Diferența simetrică a două mulțimi

Mihai NECULA[0]

Vom studia grupurile în care toate elementele au ordinul doi, adică grupurile $(G,\cdot)$ cu proprietatea

$$\forall a \in G,\ a^2 = e\ , \tag{P}$$

unde e este elementul neutru.

Pentru început să arătăm că există astfel de grupuri.

PROBLEMA 1. *Fie $E \neq \varnothing$, $\wp(E)$ mulțimea părților lui E și $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ diferența simetrică a părților A și B.*

Arătați că $(\wp(E), \Delta)$ este un grup cu proprietatea (**P**).

Rezolvare. Se poate arăta direct, folosind operațiile cu mulțimi, că $(\wp(E), \Delta)$ este un grup în care $A\Delta A = \varnothing, \forall A \in \wp(E)$, adică are loc (**P**), dar preferăm o cale indirectă care ne permite să introducem un alt exemplu important de grup cu proprietatea (**P**).

Notăm $Z_2(E) = \{f : E \to \{0,1\}\}$ și definim pe $Z_2(E)$ adunarea modulo 2 pe componente, adică

$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x) \pmod 2, \forall x \in E\ .$$

Deoarece $Z_2 = \{0,1\}$ cu adunarea modulo 2 dată de $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = = 1 \oplus 0 = 0$ este un grup în care are loc (**P**), rezultă imediat că și $(Z_2(E), \oplus)$ este un grup cu proprietatea (**P**).

Pentru fiecare $A \subset E$ definim funcția caracteristică f_A: $E \to \{0,1\}$ prin

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in A \\ 0, \text{ dacă } x \notin A \end{cases}$$

și lăsăm cititorul să verifice că

$$f_{A\Delta B}(x) = f_A(x) \oplus f_B(x) \pmod 2, \forall x \in E\ .$$

Asocierea $A \in \wp(E) \to f_A \in Z_2(E)$ este evident o bijecție, iar în baza relației anterioare, operația indusă pe mulțimea $\wp(E)$ este tocmai Δ. Așadar $(\wp(E), \Delta)$ este un grup izomorf cu $(Z_2(E), \oplus)$, în care are loc proprietatea (**P**).

Să stabilim acum câteva proprietăți ale grupurilor studiate.

PROBLEMA 2. *Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea* (**P**). *Arătați că:*

(A) *$(G,\cdot)$ este grup abelian;*

(B) *Orice parte stabilă a lui G este subgrup în G ;*

(C) *Dacă $H \subset G$ este un subgrup, iar $a \in G\backslash H$, atunci*

(i) *H și $aH = \{ah, h \in H\}$ au același număr de elemente,*

(ii) *$H \cap aH = \emptyset$ și*

(iii) *$H \cup aH$ este subgrup în G .*

---

0 *lector, Facultatea de Matematică, Univ. "Al. I Cuza" Iași*

Rezolvare. Vom justifica numai proprietatea (**C**). Pentru (i) observăm că $a \in G$ este inversabil şi deci funcţia $f_a : H \to aH$, $f_a(x) = ax, \forall x \in H$, este bijectivă, deci H şi aH au acelaşi număr de elemente (!). Dacă presupunem prin absurd că $\exists x \in H \cap aH$, atunci $\exists y \in H$ astfel încât $x = ay$, de unde urmează că $xy = a$ şi deci $a \in H$, contradicţie.

Următoarele implicaţii justifică faptul că H ∪ aH este parte stabilă:

$$\begin{aligned} x &\in H, \quad y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H \subset H \cup aH, \\ x &\in H, \quad ay \in aH \Rightarrow x \cdot (ay) = a(xy) \in aH \subset H \cup aH, \\ ax &\in aH, \quad ay \in aH \Rightarrow (ax) \cdot (ay) = a^2xy = xy \in H \subset H \cup aH, \end{aligned}$$

Deci $H \cup aH$ este subgrup în G (vezi (**B**)).

În continuare ne propunem să găsim un exemplu de grup cu proprietatea (**P**) care să nu fie izomorf cu un grup de tipul $(\wp(E), \Delta)$. Să începem cu mulţimile finite. Observăm că dacă $E_n = \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbf{N}$ atunci $\wp(E)$ are 2^n elemente. Dacă vom reuşi să construim un grup cu 7 elemente, de exemplu, care are proprietatea (**P**), atunci este clar că acest grup nu este de tipul $(\wp(E), \Delta)$. Încercaţi !

PROBLEMA 3. *Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu proprietatea* (**P**). *Arătaţi că numărul de elemente al lui G este o putere a lui 2.*

Rezolvare. Vom numerota elementele lui G după următorul algoritm :

Pasul 0. Notăm elementul neutru cu a_0. Definim $H_0 = \{a_0\}$ care este evident un subgrup în G.

Dacă $G = H_0$ atunci ne oprim şi G are 2^0 elemente.

Dacă nu ne oprim, urmează:

Pasul 1. Alegem un element din $G \backslash H_0$ şi îl notăm cu a_1. Evident, $H_1 = H_0 \cup a_1 H_0 = \{a_0\} \cup \{a_1\} = \{a_0, a_1\}$ este subgrup în G.

Dacă $G = H_1$ atunci ne oprim şi G are 2^1 elemente.

Dacă nu ne oprim, urmează

Pasul 2. Alegem un element din $G \setminus H_1$ şi îl notăm cu a_2. Din proprietatea (**C**) rezultă că $a_2 H_1 = \{a_2 a_0, a_2 a_1\} = \{a_2, a_2 a_1\}$ este formată din elemente distincte şi $H_1 \cap a_2 H_1 = \emptyset$. Rezultă că G are cel puţin 4 elemente. Notăm $a_3 = a_2 a_1$ şi $H_2 = H_1 \cup a_2 H_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ este un subgrup în G.

