Anul XVII, Nr. 2 **Iulie – Decembrie 2015**

RECREAŢII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROFESORI

$$e^{i\pi} = -1$$

Asociaţia „Recreaţii Matematice”
IAŞI – 2015

Semnificaţia formulei de pe copertă. Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fundamentale ale matematicii: *ARITMETICA* - reprezentată de 1; *GEOMETRIA* – reprezentată de π; *ALGEBRA* – reprezentată de i; *ANALIZA MATEMATICĂ* – reprezentată de e.

Materialele vor fi trimise la una dintre adresele: t-birsan@yahoo.com , profgpopa@yahoo.co.uk

TIPĂRITĂ LA BLUE SIM&Co IAŞI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0332 111021, 0721 571705; e-mail: simonaslf@yahoo.com

ISSN 1582 – 1765

Anul XVII, Nr. 2 Iulie – Decembrie 2015

RECREAŢII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROFESORI

$$e^{i\pi} = -1$$

Revistă cu apariţie semestrială

EDITURA „RECREAŢII MATEMATICE”

IAŞI - 2015

Al VIII-lea Congres al Matematicienilor Români

Primele congrese ale matematicienilor români au avut loc în 1929 (Cluj) şi în 1932 (Turnu Severin) şi au fost urmate, după cel de-al doilea război mondial, de congresele din 1945 şi 1956 (Bucureşti). În perioada comunistă a ţării acest şir a fost întrerupt, urmând ca după evenimentele din 1989 congresele matematicienilor români să fie organizate cu regularitate din patru în patru ani: în 2003 la Piteşti, în 2007 la Bucureşti, iar în 2011 la Braşov. În acest an, 2015, gazda **Congresului Matematicienilor Români, ediţia a VIII-a**, a fost *Universitatea ,,Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi*, prima universitate din ţară, fondată în 1860.

Congresul şi-a desfăşurat lucrările în perioada 26 iunie – 1 iulie 2015, în sălile Facultăţii de matematică din Iaşi, facultate la care au predat matematicieni de mare prestigiu, precum *Alexandru Myller, Vera Myller Lebedev, Octav Mayer, Dumitru Mangeron, Mendel Haimovici, Constantin Corduneanu* şi mulţi alţii.

Deschiderea Congresului a avut loc în Aula Magna ,,M. Eminescu" a universităţii ieşene, prin cuvântul acad. prof. dr. *Viorel Barbu.* Universitatea gazdă a fost reprezentată de prof. dr. *Henri Luchian,* prorector pentru relaţii internaţionale. Au mai luat cuvântul prof. *Pavel Exner,* preşedinte al *EMS* (*European Mathematical Society*), prof. dr. *Lucian Beznea*, director al IMAR, prof. dr. *Radu Gologan,* preşedintele SSMR şi prof. dr. *Cătălin Lefter*, decanul Facultăţii de matematică din Iaşi.

În comitetul de organizare a Congresului s-au aflat reprezentanţi ai *Academiei Române*, ai *Institutului de Matematică ,,Simion Stoilow"* (IMAR), ai *Universităţilor din Bucureşti şi Iaşi*, ai *Societăţii de Matematică din România* (SSMR) şi ai *Institutului de matematică ,,Octav Mayer" al Academiei Române, filiala Iaşi.* Printre participanţi s-a aflat şi fostul director al IMAR, prof. dr. *Vasile Brânzănescu*, care a fost unul dintre organizatorii ediţiilor precedente ale congresului.

Ca o noutate, pentru prima dată au fost decernate premii în cadrul Congresului. La festivitatea de deschidere a lucrărilor Congresului, premiul oferit de *Fundaţia ,,Nicolae Dinculeanu"* a fost înmânat cercetătorului *Alexandru Popa*, de la IMAR Bucureşti, graduat la Universitatea Princeton şi cu titlul de Ph.D. obţinut la Universitatea Harvard. Câştigătorul premiului trebuie să aibă o activitate matematică prestigioasă, să fie sub 40 de ani şi să lucreze în România. Menţionăm că profesorul *Nicolae Dinculeanu* (Florida), cunoscut şi apreciat pentru realizările sale de comunitatea matematică internaţională şi care este ctitorul fundaţiei care-i poartă numele, a participat la Congresul Matematicienilor Români din 2003, iar în anul acesta a împlinit venerabila vârstă de 90 de ani.

