PROBLEME CU PAŞI PE $\mathbb{Z}$

Alexandru BARNEA [o]

Scopul lucrării : autorul şi-a propus să prezinte cazul general al unui anumit tip de probleme, denumite "*probleme cu paşi pe* $\mathbb{Z}$" :

- prima parte constă în *prezentarea problemelor de plecare* ;
- partea a doua reprezintă *rezolvarea problemei în cazul general* ;
- partea a treia prezintă câteva *aplicaţii ale metodelor expuse în lucrare* ;
- partea a patra prezintă *abordarea problemei în domeniul informaticii.*

1. PREZENTAREA PROBLEMELOR DE PLECARE

Ideea lucrării a apărut studiind o problemă propusă de Liviu PÂRŞAN la etapa naţională 1989 (a Olimpiadei de matematică) şi problema **E : 11215** din *Gazeta Matematică* 7-8 / 1996, autor Lucian DRAGOMIR.

P₁ O mulţime M, formată numai din numere naturale, satisface condiţiile :

(i) $1 \in M$;

(ii) dacă $x \in M$, atunci $3x \in M$;

(iii) dacă $5x - 4 \in M$, atunci $x \in M$.

Demonstraţi că $11 \in M$.

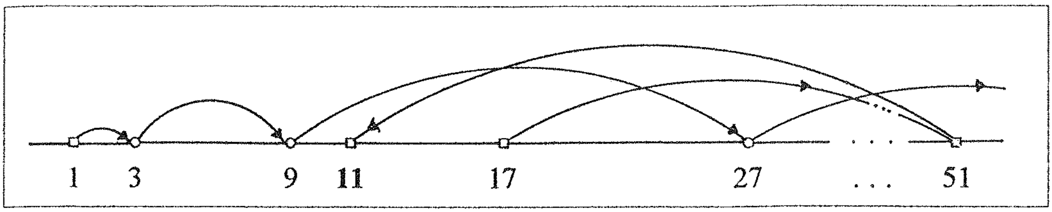
[Liviu PÂRŞAN, Etapa naţională 1989]

Soluţie. Din condiţiile (i) şi (ii) rezultă că $3 \in M$ şi, mai general, $3^n \in M$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ = mulţimea numerelor naturale. Pentru ca $11 \in M$, ar fi suficient ca $5 \cdot 11 - 4$ să aparţină lui M. Deoarece $51 \neq 3^n$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deocamdată nu putem afirma că 51 aparţine lui M, ceea ce înseamnă că trebuie să găsim un alt punct pentru a păşi pe mulţimea M.

Căutând un număr natural x, cu proprietatea $5x - 4 = 3^n$ pentru un anume $n \in \mathbb{N}$, observăm că putem lua $x = 17$ şi $n = 4$, deoarece $5 \cdot 17 - 4 = 3^4$. Din condiţia (iii) şi faptul că $3^4 \in M$, rezultă că $17 \in M$. Din condiţia (ii) şi faptul că $17 \in M$, rezultă că $3 \cdot 17 = 51 \in M$ şi în final deducem că $11 \in M$. ($q.e.d.$)

---

[o] *Elev, Lic. Internat "C.Negruzzi", Iaşi*



P_2 Fie M o mulţime de numere întregi, cu proprietăţile :

(a) $1 \in M$;

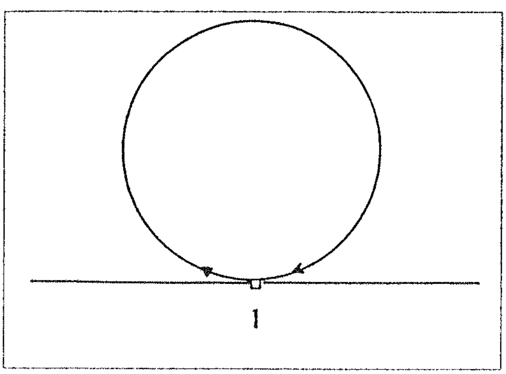
(b) $x \in M$ implică $(x^2 - x + 1) \in M$;

(c) $(x^2 - 3x + 3) \in M$ implică $x \in M$.

