O GENERALIZARE A LEMEI LUI BELLMAN

Adrian CORDUNEANU *

Lema lui R. Bellman (matematician american contemporan) are mare importanță în teoria stabilității soluțiilor ecuațiilor şi sistemelor diferențiale, deoarece ea permite simplificarea demonstrațiilor unor teoreme de bază ale acestei teorii. Cu toate acestea, enunțul şi demonstrația ei sunt foarte simple, putând fi înțelese numai pe baza cunoştințelor de Analiză matematică predate în liceu. Înainte de a prezenta generalizarea la care ne referim, vom enunța

Lema lui BELLMAN. *Dacă are loc inegalitatea*

$$f(x) \leq M + \int_0^x a(s)f(s)\,ds\,, \quad x \geq 0 \tag{1}$$

în care $f = f(x)$ *şi* $a = a(x)$ *sunt funcții continue şi nenegative pentru* $x \geq 0$ *iar* $M > 0$ *este o constantă, atunci rezultă majorarea*

$$f(x) \leq M e^{\int_0^x a(s)\,ds}\,, \quad x \geq 0\,. \tag{2}$$

Nu vom oferi (şi) demonstrația acestei leme, deoarece ea va rezulta ca un caz particular al unei propoziții mai generale, pe care urmează să o prezentăm mai jos. Anume, generalizarea la care ne-am gândit se referă la înlocuirea limitei superioare de integrare din inegalitatea (1) cu $\alpha(x)$ în loc de x, unde $\alpha = \alpha(x)$ este o funcție crescătoare, cu derivată continuă pe semiaxa $x \geq 0$ şi satisfăcând condiția $\alpha(0) = 0$. Mai precis, vom enunța

PROPOZIȚIA 1. *Dacă are loc inegalitatea*

$$f(x) \leq M + \int_0^{\alpha(x)} a(s)f(s)\,ds\,, \quad x \geq 0 \tag{3}$$

în care

(i) $f = f(x)$ *şi* $a = a(x)$ *sunt funcții continue şi nenegative pentru* $x \geq 0$ *iar* $M > 0$ *este o constantă,*

(ii) $\alpha = \alpha(x)$ *este o funcție crescătoare, cu derivată continuă pentru* $x \geq 0$ *şi satisfăcând condiția* $0 \leq \alpha(x) \leq x$ *pentru* $x \geq 0$, *atunci rezultă majorarea*

$$f(x) \leq M e^{\int_0^{\alpha(x)} a(s)\,ds}\,, \quad x \geq 0\,. \tag{4}$$

Demonstrație. Notând cu $u(x)$ partea dreaptă a inegalității (3), adică punând

* *Prof. Dr. la Catedra de Matematică - Univ. Tehnică Iaşi*

$$u(x) = M + \int_0^{\alpha(x)} a(s) f(s)\, ds, \quad x \geq 0 \tag{5}$$

rezultă $f(x) \leq u(x)$ pentru $x \geq 0$ şi

$$u'(x) = \alpha'(x)\, a[\alpha(x)]\, f[\alpha(x)] \leq \alpha'(x)\, a[\alpha(x)]\, u[\alpha(x)] \leq$$
$$\leq \alpha'(x)\, a[\alpha(x)]\, u(x), \quad x \geq 0 \tag{6}$$

dacă ţinem seama şi de faptul că funcţia $u = u(x)$ este crescătoare pe semiaxa $x \geq 0$. Se observă că avem şi $u(x) \geq M \geq 0$ pentru $x \geq 0$. Integrând inegalitatea (ce rezultă din (6))

$$\frac{u'(s)}{u(s)} \leq \alpha'(s)\, a[\alpha(s)], \quad s \geq 0 \tag{7}$$

pe intervalul $[0, x]$ vom obţine

$$\left[\ln u(s)\right]\Big|_0^x \leq \int_0^x \alpha'(s)\, a[\alpha(s)]\, ds = \int_0^{\alpha(x)} a(s)\, ds \tag{8}$$

adevărată, în fond, pentru orice $x \geq 0$. Ţinând seama de faptul că $u(0) = M$, din inegalitatea (8) rezultă imediat majorarea (4), ceea ce încheie demonstraţia. ■