Ca o recunoaştere a valorii şcolii de matematică românească, în cadrul mesei festive care a avut loc la Hotelul Unirii din Iaşi, preşedintele EMS, prof. *Pavel Exner* de la Academia Republicii Cehe din Praga, a înmânat un premiu unui matematician care lucrează în România, prof. *Liviu Păunescu*, precum şi un al doilea unui matematician român care lucrează în străinătate, prof. *Andrei Neguţ* (Columbia, SUA).

Pentru a oferi date concrete legate de Congres, amintim că numărul participanţilor se ridică la 400, număr cuprinzând atât pe susţinătorii prezentărilor orale, cât şi pe cei care au prezentat postere. Jumătate din numărul acestora sunt profesori ai diferitelor universităţi, institute de matematică sau şcoli din România. Cealaltă parte cuprinde în marea sa majoritate matematicieni români din Uniunea Europeană, SUA, Canada, Rusia, Turcia, Japonia, Australia, Israel, Algeria, Kuweit, Iran etc. Printre participanţi, semnalăm şi ne bucură prezenţa invitaţilor din Republica Moldova. Restul participanţilor la Congres îl reprezintă matematicienii străini, cei mai mulţi dintre ei fiind italieni.

Congresul a avut nouă secţiuni: 1) Algebră şi teoria numerelor; 2) Geometrie diferenţială şi complexă, Topologie; 3) Analiză reală şi complexă, Teoria potenţialului; 4) Ecuaţii ordinare şi cu derivate parţiale, metode variaţionale şi control optimal; 5) Analiză funcţională, Teoria operatorilor, Algebre de operatori şi Fizică matematică; 6) Probabilitaţi, Analiză stocastică şi Statistică matematică; 7) Mecanică, Analiză numerică, Modele matematice în ştiinţe; 8) Tehnici de calcul, Cercetări operaţionale, Programare matematică; 9) Istoria şi filosofia matematicii.

Dintre participanţii cu vârste venerabile care au onorat Congresul, ne mândrim cu prezenţa acad. prof. dr. *Solomon Marcus*, care la cei 90 de ani împliniţi de curând continuă să fie în prim-planul vieţii matematice româneşti, cât şi cu participarea acad. prof. dr. *Radu Miron*, care a prezentat cartea pe care a publicat-o (în colaborare) recent.

Dintre matematicienii români consacraţi din diaspora, care au participat şi la ultimele ediţii ale Congresului, enumerăm: *Dan Burghelea* (Columbus - Ohio), *Henri Moscovici* (Columbus - Ohio), *Mitrofan Cioban* (R. Moldova), iar dintre cei care au absolvit Facultatea de Matematică din Iaşi, menţionăm pe *Daniel Tătaru* (Berkeley, CA), Izu Vaisman (Israel), *Eleni Ionel* (Stanford) şi *Liviu Nicolaescu* (Notre Dame).

În cadrul Congresului a mai fost organizată o masă rotundă la Colegiul Naţional, în care s-au purtat dialoguri pe tema învăţământului românesc, conduse de preşedintele SSMR, prof. dr. *Radu Gologan.* O conferinţă satelit la cel de-al VIII-lea Congres al Matematicienilor Români o reprezintă Conferinţa Naţională de Problemistică şi Didactica Matematicii desfăşurată în perioada 26-27 iunie 2015 la Liceul Teoretic de Informatică ,,Grigore C. Moisil" din Iaşi.

O acţiune binevenită pentru contactul cu frumuseţile naturale şi spaţiul cultural ale Moldovei o reprezintă excursiile realizate pe două itinerarii: unul spre Suceava, având ca obiective mănăstirile Moldoviţa, Suceviţa şi Voronet, iar celălalt spre Neamţ, cu următoarele obiective: palatul de la Ruginoasa al domnitorului Al. I. Cuza, mănăstirile Văratec şi Agapia, castelul de la Miclăuşeni şi Hanul Ancuţei.

