Caracterizări ale triunghiurilor dreptunghice şi λ–triunghiurilor

Mircea CRÂŞMĂREANU[1] *şi Dan PLĂEŞU*[2]

În [5] sunt prezentate câteva caracterizări pentru triunghiurile dreptunghice utilizând următorul rezultat:

Pentru orice triplet (x, y, z) de numere reale pozitive au loc echivalenţele:

$$x^2 + z^2 = 2y^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{z+x}, \tag{1}$$

$$x^2 + z^2 = 2y^2 \Longleftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} = \frac{2y}{z+x}. \tag{1'}$$

(reformulare a *Problemei 23* [4, p. 81]).

Acest rezultat este utilizat şi în prezenta notă pentru a obţine noi caracterizări pentru triunghiurile dreptunghice, anume, în funcţie de mediane, bisectoare şi înălţimi, cât şi pentru a caracteriza λ–triunghiurile (definite mai jos!).

I. Caracterizări ale triunghiului dreptunghic. În [5] sunt caracterizate triunghiurile dreptunghice în funcţie de laturi. Vom antrena şi alte elemente ale triunghiului.

I$_1$. Caracterizări în funcţie de mediane.

Lema 1. *Are loc echivalenţa:*

$$m(\hat{A}) = 90^\circ \Leftrightarrow m_b^2 + m_c^2 = \frac{5}{4}a^2. \tag{2}$$

Demonstraţie. Folosind expresia medianelor avem:

$$m_b^2 + m_c^2 - \frac{5}{4}a^2 = \frac{1}{4}\left[2\left(c^2 + a^2\right) - b^2 + 2\left(a^2 + b^2\right) - c^2 - 5a^2\right] = \frac{1}{4}\left[b^2 + c^2 - a^2\right].$$

Prin urmare, luând $x = m_b, y = \frac{\sqrt{10}}{4}a, z = m_c$ obţinem:

Propoziţia 1. *Fiecare din relaţiile următoare este echivalentă cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$:*

$$\frac{1}{4m_c + \sqrt{10}a} + \frac{1}{4m_b + \sqrt{10}a} = \frac{1}{2\left(m_b + m_c\right)}, \tag{3}$$

$$\frac{m_b}{2\sqrt{10}m_c + 5a} + \frac{m_c}{2\sqrt{10}m_b + 5a} = \frac{a}{4\left(m_b + m_c\right)}. \tag{3'}$$

I$_2$. Caracterizări în funcţie de bisectoare.

Lema 2. *Fie $D \in BC$ piciorul bisectoarei interioare i_a din vârful A. Atunci:*

$$m(\hat{A}) = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{2}{i_a^2}. \tag{4}$$

Demonstraţie. Reamintim formulele uzuale:

$$BD = \frac{ac}{b+c}, \; CD = \frac{ab}{b+c}, \qquad i_a^2 = \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2}.$$

---

[1] Lector dr., Facultatea de Matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

[2] Profesor, Şcoala Normală "Vasile Lupu", Iaşi

Deci avem:

$$\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{CD^2}-\frac{2}{i_a^2}=\frac{(b+c)^2}{a^2c^2}+\frac{(b+c)^2}{a^2b^2}-\frac{2(b+c)^2}{bc\left[(b+c)^2-a^2\right]}=$$

$$=\frac{(b+c)^2}{a^2b^2c^2}\left[b^2+c^2-\frac{2a^2bc}{(b+c)^2-a^2}\right]=\frac{(b+c)^4\left(b^2+c^2-a^2\right)}{a^2b^2c^2\left[(b+c)^2-a^2\right]}.\ \blacksquare$$

Considerând $x=\frac{1}{BD}, y=\frac{1}{i_a}, z=\frac{1}{CD},$ obţinem:

Propoziţia 2. *Fiecare din relaţiile următoare este echivalentă cu* $m(\hat{A})=90^\circ$:

$$\frac{1}{CD\left(i_a+BD\right)}+\frac{1}{BD\left(i_a+CD\right)}=\frac{2}{a\cdot i_a}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{CD^2\left(i_a+BD\right)}+\frac{1}{BD^2\left(i_a+CD\right)}=\frac{2}{a\cdot i_a^2}. \tag{5'}$$

I$_3$. Caracterizări în funcţie de înălţime.

Lema 3. (*ex. 2+4* [**2**, p. 22]). *Dacă h_a este înălţimea din A, atunci:*

$$m(\hat{A})=90^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h_a^2}\Leftrightarrow \frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}=\frac{1}{h_a^2}. \tag{6}$$

Luând $x=\frac{1}{b}, y=\frac{1}{\sqrt{2}h_a}, z=\frac{1}{c}$ şi apoi $x=\frac{1}{h_b}, y=\frac{1}{\sqrt{2}h_a}, z=\frac{1}{h_c}$, obţinem:

Propoziţia 3. *Fiecare din relaţiile următoare este echivalentă cu* $m(\hat{A})=90^\circ$:

$$\frac{1}{b\left(c+\sqrt{2}h_a\right)}+\frac{1}{c\left(b+\sqrt{2}h_a\right)}=\frac{\sqrt{2}}{h_a(b+c)}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{b^2\left(c+\sqrt{2}h_a\right)}+\frac{1}{c^2\left(b+\sqrt{2}h_a\right)}=\frac{1}{h_a^2(b+c)}, \tag{7'}$$

$$\frac{1}{h_b\left(h_c+\sqrt{2}h_a\right)}+\frac{1}{h_c\left(h_b+\sqrt{2}h_a\right)}=\frac{\sqrt{2}}{h_a(h_b+h_c)}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{h_b^2\left(h_c+\sqrt{2}h_a\right)}+\frac{1}{h_c^2\left(h_b+\sqrt{2}h_a\right)}=\frac{1}{h_a^2(h_b+h_c)}. \tag{8'}$$

II. Caracterizări ale λ-triunghiurilor Denumirea de λ-*triunghi* ne aparţine şi o introducem prin

Definiţie. *Dat λ un număr real strict pozitiv, se numeşte $\lambda-$triunghi orice triunghi ce satisface condiţia*

$$b^2+c^2=\lambda a^2. \tag{9}$$

Cazuri particulare de λ-triunghiuri au fost studiate cu mult timp înainte. Despre această clasă de triunghiuri se pot consulta [**6**, p. 161] şi, recent, [**1**, pp.151 - 156], unde sunt numite *triunghiuri de tip* $H(\lambda)$. Clase particulare de λ-triunghiuri ([**6**]):

1) $\lambda=1-$triunghiul dreptunghic;

2) $\lambda=\frac{3}{2}-$triunghi în care ortocentrul se proiectează pe mijlocul medianei din vârful A;

3) $\lambda = 2$-*triunghi automedian*, pentru care $\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c}$. Conform [**3**, p. 439], aceste triunghiuri au fost introduse de J. Neuberg în 1889!

4) $\lambda = \frac{5}{2}$-triunghi în care mediatoarea semimedianei $MD = \frac{1}{2}AD$ trece prin ortocentrul triunghiului;

5) $\lambda = 5$-triunghi în care medianele din B şi C sunt perpendiculare. Datorită acestui fapt, în [1, p. 152] acest triunghi este numit *triunghi ortomedian*.

Observaţii. (**i**) λ din definiţie trebuie să satisfacă $\lambda > \frac{1}{2}$. În adevăr, avem $2\left(b^2+c^2\right) \geq (b+c)^2 > a^2$, deci $2\lambda a^2 > a^2$, de unde concluzia cerută.

(**ii**) Pentru alte rezultate interesante relativ la λ-triunghiuri recomandăm [**1**].

În relaţiile (1) şi (1$'$) considerăm $x = b, y = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}a, z = c$ şi vom obţine:

Propoziţia 4. *Un λ-triunghi este caracterizat de fiecare dintre relaţiile:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}a+2c} + \frac{1}{2b+\sqrt{2\lambda}a} = \frac{1}{c+b}, \tag{10}$$

$$\frac{b}{\lambda a+\sqrt{2\lambda}c} + \frac{c}{\sqrt{2\lambda}b+\lambda a} = \frac{a}{c+b}. \tag{10$'$}$$

Dăm expresia relaţiilor (**10**) şi (**10$'$**) pentru clasele de λ-triunghiuri de mai sus:

1) $\lambda = 1$ - a se vedea [**5**].

2) $\lambda = \frac{3}{2}: \frac{1}{\sqrt{3}a+2c} + \frac{1}{2b+\sqrt{3}a} = \frac{1}{c+b}, \qquad \frac{2b}{3a+2\sqrt{3}c} + \frac{2c}{2\sqrt{3}b+3a} = \frac{a}{c+b};$

3) $\lambda = 2: \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+a} = \frac{2}{c+b}, \qquad \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} = \frac{2a}{c+b};$

4) $\lambda = \frac{5}{2}: \frac{1}{\sqrt{5}a+2c} + \frac{1}{2b+\sqrt{5}a} = \frac{1}{c+b}, \qquad \frac{2b}{5a+2\sqrt{5}c} + \frac{2c}{2\sqrt{5}b+5a} = \frac{a}{c+b};$

5) $\lambda = 5: \frac{1}{\sqrt{10}a+2c} + \frac{1}{2b+\sqrt{10}a} = \frac{1}{c+b}, \qquad \frac{b}{5a+\sqrt{10}c} + \frac{c}{\sqrt{10}b+5a} = \frac{a}{c+b}.$

Bibliografie

[1] **M. Bencze**, *About a family of triangles*, Octogon Math. Mag., 8(2000), no. 1, 151-156.

[2] **D. Brânzei, S. Aniţa, A. Aniţa**, *Competenţă şi performanţă în geometrie-vol. 1. Relaţii metrice*, Ed. Minied, Iaşi, 1992.

[3] **L. E. Dickson**, *History of the theory of numbers, Vol.* **II**-*Diophantine Analysis*, Chelsea, N. Y., 1952.

[4] **C. Năstăsescu, C. Niţă, S. Popa**, *Matematică. Manual pentru clasa a* **X**-*a*, EDP, Bucureşti, 1994.

[5] **D. Plăeşu**, *Identităţi în triunghiul dreptunghic*, Recreaţii Matematice, Iaşi, II(2000), nr. 1, 17-18.

[6] **Gh. D. Simionescu**, *Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii în geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1982.