O GENERALIZARE A UNEI TEOREME A LUI PAPPUS

Constantin COCEA[*]

Matematicianul PAPPUS din Alexandria a demonstrat următorul rezultat :

TEOREMĂ. *Dacă pe laturile BC, CA şi respectiv AB ale triunghiului ABC luăm punctele A', B', C' care împart laturile acestuia în acelaşi raport, atunci triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate.*

Teorema de mai jos generalizează şi completează această Teoremă a lui PAPPUS.

TEOREMA 1. *Fie ABC un triunghi. Pe laturile BC, CA şi respectiv AB ale acestuia construim spre exterior tringhiurile $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ direct asemenea între ele. Atunci :*

a) *Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate.*

b) *Cu segmentele AA', BB', CC' se poate construi un triunghi.*

Observaţia 1. Dacă $\lambda \in \mathbb{R}^*$ este un număr oarecare, iar pe laturile unui triunghi luăm punctele A', B', C' astfel încât

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \lambda ,$$

teorema lui PAPPUS se obţine ca un caz particular al *Teoremei 1* deoarece "triunghiurile" degenerate $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ sunt direct asemenea.

Demonstraţia TEOREMEI 1. **a)** Fie

$$\varphi = \sphericalangle A'CB = \sphericalangle B'AC = \sphericalangle C'BA$$

iar $\mu \in \mathbb{R}^*$ dat de

$$\mu = \frac{A'B}{BC} = \frac{B'C}{CA} = \frac{C'A}{AB} .$$

În demonstraţie vom folosi numere complexe. Considerăm ca origine a planului un punct oarecare $O(0)$ şi notăm cu litere mici corespunzătoare afixele punctelor configuraţiei. Deoarece A' se obţine din A printr-o rotaţie de unghi φ şi centru C care este urmată de o omotetie de centru C şi raport μ, avem

---

[*] *Profesor, Liceul "D.Cantemir", Iaşi*

$$a' - c = \rho(b - c) \iff a' = c + \rho(b - c) \tag{1}$$

unde $\rho = \mu(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Analog avem relațiile

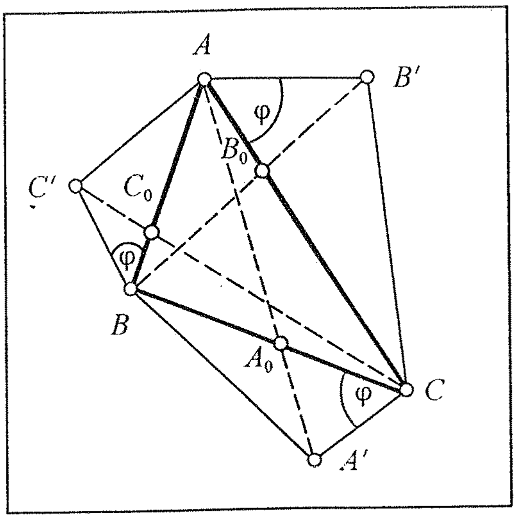
$$b' - a = \rho(c - a) \iff b' = a + \rho(c - a), \tag{2}$$

$$c' - b = \rho(a - b) \iff c' = b + \rho(a - b). \tag{3}$$

Din relațiile (1), (2), (3) urmează

$$a' + b' + c' = a + b + c, \tag{4}$$

deci triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate.



b) Relația (4) se mai poate scrie

$$(a' - a) + (b' - b) + (c' - c) = 0, \tag{4'}$$

de unde

$$|a' - a| \le |b' - b| + |c' - c| \tag{5}$$

sau

$$AA' \le BB' + CC'. \tag{5'}$$

Analog obținem încă două inegalități de tip (5′). Prin urmare cele trei segmente (a se vedea și figura alăturată) AA', BB', CC' pot fi laturile unui triunghi. ■

PROBLEMĂ DESCHISĂ. Dacă notăm cu σ și σ' ariile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ (respectiv), atunci

$$4\sigma' \ge \sigma.$$

Pentru cazul $\varphi = 0$ problema se poate rezolva relativ ușor, dar în cazul general nu suntem (deocamdată) în posesia unei demonstrații.

Observația 2. Proprietățile **a)** și **b)** se păstrează și în cazul când triunghiurile $A'BC$, $B'CA$ și $C'AB$ se construiesc *spre interior*.

Observația 3. Dacă triunghiurile asemenea $A'BC$, $B'CA$ și $C'AB$ sunt și isoscele atunci triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt *omologice* (adică dreptele AA', BB', CC' sunt concurente). Într-adevăr, fie punctele $\{A_0\} = AA' \cap BC$, $\{B_0\} = BB' \cap CA$, $\{C_0\} = CC' \cap AB$. Atunci au loc relațiile :

$$\frac{A_0B}{A_0C} = \frac{\sigma_{[ABA']}}{\sigma_{[ACA']}} = \frac{AB\sin(B + \varphi)}{AC\sin(C + \varphi)}, \tag{6.1}$$

$$\frac{B_0C}{B_0A} = \frac{\sigma_{[BCB']}}{\sigma_{[BAB']}} = \frac{BC\ \sin(C+\varphi)}{BA\ \sin(A+\varphi)}, \tag{6.2}$$

$$\frac{C_0A}{C_0B} = \frac{\sigma_{[CAC']}}{\sigma_{[CBC']}} = \frac{AC\ \sin(A+\varphi)}{BC\ \sin(B+\varphi)}. \tag{6.3}$$

Înmulţind membru cu membru egalităţile (6.1), (6.2), (6.3) şi aplicând reciproca teoremei lui CEVA, deducem că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. ♦

Observaţia 4. Dacă triunghiurile $A'BC$, $B'CA$ şi $C'AB$ sunt echilaterale, cum ele sunt (evident) asemenea, rezultă că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. Punctul lor de concurenţă este punctul TORRICELLI, T, al triunghiului ABC, punct pentru care suma distanţelor la vârfurile A, B, C este minimă.

Observaţia 5. Să notăm cu G_A, G_B, G_C centrele de greutate ale triunghiurilor echilaterale din observaţia precedentă. Cum triunghiurile G_ABC, G_BCA, G_CAB sunt isoscele, cu unghiurile de la bază egale cu $\pi/6$, rezultă că triunghiurile ABC şi $G_AG_BG_C$ respectă enunţul TEOREMEI 1 ; prin urmare :

(i) Tringhiurile ABC şi $G_AG_BG_C$ au acelaşi centru de greutate.

(ii) Segmentele (AG_A), (BG_B), (GC_C) sunt laturile unui triunghi.

(iii) Dreptele AG_A, BG_B, CG_C sunt concurente.

BIBLIOGRAFIE

1. BRÂNZEI, D., COCEA, C. & ANIŢA, S. : *Planul şi spaţiul euclidian.* Editura Academiei, Bucureşti, 1986.

2. COCEA, C. : *200 de probleme din geometria triunghiului echilateral.* Editura "Gh.Asachi", Iaşi, 1992.

3. COCEA, C. : *Noi probleme de geometrie.* Editura "Spiru Haret", Iaşi, 1997.

4. MIHEŢ, D. : Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie. *Caiete metodico - ştiinţifice,* Matematică, nr.41, Timişoara, 1987.

5. MODENOV, P.S.: *Zadači po geometriji,* Nauka, Moskva, 1979.