Câteva aplicaţii ale teoremei lui Rolle

Cristian FRĂSINARU[0]

O funcţie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $a < b$, se numeşte *funcţie Rolle* pe intervalul $[a,b]$ dacă este continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b). **Teorema lui Rolle** afirmă: *dacă $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ este funcţie Rolle pe $[a,b]$ şi satisface condiţia $f(a) = f(b)$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.*

Propoziţia 1. *Dacă f, g şi h sunt funcţii Rolle pe $[a,b]$ şi f, g sunt injective pe acest interval, atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât*

$$\frac{f'(c)}{f(c) - f(a)} + \frac{g'(c)}{g(c) - g(b)} = h'(c). \tag{1}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia auxiliară $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$F(x) = [f(x) - f(a)] \cdot [g(x) - g(b)]e^{-h(x)}.$$

Evident, F este o funcţie Rolle pe $[a,b]$ şi avem $F(a) = F(b) = 0$. Conform Teoremei lui Rolle există $c \in (a,b)$ astfel încât $F'(c) = 0$. Cum

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{-h(x)} \cdot \\ &\cdot \{f'(x)[g(x) - g(b)] + g'(x)[f(x) - f(a)] - h'(x)[f(x) - f(a)][g(x) - g(b)]\} \end{aligned}$$

egalitatea $F'(c) = 0$ conduce la

$$f'(c)[g(c) - g(b)] + g'(c)[f(c) - f(a)] = h'(c)[f(c) - f(a)][g(c) - g(b)].$$

Funcţiile f şi g fiind injective, rezultă că $[f(c) - f(a)][g(c) - g(b)] \neq 0$. Împărţind egalitatea precedentă cu acest produs, deducem (1), q. e. d.

Observaţie. În ipotezele propoziţiei precedente, dar considerând funcţia $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ dată de $F(x) = [f(x) - f(b)] \cdot [g(x) - g(a)]e^{-h(x)}$, se obţine relaţia:

$$\frac{f'(c*)}{f(c*) - f(b)} + \frac{g'(c*)}{g(c*) - g(a)} = h'(c*) \tag{2}$$

pentru măcar un $c* \in (a,b)$.

Aplicaţii. 1) Să se arate că pentru orice funcţie Rolle $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ există un punct $c \in (a,b)$ aşa încât $f'(c) = \dfrac{a+b-2c}{(c-a)(b-c)}$.

(**Indicaţie.** În (1) se consideră $f(x) = g(x) = x$ şi $h(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$.)

2) Să se arate că există un punct $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ astfel încât să avem $\dfrac{\cos c}{1 - \sin c} = \dfrac{\sin c}{1 - \cos c}$.

(**Indicaţie :** În (2) se ia $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = 1$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.)

---

[0] *Asistent, Facultatea de Informatică, Univ. "Al. I Cuza" Iaşi*

Propoziţia 2. *Dacă f şi g sunt funcţii Rolle pe $[a,b]$ şi este satisfăcută cel puţin una dintre relaţiile:*

$$\text{(i)}\ f(a)=f(b)=0 \quad \text{şi} \quad \text{(ii)}\ f(a)=f(b) \text{ şi } g(a)=g(b)=0,$$

atunci oricare ar fi numerele $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, $k_2 \neq 0$, există $c \in (a,b)$ astfel încât

$$k_1 f(c) g'(c) + k_2 f'(c) = 0 . \qquad (3)$$

Demonstraţie. Se constată uşor că funcţia $F:[a,b] \to \mathbf{R}$ dată de $F(x) = f(x)e^{k_1/k_2\, g(x)}$ este o funcţie Rolle ce verifică condiţia $F(a) = F(b)$, în oricare dintre situaţiile (i) sau (ii). Putem aplica Teorema lui Rolle şi deducem că există $c \in (a,b)$ astfel încât $F'(c) = 0$. Deoarece

$$F'(x) = e^{(k_1/k_2)\, g(x)}[f'(x) + \frac{k_1}{k_2} f(x) g'(x)] ,$$

urmează că $f'(c) + \frac{k_1}{k_2} f(c) g'(c) = 0$, de unde obţinem (3), q. e. d.

Aplicaţii. 1) Să se demonstreze că între două zerouri ale unei funcţii Rolle există cel puţin un punct x_0 în care avem $f(x_0) = f'(x_0)$.
(**Indicaţie.** În (3) se vor lua $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ şi $g(x) = x$.)

2) Date funcţiile continue $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbf{R}$, să se arate că există $c \in (a,b)$ încât

$$\int_a^c \varphi(t)\,dt \cdot \int_c^b \psi(t)\,dt = \psi(c) \int_a^c \varphi(t)\,dt - \varphi(c) \int_c^b \psi(t)\,dt.$$

(**Indicaţie.** Luăm în (3) $k_1 = k_2 = 1$, $f(x) = \int_a^x \varphi(t)dt \cdot \int_x^b \psi(t)\,dt$ şi $g(x) = x$, $x \in [a,b]$.)

Cititorul este îndemnat să obţină, procedând la fel, noi egalităţi de tipul celor de mai sus.