Dacă $G = H_2$ atunci STOP : G are 2^2 elemente.

Dacă nu, continuăm cu :

Pasul 3. Alegem un element din $G \setminus H_2$ şi îl notăm cu a_4. Deoarece $a_4 H_2 = \{a_4 a_0, a_4 a_1, a_4 a_2, a_4 a_3\}$ este formată din 4 elemente şi nici unul dintre ele nu este în H_2, rezultă că G are cel puţin 8 elemente. Numerotăm elementele lui $a_4 H_2$ astfel : $a_4 = a_4 a_0, a_5 = a_4 a_1$, $a_6 = a_4 a_2$ şi $a_7 = a_4 a_3$. Obţinem subgrupul $H_3 = H_2 \cup a_4 H_2 = \{a_0, a_1, ..., a_7\} \subset G$.

Dacă $G = H_3$ atunci ne oprim şi G are 2^3 elemente.

Dacă nu, trecem la pasul următor.

Deoarece G este finită, ne vom opri după un număr finit de paşi, să zicem la pasul n, cu concluzia : G are 2^n elemente.

Concluzie : nu există grupuri cu 7 elemente în care să fie îndeplinită condiţia (**P**).

Dar oare nu se poate construi un grup cu proprietatea (**P**) cu 2^3 elemente, de exemplu, care să nu fie izomorf cu $(\wp(E_3), \Delta)$? Merită să încercaţi: veţi înţelege mai bine algoritmul prezentat.

PROBLEMA 4. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup cu proprietatea* (**P**), *cu* 2^n *elemente,* $n \in \mathbb{N}$. *Arătaţi că* $(G, \cdot) \cong (\wp(E_n), \Delta)$.

Rezolvare. Aplicăm algoritmul de numerotare şi obţinem $G = \{a_0, a_1, ..., a_{2^n-1}\}$. Să observăm că la fiecare pas $p+1$, $p \in \mathbb{N}$, fixăm în mod arbitrar un element $a_{2^p} \in G \backslash H_p$ şi cu ajutorul lui definim celelalte elemente din $H_{p+1} \backslash H_p$.

Din acest motiv, mulţimea $D = \{a_1, a_2, a_4, a_8, ..., a_{2^{n-1}}\}$ o vom numi *mulţimea generatorilor* lui G. Urmând şirul definiţiilor, orice element din $G \backslash \{a_0\}$ poate fi scris ca produs de generatori.

Exemplu:

$$\begin{aligned} a_{23} &= a_{16} \cdot a_7 \\ a_7 &= a_4 \cdot a_3 \\ a_3 &= a_2 \cdot a_1 \end{aligned}$$

deci $a_{23} = a_{16} \cdot a_4 \cdot a_2 \cdot a_1$.

O descompunere obţinută prin acest procedeu (utilizând direct definiţiile în mod recurent) o numim *descompunere definitorie* . Asociem fiecărui element a din $G \backslash \{a_0\}$ mulţimea D_a a generatorilor care apar în descompunerea sa definitorie. Elementului neutru a_0 îi asociem mulţimea vidă. Obţinem astfel o bijecţie $F : G \to \wp(D)$, $F(a) = D_a, \forall a \in G$.

Calculând produsul a două elemente a şi b din G cu ajutorul descompunerilor lor definitorii, ţinând cont de proprietăţile (**P**) şi (**A**), obţinem următoarea caracterizare: descompunerea definitorie a produsului ab este formată din generatorii care aparţin numai lui a sau numai lui b (deoarece generatorii comuni se reduc), adică

$$D_{ab} = D_a \, \Delta \, D_b \, .$$

Urmează că $F : G \to \wp(D)$ este un izomorfism de grupuri, $(G, \cdot) \cong (\wp(D), \Delta)$.

În final, să observăm că D şi E_n au acelaşi număr de elemente, deci $(\wp(D), \Delta) \cong (\wp(E_n), \Delta)$. Reamintim că $E_n = \{1, 2, ..., n\}$

Am arătat până acum că, în cazul mulţimilor finite, orice grup cu proprietatea (**P**) este izomorf cu un grup $(\wp(E), \Delta)$. Ne întrebăm dacă acest fapt rămâne valabil şi în cazul mulţimilor infinite.

Să construim pe mulţimea numerelor naturale un exemplu de grup cu proprietatea (**P**). Fie $n, m \in \mathbb{N}$ şi definim $n * m$ numărul obţinut prin adunarea modulo 2, cifră cu cifră, fără transport, a reprezentărilor lui n şi m în baza 2.

Exemplu :

$n = 9 = 8 + 1 = 1001_{(2)}$ $m = 23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 10111_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 01001 \quad \oplus \\ 10111 \\ \dots \\ 11110 \end{array}$$

$n \star m = 11110_{(2)} = 16 + 8 + 4 + 2 = 30$

PROBLEMA 5. *Arătaţi că:*

(i) $(\mathbf{N}, \star)$ *este un grup cu proprietatea* $(\mathbf{P})$;

(ii) $(\mathbf{N}, \star)$ *este izomorf cu subgrupul părţilor finite din* $(\wp(\mathbf{N}), \Delta)$;

(iii) *Nu există nici o mulţime* $E \neq \emptyset$ *astfel încât* $(\mathbf{N}, \star) \cong (\wp(E), \Delta)$ ..