Demonstraţi că $13 \in M$.

[Lucian DRAGOMIR, **E : 11215**]

Soluţie. $1 \in M$ implică $1^2 - 1 + 1 = 1$, deci nu putem păşi pe mulţimea numerelor întregi, pornind de la 1, deoarece se formează o buclă infinită inchisă (sugerată de figura de mai jos).



Vom căuta (deci) o altă valoare de pornire, rezolvând ecuaţia $x^2 - 3x + 3 = 1 \in M$, care ne conduce la $x^2 - 3x + 2 = 0$, echivalent cu $x = 1$ sau $x = 2$, deci $2 \in M$ conform cu proprietatea (c). Plecând de la relaţia $2 \in M$ şi folosind (b), rezultă

$2^2 - 2 + 1 = 3 \in M$,

$3^2 - 3 + 1 = 7 \in M$,

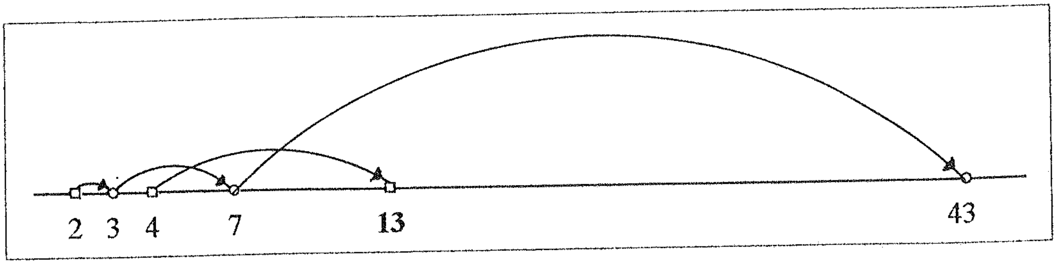
$7^2 - 7 + 1 = 43 \in M$, etc.

Dar observăm că nu cădem cu paşii pe 13 ; deci vom căuta un alt punct de plecare, rezolvând ecuaţia $x^2 - 3x + 3 = 2$, care ne conduce la $x^2 - 3x + 1 = 0$ dar care nu are rădăcini întregi. Plecând de la relaţia $3 \in M$ şi rezolvând ecuaţia $x^2 - 3x + 3 = 3$, echivalentă cu $x^2 - 3x = 0$, găsim $x = 0$ sau $x = 3$, care ne aduce informaţia suplimentară că $0 \in M$. Luând ca punct de plecare $x = 0$ găsim $0^2 - 0 + 1 = 1 \in M$ şi – în continuare – se formează bucla infinită închisă, despre care am vorbit. Plecând cu valoarea $x = 3$, găsim $3^2 - 3 + 1 = 7 \in M$, deci cădem pe paşii făcuţi atunci când am pornit de la 2, paşi care nu cad pe numărul 13. Continuăm ; $x^2 - 3x + 3 = 7$

echivalent cu $x^2 - 3x - 4 = 0$ implică existența a două posibilități :

1° $x = -1 \in M$ care implică $(-1)^2 - (-1) + 1 = 3 \in M$, deci cădem pe pașii făcuți anterior și

2° $x = 4 \in M$ care implică $4^2 - 4 + 1 = 13 \in M$, deci $13 \in M$. *(q.e.d.)*



2. Prezentarea unor metode generale de abordare a problemei

Generalizarea problemei

P_G

Fie f, g două funcții polinomiale și M o mulțime de numere întregi, care satisface condițiile

① $k \in M$,

② $x \in M$ implică $f(x) \in M$,

③ $g(x) \in M$ implică $x \in M$.

Arătați că $p \in M$.

