Identităţi în triunghiurile dreptunghice

Dan PLĂEŞU[0]

Prezentăm în cele ce urmează o modalitate simplă de a obţine identităţi ce caracterizează triunghiurile dreptunghice sau triunghiurile dreptunghice având un unghi cu măsura de 15°. La baza demersurilor noastre stau următoarele afirmaţii :

$$x^2+z^2=2y^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+y}=\frac{2}{z+x}, \tag{i}$$

$$x^2+z^2=2y^2 \Longleftrightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{z}{x+y}=\frac{2y}{z+x}, \tag{ii}$$

pentru orice numere x, y şi z reale şi pozitive (a se vedea Problema 23, pag. 81, din [**3**]). Acestea pot fi stabilite uşor prin calcul direct.

1. Caracterizarea triunghiurilor dreptunghice. Fie dat un triunghi ABC. Conform Teoremei lui Pitagora şi reciprocei sale, avem:

$$m(A)=90^\circ \Longleftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \text{ sau } m(A)=90^\circ \Longleftrightarrow AB^2+AC^2=2\left(\frac{BC}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Luând în (i) şi (ii) $x=AB$, $y=\dfrac{BC}{\sqrt{2}}$, $z=AC$, obţinem:

$$m(A)=90^\circ \Longleftrightarrow \frac{1}{BC+AC\sqrt{2}}+\frac{1}{BC+AB\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{AC+AB}, \tag{1}$$

$$m(A)=90^\circ \Longleftrightarrow \frac{AB}{BC+AC\sqrt{2}}+\frac{AC}{BC+AB\sqrt{2}}=\frac{BC}{AC+AB}. \tag{2}$$

În baza definiţiei funcţiilor trigonometrice în triunghiul dreptunghic, echivalenţele (1) şi (2) se scriu sub forma:

$$m(A)=90^\circ \Longleftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{2}\sin B}+\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin C}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B+\sin C}, \tag{3}$$

$$m(A)=90^\circ \Longleftrightarrow \frac{\sin C}{1+\sqrt{2}\sin B}+\frac{\sin B}{1+\sqrt{2}\sin C}=\frac{1}{\sin B+\sin C}. \tag{4}$$

2. Caracterizarea triunghiurilor dreptunghice ce au un unghi de 15°. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $m(A)=90^\circ$ şi D piciorul înălţimii corespunzătoare ipotenuzei. Următoarele condiţii sunt echivalente :

1° triunghiul ABC are un unghi cu măsura de 15°;

2° $BC=4AD$;

3° $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{16}{BC^2}$;

4° $tg^2B+tg^2C=14$;

---

0 *prof., Şcoala Normală "Vasile Lupu" Iaşi*

5° $BD^2+CD^2=\frac{7}{8}BC^2$

(a se vedea [2] sau [1], pag. 53 şi 138).

Sugerat de egalităţile 3°, 4° şi 5°, să luăm în echivalenţele (i) şi (ii)

$$x=\frac{1}{AB},\ y=\frac{2\sqrt{2}}{BC},\ z=\frac{1}{AC} \qquad \text{sau}$$

$$x=tgB,\ y=\sqrt{7},\ z=tgC \qquad \text{sau}$$

$$x=BD,\ y=\frac{\sqrt{7}}{4}BC,\ z=CD\ ;$$

se vor obţine următoarele şase egalităţi:

$$\frac{BC\cdot AB}{BC+2AB\sqrt{2}}+\frac{BC\cdot AC}{BC+2AC\sqrt{2}}=\frac{2AB\cdot AC}{AB+AC}, \tag{5}$$

$$\frac{BC\cdot AB}{AC\left(BC+2AB\sqrt{2}\right)}+\frac{BC\cdot AC}{AB\left(BC+2AC\sqrt{2}\right)}=\frac{4AB\cdot AC\sqrt{2}}{BC\left(AB+AC\right)}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{tg\mathrm{B}+\sqrt{7}}+\frac{1}{tg\mathrm{C}+\sqrt{7}}=\frac{2}{tg\mathrm{B}+tg\mathrm{C}}, \tag{7}$$

$$\frac{tg\mathrm{C}}{tg\mathrm{B}+\sqrt{7}}+\frac{tg\mathrm{B}}{tg\mathrm{C}+\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{tg\mathrm{B}+tg\mathrm{C}}, \tag{8}$$

$$\frac{2}{4BD+BC\sqrt{7}}+\frac{2}{4CD+BC\sqrt{7}}=\frac{1}{BC}, \tag{9}$$

$$\frac{CD}{4BD+BC\sqrt{7}}+\frac{BD}{4CD+BC\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{8}, \tag{10}$$

fiecare dintre ele caracterizând triunghiurile dreptunghice ce au un unghi cu măsura de 15°.

References

[1] **Cohal T., Cohal E.,** - *Geometrie. Probleme rezolvate pentru gimnaziu şi liceu.* Ed. Polirom, Iaşi, 1996.

[2] **Marinescu D.** - *Problema E: 10668,* Gazeta Matematică 12 / 1993, p. 486 (soluţie în GM - 10/1994, p. 465).

[3] **Năstăsescu C., Niţă C., Popa S.** - *Matematică. Manual pentru clasa a X-a.* Ed. Did. şi Pedagogică, Bucureşti, 1994.