Rezolvarea ecuaţiei diofantice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$

Mircea CRÂŞMĂREANU [1]

În această lucrare ne ocupăm de câteva aspecte referitoare la rezolvarea în numere naturale distincte a ecuaţiei

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

unde $a, b \in \mathbb{N}^*$. Mai precis, suntem interesaţi în precizarea:

- condiţiilor în care ecuaţia dată are soluţii,
- numărului acestor soluţii,
- determinării efective a soluţiilor.

Pentru simplificarea expunerii vom considera $x < y$.

Cazul I : $\boxed{a = 1}$

Eliminând numărătorul avem $b\,(x + y) = x\,y$ de unde rezultă

$$(x - b)\,(y - b) = x\,y - b\,(x + y) + b^2 = b^2 \tag{1'}$$

Cazul I$_1$: *b este număr prim.*

Din $(1')$, cum $x < y$, rezultă $x - b = 1$ şi $y - b = b^2$. Prin urmare, în acest caz avem soluţia unică

$$x = b + 1, \ y = b(b + 1) \tag{2}$$

Cazul I$_2$: *b nu este un număr prim.*

Dacă notăm cu d un divizor al lui b^2 atunci din $(1')$ rezultă $x - b = d$ şi $y - b = \frac{b^2}{d}$. Condiţia $x < y$ revine la $d < \frac{b^2}{d}$, adică $d < b$. Obţinem:

Propoziţia 1 Dacă b nu este număr prim atunci numărul soluţiilor $x < y$ ale ecuaţiei $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b}$ este egal cu numărul divizorilor lui b^2 strict mai mici decât b. Dacă d este un astfel de divizor, atunci soluţia generică este

$$x = b + d, \quad y = b + \frac{b^2}{d} \tag{3}$$

Cazul II : $\boxed{a > 1}$

Eliminând numărătorul avem $b(x + y) = a\,x\,y$ de unde rezultă

$$(a\,x - b)\,(a\,y - b) = a^2\,x\,y - a\,b\,(x + y) + b^2 = b^2 \tag{1''}$$

---

[1] *Lector dr., Facultatea de Matematică, Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi*

Cazul II$_1$: b *este număr prim.*

Din $(1'')$, cum $x < y$, rezultă $ax - b = 1$ şi $ay - b = b^2$. Din $ax = b+1$ rezultă că a divide pe $b+1$ şi deci obţinem

Propoziţia 2 Dacă $a > 1$ şi b este număr prim, atunci ecuaţia *(1)* are soluţii $x < y$ doar dacă a divide pe $b+1$ şi - în acest caz - soluţia este unică *:*

$$x = \frac{b+1}{a}, \; y = \frac{b(b+1)}{a} \tag{4}$$

Cazul II$_2$: b *nu este un număr prim.*

Dacă d este un divizor al lui b^2 atunci din $(1'')$ avem $ax - b = d$ şi $ay - b = \dfrac{b^2}{d}$. Din nou $x < y$ impune $d < b$, iar relaţiile precedente impun ca a să dividă pe $b+d$ şi $\dfrac{b(b+d)}{d}$. Obţinem:

Propoziţia 3. *Dacă* $a > 1$ *şi* b *nu este număr prim atunci ecuaţia* (1) *are soluţii* $x < y$ *dacă există divizori* d *ai lui* b^2 *strict mai mici decât* b *aşa încât* a *divide* $b+d$ *şi* $\dfrac{b(b+d)}{d}$. *Numărul soluţiilor este dat de numărul acestor divizori şi soluţia generică este:*

$$x = \frac{b+d}{a}, \; y = \frac{b(b+d)}{ad} \tag{5}$$

Observaţie. Evident relaţia (5) generalizează atât relaţia (3) cât şi relaţia (4), care se obţine pentru $d = 1$, deoarece dacă b este prim atunci singurul divizor al lui b^2 strict mai mic decât b este $d = 1$.

Exemplu. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{15}.$$

Soluţie: Se verifică direct că nu există soluţii de forma (x, x), $x \in \mathbb{N}$. Soluţiile de forma $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu $x < y$ se află în conformitate cu Propoziţia 3. Divizorii d ai lui b^2 strict mai mici ca b sunt: 1, 3, 5 şi 9. Numai divizorii 1 şi 9 îndeplinesc condiţiile $8 \mid (15+d)$ şi $8 \mid \dfrac{15(15+d)}{d}$. Soluţiile ecuaţiei, scrise după (5), sunt (2, 30) şi (3, 5).

În concluzie, ecuaţia dată are următoarele soluţii: (2, 30), (3, 5), (30, 2), (5, 3).