Ceviene şi congruenţa triunghiurilor

Paraschiva BÎRSAN[1]

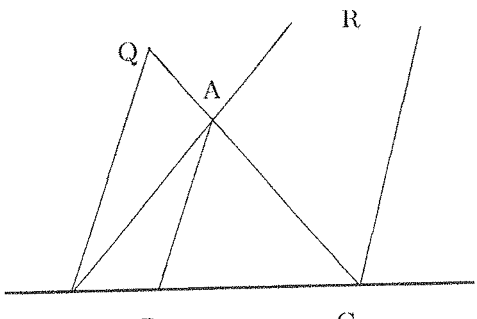
O **ceviană** într-un triunghi este o dreaptă ce trece prin unul dintre vârfurile sale. Punctul în care aceasta intersectează latura opusă se numeşte piciorul cevienei. Adesea, tot ceviană se numeşte şi segmentul delimitat de vârf şi piciorul cevienei.

Vom generaliza cazul (**LLL**) de congruenţă a două triunghiuri înlocuind, în enunţul acestuia, laturile cu trei ceviene oarecare. În acelaşi mod va fi generalizat şi cazul **III** de asemănare a triunghiurilor.

1. Ceviene interioare triunghiului. Fie ABC un triunghi oarecare şi $P \in (BC)$. Evident, ceviana AP este determinată de relaţia $BP = pBC$ cu $p \in (0,1)$. Vom spune, pe scurt, că AP este determinată de numărul $p \in (0,1)$ sau că AP corespunde lui p. Laturile AB şi AC corespund valorilor $p = 0$ şi respectiv $p = 1$. Să observăm că $PC = (p-1)BC$. Conform teoremei lui Stewart, lungimea cevienei AP este dată de formula

$$AP^2 = -p(1-p)a^2 + pb^2 + (1-p)c^2 \qquad (1)$$

Fie date acum două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$. Spunem că AP şi $A'P'$ sunt *ceviene corespunzătoare* în aceste triunghiuri, dacă sunt determinate de acelaşi număr $p \in (0,1)$, adică dacă au loc relaţiile $BP = pBC$ şi $B'P' = pB'C'$.



Cazul de congruenţă (LLL) este generalizat de teoremele de mai jos.

Teorema 1. *În triunghiurile ABC şi $A'B'C'$, considerăm cevienele distincte AP_1, AP_2, AP_3 şi corespunzătoarele lor $A'P_1'$, $A'P_2'$, $A'P_3'$. Atunci*

$$AP_i = A'P_i' \ (i = 1,2,3) \implies \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'. \qquad (2)$$

Demonstraţie. Să notăm cu p_1, p_2, p_3 cele trei numere distincte din intervalul $(0,1)$ la care corespund, respectiv, cevienele din enunţ; aşadar avem: $BP_i = p_iBC$ şi $B'P_i' = p_iB'C'$ $(i = 1,2,3)$.

Întrucât $(AP_i)^2 = (A'P_i')$ $(i = 1,2,3)$ şi ţinând seama de (1) obţinem:

$$-p_i(1-p_i)a^2 + p_ib^2 + (1-p_i)c^2 = -p_i(1-p_i)a'^2 + p_ib'^2 + (1-p_i)c'^2 \quad (i = 1,2,3),$$

[1] Profesor, Liceul "Garabet Ibrăileanu", Iaşi

adică sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} -p_1(1-p_1)(a^2-a'^2)+p_1(b^2-b'^2)+(1-p_1)(c^2-c'^2)=0 \\ -p_2(1-p_2)(a^2-a'^2)+p_2(b^2-b'^2)+(1-p_2)(c^2-c'^2)=0 \\ -p_3(1-p_3)(a^2-a'^2)+p_3(b^2-b'^2)+(1-p_3)(c^2-c'^2)=0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Cum

$$\begin{vmatrix} -p_1(1-p_1) & p_1 & 1-p_1 \\ -p_2(1-p_2) & p_2 & 1-p_2 \\ -p_3(1-p_3) & p_3 & 1-p_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 & 1 \\ p_2^2 & p_2 & 1 \\ p_3^2 & p_3 & 1 \end{vmatrix} = (p_1-p_2)(p_1-p_3)(p_2-p_3) \neq 0,$$

rezultă că sistemul (**3**) admite numai soluţia banală: $a^2-a'^2=0$, $b^2-b'^2=0$, $c^2-c'^2=0$ şi, deci, $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$. Conform cazului (LLL), triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt congruente. ■

Teorema 2. *În triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ considerăm cevienele distincte AP_1, AP_2, P_1, $P_2 \in (BC)$, ceviana BQ, $Q \in (CA)$, şi corespunzătoarele lor $A'P_1'$, $A'P_2'$, $B'Q'$. Atunci*

$$AP_1 = A'P_1',\ AP_2 = A'P_2',\ BQ = B'Q' \implies \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'. \tag{4}$$

Demonstraţie. Fie p_1, $p_2, q \in (0,1)$ numerele ce determină cevienele date: $BP_i = p_iBC$, $B'P_i' = p_iB'C'$ $(i=1,2)$ şi $BQ = qCA$, $B'Q' = qC'A'$.

