UN PROCEDEU DE OBȚINERE A UNOR INEGALITĂȚI PENTRU ARIA ȘI MEDIANELE UNUI TRIUNGHI

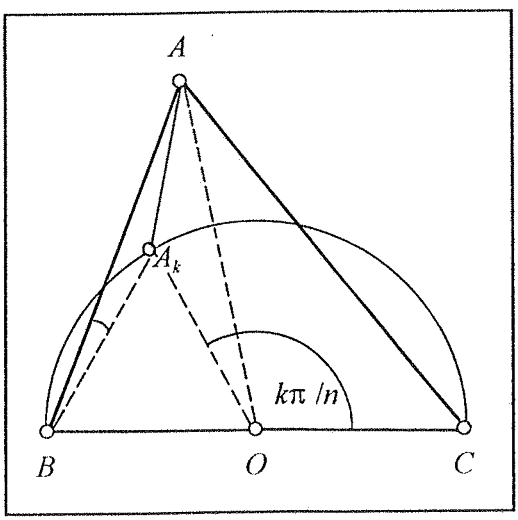
Paraschiva BÎRSAN[◊]

1. Scopul propus este cel de a arăta cum, pornind de la o anumită configurație geometrică și desfășurând o anumită procedură de calcul, putem obține un tip de *inegalități relativ la* ***aria*** *și* ***medianele*** *unui triunghi.*

Fie ABC un triunghi oarecare. Construim semicercul de diametru BC și situat în semiplanul determinat de dreapta BC și punctul A; fie O centrul său. Împărțim acest semicerc în n părți egale prin punctele

$$C = A_0, A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n = B.$$

Evident, arcele $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ au măsurile egale cu π / n.



Să calculăm lungimea segmentelor AA_k. Vom utiliza teorema cosinusului în triunghiul AA_kB.

Pentru unghiul $\sphericalangle ABA_k$ avem respectiv măsurile

$$B - \frac{k\pi}{2n} \quad \text{sau} \quad \frac{k\pi}{2n} - B,$$

după cum punctul A_k (situat mereu pe semicerc) este situat față de dreapta AB în semiplanul în care se află punctul C sau în celălalt semiplan și indiferent dacă unghiul $\hat{A}$ este ascuțit sau obtuz.

Prin urmare,

$$AA_k^2 = c^2 + BA_k^2 - 2cBA_k \cos\left[\pm\left(B - \frac{k\pi}{2n}\right)\right]$$

sau deoarece, $BA_k = a\cos\frac{k\pi}{2n}$,

$$AA_k^2 = c^2 + a^2\cos^2\frac{k\pi}{2n} - 2ac\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\left(B - \frac{k\pi}{2n}\right).$$

◊ *Profesor, Liceul "G.Ibrăileanu", Iași*

Ţinând seama de formulele $\cos B = (a^2 + c^2 - b^2)/2ac$ şi $2S = ac \sin B$, putem scrie

$$AA_k^2 = c^2 + a^2 \cos^2 \frac{k\pi}{2n} - 2ac \cos^2 \frac{k\pi}{2n} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - 2S \sin \frac{k\pi}{n}$$

şi, deci, pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$ avem

$$AA_k^2 = b^2 \cos^2 \frac{k\pi}{2n} + c^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} - 2S \sin \frac{k\pi}{n} . \tag{1}$$

2. Vom obţine un *prim tip de inegalităţi* prelucrând relaţiile

$$AA_k \geq 0 \text{ şi } (AA_k = 0 \iff A = A_k), \ k = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Într-adevăr, ţinând seama de (1) deducem că

$$4S \leq b^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} + c^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n}, \ k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A şi având unghiul $B = k\pi/2n$. Să observăm că prin trecerea lui k în $n-k$ se obţine

$$4S \leq b^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} + c^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, \ k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3}$$

semnul de egalitate având loc (pentru fiecare k separat) dacă şi numai dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A cu $A = \pi/2$ şi $C = k\pi/2n$. Combinate, inegalităţile (2) şi (3) conduc la

$$4S \leq \min\left\{ b^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} + c^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, b^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} + c^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} \right\} \tag{4}$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$, cu egalitate dacă şi numai dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A având un unghi ascuţit egal cu $k\pi/2n$.

Să mai scriem şi următoarele formule analoage cu (4) :

$$4S \leq \min\left\{ c^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} + a^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, c^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} + a^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} \right\}, \tag{5}$$

$$4S \leq \min\left\{ a^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} + b^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, a^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} + b^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} \right\}, \tag{6}$$

cu precizarea cazului de egalitate uşor de făcut. În fine, din (4), (5) şi (6) obţinem

$$\begin{aligned} 4S \leq \min_{k=1}^{[n/2]} \Big\{ & b^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} + c^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, b^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} + c^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n}, \\ & c^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} + a^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, c^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} + a^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n}, \\ & a^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} + b^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, a^2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} + b^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} \Big\}, \end{aligned} \tag{7}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A având un unghi ascuţit egal cu una oarecare din valorile $k\pi / 2n$, $1 \le k \le \left[\frac{n}{2}\right]$.