Soluție. Evident, s-a presupus că atât k cât și p sunt două numere întregi fixate (cu $p \neq k$). Convenim să notăm $f_1 = f, f_2 = f \circ f, \ldots, f_n = f \circ f \circ \ldots \circ f =$ iterata de ordinul n a funcției f. De exemplu, $f_2(x) = f(f(x))$, $f_3(x) = f(f_2(x))$, etc. Conform condițiilor ① și ②, rezultă $f_n(k) \in M, (\forall)\, k \in \mathbb{N}$. Se pot ivi două situații și anume :

(i) Există un număr natural n astfel încât $p = f_n(k)$. În acest caz avem $p \in M$, deci problema este rezolvată.

(ii) $p \neq f_n(k)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci trebuie să găsim un alt punct de plecare, (diferit de k) pentru a genera pași prin mulțime, dintre care unul să cadă peste numărul dat p. Mai întâi, vom considera ecuația $g(x) = k$, pentru care căutăm soluții întregi x_0. Dacă am găsit o anumită soluție x_0, conform condiției ③ rezultă $x_0 \in M$ și deci avem o altă submulțime a lui M formată din x_0 și toate numerele $f_n(x_0)$, cu $n \in \mathbb{N}$. Dacă $p \neq x_0$ și $p \neq f_n(x_0)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și nici nu mai avem alte soluții întregi ale ecuației $g(x) = k$, vom considera ecuația $g(x) = f(k)$ sau, în formă echivalentă, $g(x) = f_1(k)$ și vom repeta procedeul aplicat în cazul ecuației anterioare $g(x) = k$.

Dacă nici acum nu reuşim să cădem peste numărul p, va trebui să considerăm ecuaţia $g(x) = f_2(k)$ şi să aplicăm acelaşi procedeu, etc.

Pe scurt, cele descrise mai sus pot fi rezumate astfel :

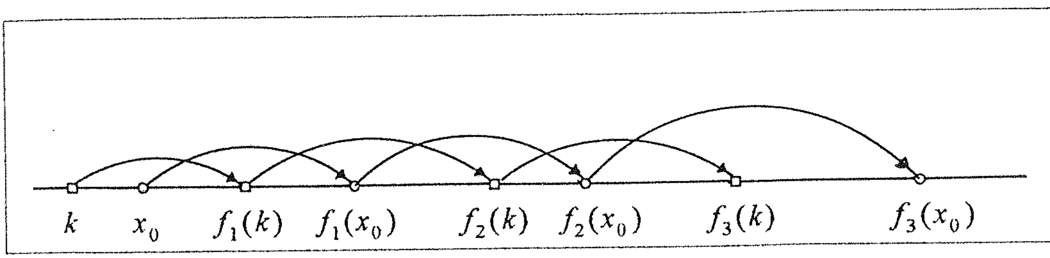
Să presupunem că x_0 = *întreg este soluţie pentru* (cel puţin) *una din ecuaţiile* $g(x) = k$, $g(x) = f_n(k)$ *cu* $n \in \mathbb{N}$. *Dacă şirul*

$$x_0, f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$$

conţine numărul dat p, *rezultă* $p \in M$ *şi problema este rezolvată.*

Greutatea constă tocmai în găsirea unei astfel de valori iniţiale $x_0 \in M$, de la care să înceapă paşii pe mulţimea respectivă. Se presupune că cel care a propus o astfel de problemă s-a asigurat de existeţa măcar a unei astfel de valori x_0.

Observaţie. Dacă polinoamele f şi g, precum şi numerele întregi k şi p sunt luate la întâmplare, este posibil ca problema generalizată despre care am discutat fie să nu poată fi rezolvată, fie să se constate că este greşită, adică numărul p să nu aparţină mulţimii M.



3. APLICAŢII

3.1 Fie M o mulţime de numere întregi cu proprietăţile :

(a) $1 \in M$;

(b) $x \in M$ implică $(-2x^2 + x + 1) \in M$;

(c) $(-x) \in M$ implică $x \in M$.

Demonstraţi că $(-44) \in M$.