Procedând ca în demonstraţia *Teoremei* 1, noile ipoteze duc la sistemul de ecuaţii

$$\left\{\begin{array}{l} -p_1(1-p_1)(a^2-a'^2)+p_1(b^2-b'^2)+(1-p_1)(c^2-c'^2)=0 \\ -p_2(1-p_2)(a^2-a'^2)+p_2(b^2-b'^2)+(1-p_2)(c^2-c'^2)=0 \\ (1-q)(a^2-a'^2)-q(1-q)(b^2-b'^2)+q(c^2-c'^2)=0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Prin calcule simple şi ţinând seama că $p_1 \neq p_2$ şi $(0 < p_i < 1,\ 0 < q < 1) \Rightarrow 0 < p_iq - q + 1 < 1$ $(i = 1, 2)$, obţinem:

$$\begin{vmatrix} -p_1(1-p_1) & p_1 & 1-p_1 \\ -p_2(1-p_2) & p_2 & 1-p_2 \\ 1-q & -q(1-q) & q \end{vmatrix} = (p_1-p_2)(p_1q-q+1)(p_2q-q+1) \neq 0.$$

Ca urmare, sistemul (**5**) are ca unică soluţie $a^2-a'^2=0$, $b^2-b'^2=0$, $c^2-c'^2==0$ şi, deci, triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt congruente. ■

Teorema 3. *În triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ considerăm cevienele AP, BQ, CR ($P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$) şi corespunzătoarele lor $A'P'$, $B'Q'$, $C'R'$. Atunci*

$$AP = A'P',\ BQ = B'Q',\ CR = C'R' \implies \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'. \tag{6}$$

Demonstraţie. Fie $p, q, r \in (0,1)$ numerele pentru care avem $BP = pBC$, $B'P' = pB'C'$ etc. Utilizând din nou formula (**1**), obţinem sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} -p(1-p)(a^2-a'^2)+p(b^2-b'^2)+(1-p)(c^2-c'^2)=0 \\ (1-q)(a^2-a'^2)-q(1-q)(b^2-b'^2)+q(c^2-c'^2)=0 \\ r(a^2-a'^2)+(1-r)(b^2-b'^2)-r(1-r)(c^2-c'^2)=0. \end{array}\right. \tag{7}$$

Deoarece

$$\begin{vmatrix} -p(1-p) & p & 1-p \\ 1-q & -q(1-q) & q \\ r & 1-r & -r(1-r) \end{vmatrix} = (pq-q+1)(qr-r+1)(rp-p+1) \neq 0,$$

rezultă că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt congruente. ■

Observaţii. 1) Se constată uşor că reciprocele teoremelor precedente sunt adevărate.

2) Medianele triunghiului sunt cevienele ce corespund la $p = q = r = \frac{1}{2}$. Conform *Teoremei 3, două triunghiuri ce au medianele corespunzătoare congruente sunt congruente* (fapt cunoscut!). Mai general, aplicând una sau alta dintre teoremele de mai sus, avem: *două triunghiuri ce au trei perechi de nediane corespunzătoare congruente sunt congruente* (în [2], p. 97, găsim: *se numesc* **nediane** *segmentele de dreaptă care trec printr-un vârf al triunghiului şi împart latura opusă în n părţi egale*).

3) Înălţimile, bisectoarele, simedianele etc. nu intră în categoria cevienelor cu care lucrăm în această notă, căci ele împart latura opusă într-un raport ce nu este constant (depinde de celelalte laturi). Întrucât înălţimile sunt invers proporţionale cu laturile, cu uşurinţă se obţine rezultatul: *două triunghiuri ce au înălţimile corespunzătoare congruente sunt congruente*. În privinţa bisectoarelor, nu ştim dacă este valabil un rezultat de acest fel. Dacă, însă, luăm două laturi ale triunghiului drept ceviene şi o bisectoare (simediană etc.) ca a treia ceviană, se obţine un rezultat valabil: *dacă două triunghiuri au două perechi de laturi corespunzătoare congruente şi o pereche de ceviene de rang k corespunzătoare congruente, atunci ele sunt congruente* (în [1], p. 56, se spune: *AD se numeşte* **ceviană de rang** *k (real) dacă are loc relaţia* $\dfrac{BD}{DC} = \left(\dfrac{c}{b}\right)^k$; bisectoarele sunt ceviene de rang 1, simedianele de rang 2).