În mod perfect asemănător se demonstrează (exerciţiu !) şi următorul rezultat :

PROPOZIŢIA 2. *Dacă are loc inegalitatea*

$$f(x) \geq M + \int_0^{\alpha(x)} a(s) f(s)\, ds, \quad x \geq 0 \tag{9}$$

şi este îndeplinită ipoteza (i) *din* PROPOZIŢIA *1, precum şi ipoteza suplimentară*

$(ii)'$ $\alpha = \alpha(x)$ *este o funcţie crescătoare, cu derivată continuă pentru* $x \geq 0$ *şi satisfăcând condiţia* $\alpha(x) \geq x$ *pentru* $x \geq 0$, $\alpha(0) = 0$,

rezultă că are loc inegalitatea

$$f(x) \geq M e^{\int_0^{\alpha(x)} a(s)\, ds}, \quad x \geq 0. \tag{10}$$

Pe aceeaşi cale, folosită în cazul PROPOZIŢIEI 1, se poate demonstra un rezultat mai general şi anume :

PROPOZIŢIA 3. *Dacă are loc inegalitatea*

$$f(x) \leq M + \int_0^{\alpha(x)} a(s)\, g[f(s)]\, ds, \quad x \geq 0 \tag{11}$$

şi sunt îndeplinite ipotezele (i) *şi* (ii) *din* PROPOZIŢIA *1, precum şi ipotezele suplimentare*

(iii) *funcţia* $g = g(u)$ *este continuă şi nedescrescătoare pentru* $u \geq 0$, $g(0) = 0$ *şi* $g(u) > 0$ *pentru* $u > 0$, (*iv*) *$G = G(u)$ fiind o primitivă a funcţiei $1/g(u)$ pe semiaxa $u > 0$, are loc egalitatea $G(\infty) = \infty$,*

atunci rezultă că avem majorarea

$$f(x) \le G^{-1}\left[G(M) + \int_0^{\alpha(x)} a(s)\,ds\right], \quad x \ge 0. \tag{12}$$

Este evident că prin G^{-1} am notat inversa funcţiei $G = G(u)$, inversă al cărei domeniu de definiţie acoperă intervalul $[G(M), \infty)$. Ambele funcţii G şi G^{-1} sunt strict crescătoare pe întreg domeniul lor de definiţie.

Ca aplicaţie a acestei ultime PROPOZIŢII, vom demonstra o frumoasă inegalitate din cartea acad. Viorel BARBU ([1], p.27) : să se găsească o majorare pentru funcţia $u = u(x)$ care satisface relaţia

$$u^2(x) \le M + 2\int_0^x a(s)\,u(s)\,ds, \quad x \ge 0 \tag{13}$$

unde s-a presupus că $u = u(x)$ şi $a = a(x)$ sunt continue nenegative, iar $M > 0$ este o constantă. Dacă facem notaţia $f(x) = u^2(x)$, putem transcrie (13) sub forma

$$f(x) \le M + 2\int_0^x a(s)\sqrt{f(s)}\,ds, \quad x \ge 0 \tag{14}$$

şi suntem în cazul PROPOZIŢIEI 3, cu

$$g(u) = 2\sqrt{u}, \; G(u) = \sqrt{u}, \; G^{-1}(u) = u^2, \; G(M) = \sqrt{M} \text{ şi } \alpha(x) \equiv x.$$

Conform cu relaţia (12) putem scrie

$$f(x) \le \left[\sqrt{M} + \int_0^x a(s)\,ds\right]^2, \quad x \ge 0. \tag{15}$$

Prin urmare, din inegalitatea (13) deducem majorarea

$$u(x) \le \sqrt{M} + \int_0^x a(s)\,ds, \quad x \ge 0. \tag{16}$$

Evident, păstrând ipotezele, din inegalitatea

$$u^2(x) \le M^2 + 2\int_0^x a(s)\,u(s)\,ds, \quad x \ge 0 \tag{17}$$

deducem următoarea majorare :

$$u(x) \le M + \int_0^x a(s)\,ds, \quad x \ge 0. \tag{18}$$

BIBLIOGRAFIE

1. BARBU, Viorel : *Ecuaţii diferenţiale*. Editura Junimea, Iaşi, 1985.