Soluţie. $1 \in M \Rightarrow (-2 \cdot 1^2 + 1 + 1) \in M$, adică $0 \in M$. Mai departe,

$$0 \in M \Rightarrow (-2 \cdot 0 + 0 + 1) = 1 \in M.$$

Se formează o buclă infinită închisă şi deci nu vom putea cădea peste numărul -44. Căutăm deci un alt punct de plecare ; rezolvând ecuaţia $-x = 1$ găsim $-1 \in M \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-2 \cdot (-1)^2 - 1 + 1) = -2 \in M \Rightarrow_{(c)} 2 \in M \Rightarrow_{(b)}$$

$$\Rightarrow (-2\cdot(2)^2+2+1) = -5 \in M \Rightarrow_{(c)} 5 \in M \Rightarrow_{(b)}$$
$$\Rightarrow (-2\cdot 5^2+5+1) = -44 \in M. \qquad \square$$

3.2 Fie M o mulţime de numere întregi cu proprietăţile :

(a) $-1 \in M$;

(b) $x \in M$ implică $(x^3+x^2-x) \in M$;

(c) $(3x-5) \in M$ implică $x \in M$.

Demonstraţi că $50 \in M$.

Soluţie. $-1 \in M \Rightarrow_{(b)} ((-1)^3+(-1)^2-(-1)) = 1 \in M \Rightarrow_{(b)} 1+1-1 = 1 \in M$, deci se formează o buclă infinită închisă. Rezolvând ecuaţia $3x-5=1$ găsim

$$x = 2 \in M \Rightarrow_{(b)} 8+4-2 = 10 \in M\ ;$$

analog,

$$3x-5 = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow_{(c)} 5 \in M \Rightarrow_{(b)} 125+25-5 = 145 \in M.$$

În fine, din ecuaţia $3x-5=145$ găsim $x = 50 \in M$. $\square$

3.3 Fie M o mulţime inclusă în $\mathbf{Z}$ care verifică relaţiile :

(a) $1 \in M$;

(b) $x \in M$ implică $(x^4-x^2+1) \in M$;

(c) $(5-2x) \in M$ implică $x \in M$.

Demonstraţi că $13 \in M$.

Soluţie. $1 \in M \Rightarrow_{(b)} (1^4-1^2+1) = 1 \in M \Rightarrow 1-1+1 = 1 \in M$, deci se formează o buclă infinită închisă. Trebuie găsit un alt punct de plecare în M. Rezolvând ecuaţia $5-2x=1$ găsim

$$x = 2 \in M \Rightarrow_{(b)} 2^4-2^2+1 = 13 \in M. \qquad \square$$

3.4 Fie M o mulţime inclusă în $\mathbb{Z}$ care verifică relaţiile :

(a) $3 \in M$;

(b) $x \in M$ implică $x^2+1 \in M$;

(c) $3x-2 \in M$ implică $x \in M$.