CAZURI PARTICULARE.

(i) $\boxed{n \text{ par } \& \ k = \frac{n}{2}}$

În acest caz se obţine cunoscuta inegalitate (v. [1])

$$4S \le \min\{b^2 + c^2, c^2 + a^2, a^2 + b^2\}. \tag{8}$$

(ii) $\boxed{n = 3}$ permite lui k numai valoarea $k = 1$ iar inegalitatea (7) devine

$$4\sqrt{3}\,S \le$$
$$\le \min\{3b^2 + c^2, b^2 + 3c^2, 3c^2 + a^2, c^2 + 3a^2, 3a^2 + b^2, a^2 + 3b^2\}, \tag{9}$$

egalitatea având loc numai pentru triunghiurile dreptunghice cu un unghi de $30°$. Se ştie [1] că are loc şi

$$4\sqrt{3}\,S \le a^2 + b^2 + c^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 - (a-b)^2, \tag{10}$$

cu egalitate numai pentru triunghiurile echilaterale.

Din faptul că egalitatea are loc în (9) şi (10) în situaţii diferite, deducem că nici (9) nu implică (10) şi nici invers.

3. Pentru a obţine *inegalităţi relative la* ***medianele*** m_a, m_b, m_c ale unui triunghi ABC, vom considera triunghiul OAA_k şi vom exprima faptul că o latură este cel mult egală cu suma celorlalte două. Dacă unghiul $\hat{A}$ este ascuţit (obtuz) vom avea

$$OA \le OA_k + AA_k \ \text{(respectiv } OA_k \le OA + AA_k\text{)},$$

egalitatea având loc, în ambele cazuri, dacă şi numai dacă punctele O, A şi A_k sunt colineare. Aceste afirmaţii sunt adevărate pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Avem în vedere numai primul caz, $m(\sphericalangle A) < \pi/2$ (dacă unghiul este obtuz se obţine aceeaşi inegalitate geometrică). Aşadar, avem

$$m_a \le \frac{a}{2} + AA_k \quad \text{sau} \quad m_a - \frac{a}{2} \le AA_k,$$

de unde, prin ridicare la pătrat (căci $m_a - a/2 > 0$) şi utilizând (1), rezultă că

$$m_a^2 - a\,m_a + \frac{a^2}{4} \le b^2 \cos^2 \frac{k\pi}{2n} + c^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} - 2S \sin \frac{k\pi}{n}.$$

Cum $2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$, se ajunge la

$$am_a \geq 2S \sin\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}(c^2 - b^2)\cos\frac{k\pi}{n}$$

sau

$$m_a \geq h_a \sin\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2a}(c^2 - b^2)\cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{11}$$

semnul de egalitate având loc atunci și numai atunci când mediana corespunzătoare laturii BC face un unghi de $k\pi / n$ cu aceasta. Mai mult, putem scrie

$$m_a \geq \max_{k=1}^{n-1}\left\{h_a \sin\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2a}(c^2 - b^2)\cos\frac{k\pi}{n}\right\}$$

și, întrucât $\sin\frac{(n-k)\pi}{n} = \sin\frac{k\pi}{n}$ & $\cos\frac{(n-k)\pi}{n} = -\cos\frac{k\pi}{n}$, avem

$$m_a \geq \max_{k=1}^{[n/2]}\left\{h_a \sin\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2a}|b^2 - c^2|\cos\frac{k\pi}{n}\right\} \tag{12}$$

cu egalitate pentru acele și numai acele triunghiuri pentru care mediana ce corespunde laturii BC face cu aceasta un unghi având una din valorile $k\pi / n$, $1 \leq k \leq n-1$.

Inegalități analoage cu (11) și (12) au loc și relativ la medianele m_b, m_c.

CAZURI PARTICULARE

(i) Pentru $\boxed{n = 2}$ inegalitatea (12) se reduce la inegalitatea banală $m_a \geq h_a$, cu egalitate pentru triunghiul isoscel de vârf A.

(ii) Pentru $\boxed{n = 3}$ se obține

$$m_a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}h_a + \frac{1}{4a}|b^2 - c^2|,$$

având egalitate pentru unghiurile $\pi / 3$ și $2\pi / 3$ dintre BC și mediana ce-i corespunde.

(iii) Pentru $\boxed{n = 4}$ vom avea

$$m_a \geq \max\left\{h_a, \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h_a + \frac{|b^2 - c^2|}{2a}\right)\right\},$$

cu egalitate în cazul triunghiurilor pentru care BC și mediana ce-i corespunde fac un unghi de $\pi / 4$ sau $\pi / 2$ sau $3\pi / 4$.

Observaţie. Inegalităţile (7) şi (12) se complică pe măsură ce n creşte, dar sunt mai rafinate şi devin egalităţi într-un număr de situaţii din ce în ce mai mare.

BIBLIOGRAFIE

1. BOTTEMA, O. *et al* : *Geometric Inequalities*. Groningen, 1969.