Asupra problemelor IX.12 şi X.11, RECREAŢII MATEMATICE - 2 / 2000

Gabriel Popa[1]

Pornim de la următoarele probleme propuse spre rezolvare în *Recreaţii matematice* nr. 2/2000 (pe care le prezentăm cu enunţuri uşor modificate):

Problema IX.12 (D. Popescu). *Date funcţiile* $f : A \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to A$ *injective, să se determine* $a \in \mathbf{R}$ *ştiind că funcţia* $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(g(x)) + f(g(ax))$, $\forall x \in \mathbf{R}$, *este constantă.*

Problema X.11 (Gh. Croitoru). *Demonstraţi că nu există funcţii injective* $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ *astfel încât* $f(a^x) + f(b^x) = ab, \forall x \in \mathbf{R}$, *unde* $a, b \in (0,1) \cup (1, \infty)$ *şi* $ab \neq 1$.

Soluţia problemei IX.12. Cum h este constantă, avem că $h(x) = h(ax)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, de unde $f(g(x)) + f(g(ax)) = f(g(ax)) + f(g(a^2x)), \forall x \in \mathbf{R}$, adică $f(g(x)) = f(g(a^2x))$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Cum f şi g sunt injective, tot astfel este şi funcţia $f \circ g$, deci $x = a^2x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Rezultă că $a^2 = 1$, deci $a \in \{1, -1\}$. Însă $a = 1$ nu convine, căci am avea $h(x) = 2f(g(x)) = k \Rightarrow f \circ g = const.$, adică prin compunerea a două funcţii injective s-ar obţine o funcţie neinjectivă, absurd!. Rămâne $a = -1$. ■

Soluţia problemei X.11. Considerând în **IX.12** drept funcţie g funcţia exponenţială, $g : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $g(x) = a^x$ şi observând că $b^x = a^{x \log_a b} = g(x \log_a b)$, condiţia problemei se scrie echivalent: $h(x) = f(g(x)) + f(g(x \log_a b)) = ab = const.$, cu $\log_a b \neq -1$. Conform celor demonstrate, acest fapt nu este posibil în ipoteza că f este injectivă. ■

Apare naturală întrebarea:

Problemă. *Există funcţii* f, g *ca în* **IX.12** *astfel încât funcţia*

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \; h(x) = f(g(x)) + f(g(-x)) \tag{1}$$

să fie constantă? În particular, există funcţii injective $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ *astfel încât* $f(a^x) + f\left(\frac{1}{a^x}\right) = 1$?

Soluţie. Răspunsul este afirmativ. Considerăm că g este o funcţie injectivă dată şi $A = \operatorname{Im} g$. Pentru orice $k \in \mathbf{R}$, luăm $f : A \to \mathbf{R}$, $f(x) = g^{-1}(x) + \frac{k}{2}$, obţinem că f este injectivă, iar $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este dată de:

[1] Profesor, Liceul "Ştefan Procopiu", Iaşi

$$h(x)=f(g(x))+f(g(-x))=g^{-1}(g(x))+\frac{k}{2}+g^{-1}(g(-x))+\frac{k}{2}=x-x+k=k,\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

Relativ la cazul particular specificat, considerăm $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log_a x+\frac{1}{2}$, funcţie injectivă, şi avem:

$$h(x)=f(a^x)+f\left(\frac{1}{a^x}\right)=\log_a a^x+\frac{1}{2}+\log_a\frac{1}{a^x}+\frac{1}{2}=x-x+1=1,\ \forall x\in\mathbf{R}.\ \blacksquare$$

Pentru o aceeaşi funcţie g pot fi găsite şi alte funcţii f astfel încât h dată de (1) să fie constantă. Mai mult, acest lucru se poate demonstra şi pentru alte clase de funcţii g, nu neapărat injective.

Problemă. *Dată funcţia $g:\mathbf{R}\to A$ cu proprietatea că există $\varphi:A\to A$ astfel încât $\varphi\circ\varphi=\mathrm{id}_A$ şi $g(-x)=\varphi(g(x))$, $\forall x\in\mathbf{R}$, şi dat numărul real k, să se arate că există o funcţie $f:A\to\mathbf{R}$ astfel încât funcţia h dată de (1) este constantă k.*

Soluţie. Deoarece $\varphi\circ\varphi=\mathrm{id}_A$, funcţia φ este inversabilă şi coincide cu inversa sa. Construim $f:A\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-\varphi^{-1}(x)+\frac{k}{2}$. Atunci

$$\begin{aligned}h(x)&=f(g(x))+f(g(-x))=\\&=g(x)-\varphi^{-1}(g(x))+\frac{k}{2}+g(-x)-\varphi^{-1}(g(-x))+\frac{k}{2}=\\&=g(x)-\varphi^{-1}(g(x))+\varphi(g(x))-\varphi^{-1}(\varphi(g(x)))+k=\\&=g(x)-\varphi(g(x))+\varphi(g(x))-g(x)+k=k,\ \forall x\in\mathbf{R}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Cazuri particulare.

1) Dacă g este o funcţie impară, atunci este îndeplinită ipoteza problemei precedente cu $\varphi(x)=-x$, deci putem considera $f(x)=2x+\frac{k}{2}$.

2) Dacă g este funcţie exponenţială, $g:\mathbf{R}\to(0,\infty)$, $g(x)=a^x$, atunci $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ şi putem considera $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)==x-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$. Deoarece $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$, avem că f este crescătoare, în particular injectivă, iar $h(x)=f(a^x)+f\left(\frac{1}{a^x}\right)=1$.