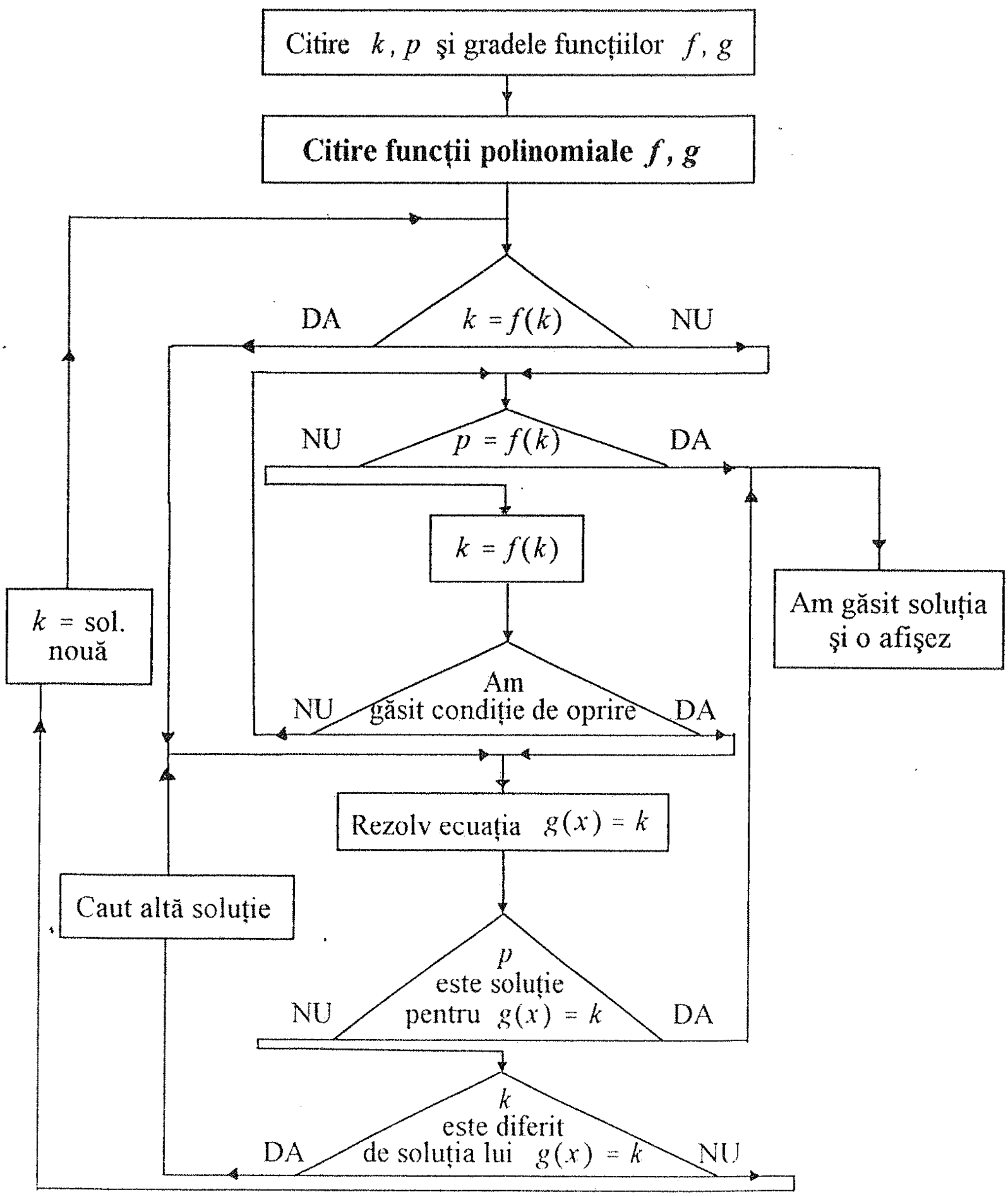
Demonstraţi că $84101 \in M$.

Soluţie. $3 \in M \Rightarrow_{(b)} 10,\ 101,\ 10202,\ 104080805, \ldots \in M$. Deoarece nu am căzut peste numărul dat, căutăm alt punct de pronire. Din $3x - 2 = 10$ rezultă $x = 4 \in M$ şi – în continuare (aplicând succesiv aceeaşi condiţie (b))) – obţinem

$$4 \in M \Rightarrow_{(b)} 17, 290, 84101, \ldots \in M. \text{ Deci } 84101 \in M. \qquad \square$$

4. PREZENTAREA INFORMATICĂ A PROBLEMEI

Problema se pretează foarte bine la o abordare algoritmico-informatică. Succesiunea de operaţii pentru cazul general, care conduc la soluţie, este descrisă de schema logică de mai jos.



Schema logică din pagina precedentă face posibilă elaborarea unui program pentru rezolvarea problemelor cu paşi pe $\mathbb{Z}$, de tipurile considerate, chiar şi într-un limbaj de programare simplu (de exemplu BASIC sau similar). Dar nu ne-am propus prezentarea unui astfel de program în spaţiul acestei Note .

BIBLIOGRAFIE

1. BARBU, I., BĂRĂSCU, C., LASCU, M., PAVELESCU, N. : *Olimpiadele naţionale de matematică, 1983 - 1990*. Râmnicu Vâlcea.

2. Colecţia *GAZETEI MATEMATICE,* 1996.