Calculul limitei unor şiruri

Andrei NEDELCU[1]

La Olimpiada de Matematică, 1999, faza judeţeană, *C. Mortici* propune limitele următoare:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin\frac{k}{n}\sin\frac{\sqrt{k}}{n}\qquad \text{(Braşov)}, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cos\frac{k}{n}}{1-\cos\frac{\sqrt{k}}{n}}\qquad \text{(Constanţa)}. \tag{2}$$

Scopul nostru este de a prezenta în mod unitar calculul limitei unor şiruri cu termenul general de forma

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})\cdot y_{nk},\qquad n\in\mathbf{N}^*, \tag{3}$$

unde $(x_{nk})_{n\in\mathbf{N}^*,k=\overline{1,n}}$ şi $(y_{nk})_{n\in\mathbf{N}^*,k=\overline{1,n}}$ sunt matrice triunghiulare infinite iar $f:J\to\mathbf{R}$ este o funcţie ($J=I$ (interval) sau $J=I-\{0\}$ şi $x=0$ este punct de acumulare pentru J).

Teoremă. *Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

(**i**) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\alpha\in\mathbf{R}$;

(**ii**) *elementele matricei triunghiulare* (x_{nk}) *sunt nenule şi* $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N_\varepsilon$, $N_\varepsilon\in\mathbf{N}^*$, *astfel încât să avem* $|x_{nk}|<\varepsilon$ *pentru orice* $n\geq N$ *şi orice* $k=\overline{1,n}$;

(**iii**) *elementele matricei triunghiulare* (y_{nk}) *sunt strict pozitive şi* $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\beta$,

unde $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}y_{nk}$, $n\in\mathbf{N}^*$,

atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *definit prin (3) este convergent şi* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha\beta$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon>0$ dat. Din (**iii**) rezultă că şirul $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este mărginit, deci $\exists M>0$ astfel ca $0<S_n\leq M$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$. Din (**i**) rezultă că $\exists\delta=\delta(x)>0$ încât $|f(x)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$, $\forall x\in J$ cu $|x|<\delta$. Conform condiţiei (**ii**), $\exists N=N_\delta\in\mathbf{N}^*$ astfel încât $|x_{nk}|<\delta$, $\forall n\geq N$ şi $\forall k=\overline{1,n}$. Ca urmare, avem $|f(x_{nk})-\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$, $\forall n\geq N$ şi $\forall k=\overline{1,n}$, adică

$$\alpha-\frac{\varepsilon}{M}<f(x_{nk})<\alpha+\frac{\varepsilon}{M},\quad \forall n\geq N,\ k=\overline{1,n}.$$

Înmulţind aceste inegalităţi cu y_{nk} şi sumând după $k=\overline{1,n}$, obţinem

$$\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{M}\right)S_n<a_n<\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{M}\right)S_n,\ \forall n\geq N,\quad \text{adică}$$

[1] Profesor, Liceul "C. Negruzzi", Iaşi

$$|a_n - \alpha S_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot S_n \le \varepsilon, \ \forall n \ge N.$$

De aici şi din faptul că $\alpha S_n \xrightarrow[n]{} \alpha\beta$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha\beta$, q.e.d.

Aplicaţii. 1) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{n+k}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Scriem sub forma: $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin \frac{1}{n+k}}{\frac{1}{n+k}} \cdot \dfrac{1}{n+k}$. Considerăm funcţia $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$, pentru care avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, şi matricele triunghiulare (x_{nk}), (y_{nk}) cu $x_{nk} = y_{nk} = \dfrac{1}{n+k}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $k = \overline{1,n}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}\right) = \ln 2$. Condiţiile (**i**) - (**iii**) fiind îndeplinite, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

2) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \sin^2 \frac{k}{2n^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Scriem $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\sin \frac{k}{2n^2}}{\frac{k}{2n^2}}\right) \cdot \dfrac{k^3}{4n^4}$. Luăm $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$, $x \in \mathbf{R}^*$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^3}{4n^4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4n^4} \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{16}$.

3) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(2^{\frac{k}{n^2}} - 1\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Scriem $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^{\frac{k}{n^2}} - 1}{\frac{k}{n^2}} \cdot \dfrac{k}{n^2}$. Luăm $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$. Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$ şi celelalte ipoteze sunt îndeplinite, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2} \ln 2$.

4) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sin \dfrac{k}{n} \cdot \sin \dfrac{\sqrt{k}}{n}$ — limita (**1**).

Punem a_n sub forma $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin \frac{\sqrt{k}}{n}}{\frac{\sqrt{k}}{n}} \cdot \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{k}{n}$ şi luăm $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$, $x_{nk} = \dfrac{\sqrt{k}}{n}$ şi $y_{nk} = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{k}{n}$ $(n \in \mathbf{N}^*,\ k = \overline{1,n})$. Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin\frac{k}{n} = \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1. \text{ Deci } \lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \cos 1.$$

5) $a_n = \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k \cos \frac{k}{n}}{1 - \cos \frac{\sqrt{k}}{n}},\ n \in \mathbf{N}^*$ — limita (**2**).

Avem $a_n = 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\frac{\sqrt{k}}{2n}}{\sin \frac{\sqrt{k}}{2n}} \right)^2 \cdot \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{k}{n}$. Se va obţine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sin 1$.

Observaţie. Nu trebuie omisă verificarea ipotezei (**ii**). Neîndeplinirea acesteia poate conduce la rezultate greşite, aşa cum arată următorul

Exemplu. $a_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \dfrac{k}{n},\ n \in \mathbf{N}^*$.

Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \displaystyle\int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1$. Pe de altă parte, dacă scriem $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin \frac{k}{n}}{\frac{k}{n}} \cdot \dfrac{k}{n^2}$, luăm $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$, $x_{nk} = \dfrac{k}{n}$, $y_{nk} = \dfrac{k}{n^2}$, observăm că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} = \dfrac{1}{2}$, dar nu observăm că (**ii**) nu are loc, atunci prin aplicarea teoremei am obţine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$ (fals!).

Exerciţii propuse. *Să se calculeze limitele şirurilor* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *date mai jos:*

1. $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$,

2. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[p]{1 + \frac{1}{n+k}} - 1 \right)$, $p \geq 2$,

3. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[p]{1 + \frac{k^{p-1}}{n^p}} - 1 \right)$, $p \geq 2$,

4. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{n\pi}{n^2 + k^2}$,

5. $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{n^2 + k}{n^2 - k}$,

6. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \mathrm{tg}^2 \frac{ka}{n}$,

7. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sin^p \frac{k^\beta}{n^q}$, $p, q, \alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$, $p(q - \beta) = \alpha + 1$.