Un criteriu de concurență a dreptelor

Temistocle BÎRSAN [1]

În revista *Recreații Științifice, IV (1886), pag. 48*, este enunțată următoarea

Problemă. *În orice triunghi, dreptele ce unesc picioarele înălțimilor corespunzătoare la două laturi, picioarele bisectorelor alăturate cu înălțimile și picioarele perpendicularelor duse din centrul cercului înscris pe cele două laturi trec prin același punct.*

În același volum, la pag. 118, este prezentată o soluție sintetică a problemei, dată de *N.Gr. Bălănescu*, elev la Școala de Poduri și Șosele din Paris.

Începem prezenta notă cu un *criteriu de concurență* a trei drepte determinate de punctele lor de intersecție cu două dintre laturile unui triunghi. Cu ajutorul acestuia vom da apoi o soluție „tehnică“ problemei de mai sus.

Fie un triunghi *ABC* și dreptele d_1, d_2 și d_3 ce intersectează în *M*, *P* și respectiv *R* dreapta *AB* și în *N*, *Q* și respectiv *S* dreapta *AC*. Considerăm că pozițiile acestor puncte sunt determinate de rapoartele următoare:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = m\,,\quad \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = n\,;\qquad \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = p\,,\quad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = q\,;\qquad \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = r\,,\quad \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = s\,. \tag{1}$$

Menționăm că aceste puncte au poziții oarecare pe dreptele *AB* și *AC*, dar că, în cele ce urmează, *vom exclude tacit anumite cazuri triviale*, cum ar fi: două dintre drepte sunt paralele sau coincid, cele trei drepte sunt concurente într-un punct situat pe *AB* sau *AC*, una dintre drepte trece prin vârful *A* etc.

Propoziția 1. *Dreptele d_1, d_2 și d_3 determinate de numerele m,n,p,q,r,s date de (1) sunt concurente dacă și numai dacă aceste numere îndeplinesc condiția*

$$(ps - rq) + (rn - ms) + (mq - pn) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ n & q & s \end{vmatrix} = 0\,. \tag{2}$$

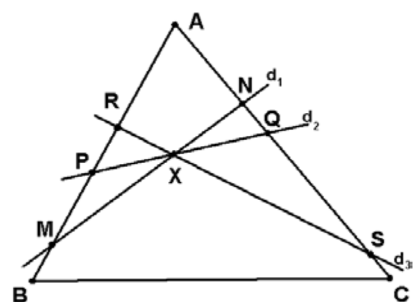
Demonstrație. Din (1) obținem ușor relațiile:

$$\overline{MA} = \frac{1}{m-1}\overline{AB}\,,\quad \overline{MB} = \frac{m}{m-1}\overline{AB}\,;\quad \overline{NA} = \frac{1}{n-1}\overline{AC}\,,\quad \overline{NB} = \frac{n}{n-1}\overline{AC} \quad \text{și analoagele.} \tag{3}$$

Fie $\{X\} = d_1 \cap d_2$ și $\{X'\} = d_1 \cap d_3$. Utilizând teorema lui Menelaus relativ la ΔAMN și transversalele *PQ* și *RS* și ținând seama de (3), avem: d_1, d_2, d_3 concurente $\Leftrightarrow$ X și X' coincid

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{XM}}{\overline{XN}} = \frac{\overline{X'M}}{\overline{X'N}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PM}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QN}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{SN}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{PB} - \overline{MB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QA} - \overline{NA}} = \frac{\overline{RB} - \overline{MB}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{SA} - \overline{NA}} \Leftrightarrow$$



[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică „Gh. Asachi”, Iași

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{p}{p-1}-\frac{m}{m-1}}{\frac{1}{p-1}}\cdot\frac{\frac{1}{q-1}}{\frac{1}{q-1}-\frac{1}{n-1}}=\frac{\frac{r}{r-1}-\frac{m}{m-1}}{\frac{1}{r-1}}\cdot\frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{n-1}}\Leftrightarrow (ps-rq)+(rn-ms)+(mq-pn)=0.$$

Soluția Problemei. Fie d_1, d_2, d_3 dreptele ce unesc picioarele înălțimilor, picioarele bisectoarelor şi, respectiv, punctele de contact ale cercului înscris (puncte pe dreptele AB şi AC). Atunci $m=-\frac{a\cos B}{b\cos A}, n=-\frac{a\cos C}{c\cos A}$; $p=-\frac{a}{b}$, $q=-\frac{a}{c}$; $r=-\frac{p-b}{p-a}, s=-\frac{p-c}{p-a}$ şi condiția (2) se verifică prin calcul direct.

Observație. Fie A_0 punctul de concurență a dreptelor din problemă şi B_0, C_0 punctele analoage acestuia. Vom arăta într-o notă următoare că AA_0, BB_0, CC_0 sunt concurente.

În particular, dacă M coincide cu B şi S coincide cu C (i.e. m=s=0), vom obține:

Propoziția 2. *Fie ABC un triunghi oarecare. Dreapta PQ trece prin punctul de intersecție a cevienelor BN şi CR dacă şi numai dacă numerele p,q,n,r definite ca în (1) satisfac condița*

$$\frac{p}{r}+\frac{q}{n}=1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1&1&1\\0&p&r\\n&q&0\end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

Observație. Acest ultim rezultat este cunoscut ([3, Teorema 3], [2, Teorema 1 – o formă diferită a condiției] etc.). În locurile citate (cât şi în alte locuri!) sunt indicate condițiile în care dreapta PQ trece prin diferite puncte remarcabile ale triunghiului:

$G(r=n=-1)$, $I(r=-\frac{a}{b}, n=-\frac{a}{c})$, $H(-\frac{a\cos B}{b\cos A},-\frac{a\cos C}{c\cos A})$, $O(-\frac{\sin 2A}{\sin 2B},-\frac{\sin 2A}{\sin 2C})$,

$K(-\frac{a^2}{b^2},-\frac{a^2}{c^2})$, $\Gamma(-\frac{p-b}{p-a},-\frac{p-c}{p-a})$, $N(-\frac{p-a}{p-b},-\frac{p-a}{p-c})$, unde K, Γ, N sunt punctele lui *Lemoine*, *Gergonne* şi respectiv *Nagel*. Se obțin rezultatele:

1. $G\in PQ \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-1$,

2. $H\in PQ \Leftrightarrow tgB\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+tgC\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-tgA$,

3. $I\in PQ \Leftrightarrow b\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+c\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-a$,

4. $O\in PQ \Leftrightarrow \sin 2B\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+\sin 2C\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-\sin 2A$

5. $K\in PQ \Leftrightarrow b^2\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+c^2\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-a^2$,

6. $\Gamma\in PQ \Leftrightarrow \frac{1}{p-b}\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+\frac{1}{p-c}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-\frac{1}{p-a}$

7. $N\in PQ \Leftrightarrow (p-b)\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}+(p-c)\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=-(p-a)$ etc.

Foarte adesea aceste condiții sunt date pentru cazul restrictiv când $P\in(AB)$ şi $Q\in(AC)$, fapt care justifică renunțarea la lucrul cu segmente orientate.

Bibliografie

1. *Colecția revistei „Recreații ştiințifice“ (1883-1886).*

2. C. Chiser – *Condiții necesare şi suficiente ca o dreaptă să treacă prin puncte importante dintr-un triunghi*, G.M. – 9/2000.

3. N. Oprea – *Un punct şi o dreaptă remarcabilă din planul unui triunghi*, G.M. – 11/1996.