor AA_2, BB_2, CC_2, vom demonstra (având în vedere *teorema lui Desargues*) că punctele $\{\alpha\} = BC \cap B_2C_2$, $\{\beta\} = CA \cap C_2A_2$ şi $\{\gamma\} = AB \cap A_2B_2$ sunt coliniare.

Panta complexă a dreeptei IA_1 este $k_{IA_1} = \dfrac{a_1}{\overline{a_1}}$. Cum BC este tangentă cercului înscris, rezultă că ecuaţia lui BC este

$$(BC) \quad z - a_1 = -\frac{a_1}{\overline{a_1}}\left(\overline{z} - \overline{a_1}\right) \quad \text{sau} \quad z\,\overline{a_1} + \overline{z}a_1 - 2 = 0\,. \tag{3}$$

Se ştie că raportul în care o dreaptă de ecuaţie $\alpha z + \beta\overline{z} + \gamma = 0$ împarte un segment (BC), afixele lui B şi C fiind b respectiv c, este

$$R = \left|\frac{\alpha\, b + \beta\overline{b} + \gamma}{\alpha c + \beta\overline{c} + \gamma}\right|.$$

Prin urmare, ţinând seama de (2) şi (3), avem :

$$\frac{\overline{\alpha B_2}}{\overline{\alpha C_2}} = \left|\frac{\lambda\overline{b_1}\,\overline{a_1} + \overline{\lambda}b_1a_1 - 2}{\lambda\overline{c_1}\,\overline{a_1} + \overline{\lambda}c_1a_1 - 2}\right|. \tag{4}$$

Având în vedere expresiile analoage cu (4) ale rapoartelor $\dfrac{\overline{\beta C_2}}{\overline{\beta A_2}}$ şi $\dfrac{\overline{\gamma A_2}}{\overline{\gamma B_2}}$, obţinem:

[1] Profesor , Liceul Teoretic "D.Cantemir", Iaşi

$$\frac{\overline{\alpha B_2}}{\alpha C_2}\cdot\frac{\overline{\beta C_2}}{\beta A_2}\cdot\frac{\overline{\gamma A_2}}{\gamma B_2}=1$$

ceea ce probează coliniaritatea punctelor α, β, γ, deci triunghiurile *ABC* şi $A_2B_2C_2$ sunt omologice.

Observație. Dacă *ABC* este echilateral , *I* este centrul comun al triunghiurilor *ABC* şi $A_1B_1C_1$ şi se obține:

Teorema lui BARBILIAN. *Două triunghiuri echilaterale de acelaşi centru, ABC şi* $A_2B_2C_2$ *, sunt în trei moduri omologice:*

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B_2 & C_2 & A_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ C_2 & A_2 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Demonstrația decurge din teorema anterioară, deoarece două triunghiuri echilaterale sunt în trei moduri invers asemenea.

Observație. Teorema se poate extinde şi astfel:

Teoremă. *Fie ABC un triunghi cu* I_a *centrul cercului exînscris corespunzător laturii BC, iar* A_1, B_1, C_1 *punctele de contact ale acestui cerc exînscris cu laturile BC, CA respectiv AB. Fie* $A_2B_2C_2$ *un triunghi invers asemenea cu triunghiul* $A_1B_1C_1$ *având centrul cercului circumscris în* I_a. *Atunci triunghiurile ABC si* $A_2B_2C_2$ *sunt omologice*.

Consecința 1. *Fie ABC un triunghi, iar* A_1, B_1, C_1 *punctele de contact ale cercului înscris* $\mathcal{C}$ *(I,r) cu laturile. Paralelele prin* B_1 *şi* C_1 *la BC retaie cercul* $\mathcal{C}$ *în* B_2, C_2. *Să se arate că dreptele* AA_1, BB_2, CC_2 *sunt concurente.*

Demonstrație. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ au acelaşi centru al cercului circumscris (punctul *I*) şi sunt invers egale, deci invers asemenea.

Consecința 2. *Fie ABC un triunghi, iar* A_1, B_1, C_1 *punctele de contact ale cercului înscris* $\mathcal{C}$ *(I,r) cu laturile. Notăm cu* A_2, B_2, C_2 *simetricele punctelor* A_1, B_1, C_1 *față de un diametru oarecare al cercului* $\mathcal{C}$. *Atunci dreptele* AA_2, BB_2, CC_2 *sunt concurente.*

Demonstrație. Centrul cercului circumscris triunghiului $A_2B_2C_2$ este *I*, iar triunghiurile $A_2B_2C_2$ şi $A_1B_1C_1$ sunt invers egale, deci invers asemenea.

Bibliografie

1. **D. Barbilian** - **I. Barbu -** *Pagini inedite,* Editura Albatros, Bucureşti, 1981.
2. **C. Cocea** - *Proprietăți remarcabile ale triunghiurilor invers asemenea,* Să înțelegem matematica, Bacău, 1992.
3. **C. Cocea** - *Teoreme de triortologie şi triparalelogie,* 1992.
4. **P. S. Modenov** - *Probleme de geometrie ,* Editura "Nauka", Moscova, 1979.
5. **N. Mihăileanu** - *Utilizarea numerelor complexe în geometrie,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1968.