TEOREME DE CARACTERIZARE A TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE

Cătălin CALISTRU [+]

Scopul acestei *Note* este de a prezenta noi teoreme de caracterizare a triunghiurilor dreptunghice care, alături de celebra Teoremă a lui PITAGORA, să completeze o teorie capabilă – o dată în plus – să releve legăturile interesante care există între elementele de bază ale acestor triunghiuri.

TEOREMA 1. *Notațiile fiind cele cunoscute, să se arate că un triunghi este dreptunghic dacă și numai dacă*

$$\boxed{r = p - 2R.} \tag{1}$$

Demonstrație. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Are loc $a = 2R$ și avem

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{bc}{a+b+c} = \frac{bc(b+c-a)}{(b+c)^2 - a^2} = \frac{b+c-a}{2} =$$

$$= p - a = p - 2R, \tag{2}$$

adică $r = p - 2R$ și deci relația (1) este adevărată. Reciproc, să presupunem că în triunghiul ABC are loc relația (1) și să arătăm că triunghiul este dreptunghic. Vom folosi relațiile

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \tag{3.1}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \tag{3.2}$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \tag{3.3}$$

care sunt valabile în orice triunghi. Atunci relația (1) conduce la

$$2R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C), \tag{4}$$

iar din ultimele două relații găsim

$$1 + \cos A + \cos B + \cos C = \sin A + \sin B + \sin C. \tag{5}$$

Deoarece $A + B + C = \pi$, putem scrie egalitatea

[+] *Lector inginer, Univ. Tehnică Iași*

$$1 - \cos(B + C) + \cos B + \cos C = \sin(B + C) + \sin B + \sin C \tag{6}$$

din care rezultă

$$2\sin^2\frac{B+C}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \\ = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2} + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}, \tag{7}$$

egalitate echivalentă cu

$$\sin\frac{B+C}{2}\left(\sin\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) - \\ - \cos\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) = 0. \tag{8}$$

Deci am obținut relația

$$\left(\sin\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)\left(\sin\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) = 0 \tag{9}$$

care poate avea loc numai dacă cel puțin unul din cei doi facori este nul. Scriind primul factor sub forma

$$\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2} = -2\sin\frac{A+B-C}{4}\sin\frac{A-B+C}{4} \tag{10}$$

rezultă $A + B - C = 0$ sau $A - B + C = 0$, ceea ce implică $C = \pi/2$ sau $A = \pi/2$. Din anularea celui de al doilea factor din relația (9), rezultă imediat $B + C = \pi/2$, deci $A = \pi/2$. În toate cazurile, triunghiul este dreptunghic. Demonstrația este încheiată. ■

TEOREMA 2. *Fie r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise unui triunghi oarecare ABC, p semiperimetrul său și R raza cercului circumscris. Atunci, triunghiul este dreptunghic dacă și numai dacă*

$$\boxed{r_a + r_b + r_c = p + 2R.} \tag{11}$$

Demonstrație. Fie ABC un triunghi dreptunghic. Fără a particulariza, putem presupune $A = \pi/2$ și atunci $a = 2R$. Calculăm razele cercurilor exînscrise :

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{bc}{2(p-a)} = \frac{bc}{b+c-a} = \frac{bc(b+c+a)}{(b+c)^2 - a^2} = \frac{b+c+a}{2} = p, \tag{12.1}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} = \frac{bc}{2(p-b)} = \frac{bc}{a+c-b} = \frac{bc(a-c+b)}{a^2 - (c-b)^2} = \frac{a+b-c}{2} = p - c, \tag{12.2}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{bc}{2(p-c)} = \frac{bc}{a+b-c} = \frac{bc(a-b+c)}{a^2-(b-c)^2} = \frac{a+c-b}{2} = p-b, \quad (12.3)$$

Prin adunarea egalităților (12) rezultă

$$r_a + r_b + r_c = 3p - (b+c) = p + a = p + 2R \qquad (13)$$

şi deci formula (11) este adevărată.

Reciproc, să presupunem că în triunghiul ABC are loc relația (11) și să arătăm că triunghiul este dreptunghic. Vom presupune cunoscută relația

$$r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (14)$$

şi cele obținute prin permutări circulare, anume

$$r_b = 4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}, \quad r_c = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}. \qquad (15)$$

Înlocuind aceste valori în relația (11) și simplificând cu R, găsim

$$4\sum\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sum\sin A + 2 \qquad (16)$$

unde $\sum$ reprezintă suma permutărilor circulare, despre care s-a vorbit mai sus. Ne ocupăm de primul termen al sumei din membrul stâng al relației (16) :

$$\begin{aligned}
4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} &= 4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \\
&= 4\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\cdot\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \\
&= 4\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \qquad (17)\\
&= (1+\cos B)(1+\cos C) - \sin B\sin C = \\
&= 1 + \cos B + \cos C + \cos B\cos C - \sin B\sin C = 1 + \cos B + \cos C - \cos A.
\end{aligned}$$

Revenind la relația (16), scriem

$$\sum(1 + \cos B + \cos C - \cos A) = \sum\sin A + 2 \qquad (18)$$

care este echivalentă cu

$$1 + \cos A + \cos B + \cos C = \sin A + \sin B + \sin C. \qquad (19)$$

Aceasta însă atrage faptul că triunghiul ABC este dreptunghic, aşa cum s-a văzut în demonstrația teoremei precedente. ∎

TEOREMA 3. *Notațiile fiind cele consacrate, un triunghi este dreptunghic dacă și numai dacă suma razelor cercurilor înscris și exînscrise este egală cu perimetrul său, adică*

$$\boxed{r + r_a + r_b + r_c = 2p.} \tag{20}$$

Demonstrație. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC și atunci avem

$$r = p - 2R, \quad r_a + r_b + r_c = p + 2R \tag{21}$$

din care rezultă evident că relația (20) este adevărată.

Reciproc, plecând de la relația (20) (presupusă adevărată) și folosind expresia lui r dată de formula (3), precum și expresiile razelor cercurilor exînscrise date de (14) și (15), găsim

$$4R\sin\frac{A}{2}\,\sin\frac{B}{2}\,\sin\frac{C}{2} + 4R\sum\sin\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2}\,\cos\frac{C}{2} = 2R\sum\sin A\,. \tag{22}$$

Acum, ținând seama de relația (3.2), precum și de relația (17), putem scrie

$$\sum\cos A - 1 + \sum(1 + \cos B + \cos C - \cos A) = 2\sum\sin A \tag{23}$$

din care se deduce aceeași relație (19), care conduce la concluzia că triunghiul ABC este dreptunghic. Demonstrația este încheiată.

■