2. Ceviene oarecare. Pentru a înlătura restricţia impusă cevienelor de a fi interioare triunghiului, vom considera orientarea obişnuită pe dreptele suport ale laturilor triunghiului şi vom lucra cu segmente orientate. În consecinţă relaţia $\overline{BP} = p\overline{BC}$ stabileşte o bijecţie între punctele P ale dreptei BC şi numerele reale p; pentru $P \in (BC)$ corespund numere $p \in (0,1)$, punctelor P situate la stânga lui B le corespund valori negative ale lui p şi pentru punctele P situate la dreapta lui C avem $p > 1$.

Având în vedere aceste observaţii, constatăm uşor că formula (1) şi analoagele ei au loc pentru orice poziţie a punctului P pe dreapta BC. Mai jos va fi utilă următoarea:

Lemă. *Fie cevienele AP, BQ şi CR determinate prin condiţiile $\overline{BP} = p\overline{BC}$, $\overline{CQ} = q\overline{CA}$ şi, respectiv, $\overline{AR} = r\overline{AB}$. Atunci*

$$AP \parallel BQ \iff pq - q + 1 = 0 \quad \text{şi} \quad AP \parallel CR \iff pr - p + 1 = 0. \tag{8}$$

Demonstraţie. Vom demonstra numai prima relaţie din (8). Să presupunem că $P \in (BC)$. Conform *Teoremei lui Thales*, avem

$$AP \parallel BQ \iff \frac{BP}{BC} = \frac{QA}{QC} \iff p = \frac{q-1}{q} \iff pq - q + 1 = 0.$$

Dacă P este pe prelungirea laturii BC, se procedează la fel, fiind atenţi la orientarea segmentelor atunci când folosim relaţiile din enunţ. ■

Teorema 1 nu-şi schimbă enunţul (şi nici demonstraţia) dacă una, două sau toate trei cevianele considerate sunt exterioare triunghiului.

Teorema 2'. *În triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ considerăm cevienele AP_1, AP_2, şi BQ şi corespunzătoarele lor $A'P_1'$, $A'P_2'$ şi $B'Q'$. Dacă cevienele AP_1 şi AP_2 sunt distincte şi ceviana BQ nu este paralelă cu AP_1 sau AP_2, atunci are loc implicaţia* (4).

Demonstraţie. Întrucât formula (1) este valabilă pentru o ceviană AP oarecare, sistemul (5) nu se modifică. În conformitate cu *Lema* de mai sus, restricţiile din enunţ revin la $p_1 \neq p_2$, $p_1 q - q + 1 \neq 0$ şi $p_2 q - q + 1 \neq 0$. Ca urmare, determinantul sistemului liniar (5) este nenul şi acesta admite numai soluţia banală, ceea ce duce la concluzia dorită. ■

În sfârşit, enunţul *Teoremei 3* trebuie modificat după cum urmează:

Teorema 3'. *În triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ considerăm cevienele AP, BQ, CR şi corespunzătoarele lor $A'P'$, $B'Q'$, $C'R'$. Dacă oricare două dintre cevienele AP, BQ, CR sunt neparalele, atunci are loc implicaţia* (6).

3. Cazuri de asemănare a triunghiurilor. Cazul **III** de asemănare se poate generaliza în termenii cevienelor obţinându-se - ca şi în privinţa cazului de congruenţă (LLL) - trei versiuni. Nu vom da explicit enunţurile acestor teoreme, căci se obţin înlocuind în *Teoremele 1, 2' şi 3'* implicaţiile (2), (4) şi (6) cu, respectiv, următoarele implicaţii:

$$AP_i = tA'P_i' \ (i = 1,2,3) \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C', \qquad (2')$$

$$AP_1 = tA'P_1', \quad AP_2 = tA'P_2', \quad BQ = tB'Q' \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C', \qquad (4')$$

$$AP = tA'P', \quad BQ = tB'Q', \quad CR = tC'R' \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'. \qquad (6')$$

Demonstraţiile acestor rezultate urmează pas cu pas pe cele date *Teoremelor 1, 2' şi 3'* cu schimbarea că în locul binoamelor $(a^2 - a'^2)$ etc. vor apare $(ta^2 - a'^2)$ etc. şi, în final, în loc de egalitatea laturilor corespunzătoare se obţine proporţionalitatea acestora, adică asemănarea triunghiurilor.

Bibliografie

[1] **V. Gh. Vodă** - *Triunghiul - ringul cu trei colţuri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.

[2] **V. Gh. Vodă** - *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, Bucureşti, 1981.