O teoremă de omologie pentru triunghiul echilateral

Constantin COCEA [*]

Definiție. *Dat un triunghi ABC și un punct P în plan, se numește antipodarul lui P în raport cu triunghiul ABC, triunghiul $A_1B_1C_1$ format de perpendicularele în A, B, C pe dreptele PA, PB, respectiv PC.*

Evident, se presupune îndeplinită condiția $P \notin \{A, B, C\}$.

Are loc următoarea

Teoremă. *Având un triunghi echilateral ABC și un punct P în planul său, atunci antipodarul lui P și triunghiul ABC sunt omologice.*

Demonstrație. Alegem ca origine O centrul triunghiului și fie $A(a), B(b), C(c)$ vârfurile tringhiului (cu afixele lor complexe în paranteze). Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că

$$a = 1,\ b = \omega,\ c = \omega^2. \tag{1}$$

Urmează

$$a + b + c = 1, \tag{2}$$

$$\bar{a} = \frac{1}{a},\ \bar{b} = \frac{1}{b},\ \bar{c} = \frac{1}{c}, \tag{3}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0, \tag{4}$$

$$a^2 = bc,\ b^2 = ca,\ c^2 = ab. \tag{5}$$

Notăm cu A' punctul în care perpendiculara pe PA taie pe BC. Urmează

$$\varkappa_{A'A} = -\varkappa_{PA} = -\frac{p-a}{\bar{p}-\bar{a}}. \tag{6}$$

Ecuația dreptei $A'A$ (scrisă prin punct și pantă) este

$$z - a = -\frac{p-a}{\bar{p}-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{a}) \tag{7}$$

sau

[*] *Prof., Liceul "Dimitrie Cantemir" Iași*

$$z(\bar{p}-\bar{a})+\bar{z}(p-a)-a\bar{p}-\bar{a}p=0. \qquad (8)$$

Având în vedere formula ce dă raportul în care o dreaptă împarte un segment, obținem

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{b(\bar{p}-\bar{a})+\bar{b}(p-a)-a\bar{p}-\bar{a}p}{c(\bar{p}-\bar{a})+\bar{c}(p-a)-a\bar{p}-\bar{a}p}. \qquad (9)$$

Cum $b\bar{a}+\bar{b}a=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}=\frac{-c^2}{ab}=-1=c\bar{a}+\bar{c}a,$

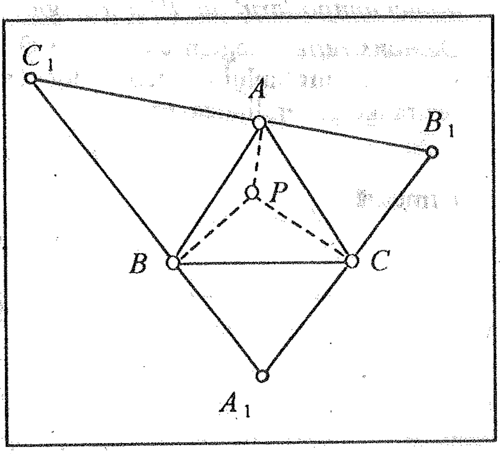
obținem în continuare

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{b(\bar{p}-\bar{a})+\bar{b}(p-a)-1}{c(\bar{p}-\bar{a})+\bar{c}(p-a)-1}. \qquad (10)$$

Având în vedere egalitatea (10) și formulele analoage pentru $\frac{B'C}{B'A}$ și $\frac{C'A}{C'B}$, obținem

$$\prod\frac{A'B}{A'C}=1,$$

ceea ce probează că punctele A', B', C' sunt colineare, deci triunghiul ABC și antipodarul lui P $A_1B_1C_1$ sunt omologice. ■



Bibliografie

[1] **Brânzei, D., Anița, S., Cocea, C.** - ***Planul și spațiul euclidian.*** Editura Academiei, București, 1986.

[2] **Cocea, C.** - *Teoreme de triortologie și triparalelogie.* G.M., 8 /1992.

[3] **Cocea, C.** - ***200 de probleme din geometria triunghiului.*** Editura "Gh.Asachi", Iași, 1992.

[4] **Dincă, M., Chiriță, M.** - ***Numere complexe în matematica de liceu.*** Editura ALL Educațional, București, 1996.

[5] **Mihăileanu, N.** - ***Utilizarea numerelor complexe în geometrie.*** Editura Tehnică, București, 1968.

[6] **Mihet, D.** - *Utilizarea numerelor complexe în geometrie.* Caiete metodico-științifice, Matematică, nr.41, Timișoara, 1987.