Al VIII-lea Congres al Matematicienilor Români, prin conferinţele şi lucrările prezentate, care au ilustrat toate domeniile de cercetare actuale ale matematicii, prin schimbul de idei şi contactele prilejuite, reprezintă o reuşită şi un câştig în plan profesional individual al participanţilor şi, în plan general, o contribuţie românească la progresul cercetărilor în domeniul matematicii.

Cornelia-Livia BEJAN
Universitatea Tehnică ,,Gh. Asachi" Iaşi

Curbe de lărgime constantă. Triunghiul lui Reuleaux

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. The aim of this article consists in informing the readers on the curves of constant width and - especially - on the Reuleaux triangle with its applications.
Keywords: curve of constant width, Reuleaux triangle, Barbier theorem.

MSC 2010: 97G10.

Cercul are proprietatea că *distanţa dintre două tangente paralele ale sale este aceeaşi, oricare ar fi perechea de tangente considerată*; anume, această distanţă este lungimea diametrului cercului. Se pune întrebarea: această proprietate este caracteristică cercului? Răspunsul este negativ, iar aprofundarea acestei chestiuni ne conduce la o clasă remarcabilă de curbe având proprietăţi interesante şi aplicaţii importante în tehnică – este vorba de *curbele de lărgime constantă*.

Această prezentare are scop informativ. Pentru a face mai simplă expunerea vom considera că toate curbele ce vor interveni sunt *convexe* (în fapt, prin aceasta nu s-a impus o restricţie, deoarece curbele la care ne vom referi sunt în mod necesar convexe). Vom face apel în mod curent la cunoştinţe elementare privind curbele şi mulţimile convexe [**1**, **4**].

1. Definiţii şi exemple. Dată o curbă plană închisă $\mathcal{C}$ şi o direcţie Δ, se numeşte *lărgimea curbei $\mathcal{C}$ în direcţia Δ distanţa d între dreptele de sprijin*[1] *d_1 şi d_2 ale curbei $\mathcal{C}$ ce sunt paralele între ele şi perpendiculere pe Δ* (fig. 1). *Dacă lărgimea curbei $\mathcal{C}$ este aceeaşi în orice direcţie, se spune că ea este de lărgime constantă.*

Există o clasă vastă de curbe de lărgime constantă. Cercul este cel mai simplu exemplu de acest fel. Un alt exemplu simplu este *triunghiul lui Reuleaux*[2]: cu centrul în fiecare vârf al triunghiului echilateral ABC se construieşte arcul de cerc ce uneşte celelalte două vârfuri rămase şi se obţine triunghiul curbiliniu format din arcele $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ (fig. 2). Dacă l este lungimea laturii triunghiului echilateral, pentru triunghiul lui Reuleaux obţinem imediat că are: 1) lărgimea l, 2) perimetrul πl, 3) aria $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})l^2$, 4) unghiurile din vârfuri de $120°$, 5) razele cercurilor circumscris şi înscris egale cu $\frac{l}{\sqrt{3}}$, respectiv $\left(1 - \frac{l}{\sqrt{3}}\right) l$.

---

[1]Prof.dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; *t_birsan@yahoo.com*

[1]O dreaptă de sprijin este o dreaptă ce are cel puţin un punct comun cu curba şi o lasă de o parte a ei. O curbă închisă şi convexă are două şi numai două drepte de sprijin paralele cu o direcţie dată.

[2]După numele lui *Franz Reuleaux* (1829-1905), inginer german considerat creatorul mecanicii moderne, care a studiat această formă în scop aplicativ [**2**]. Forma este cunoscută, însă, din Evul Mediu: apare în mai multe manuscrise ale lui *Leonardo da Vinci* sau în arhitectură, ca profil de ferestre ale unor catedrale. *Leonhard Euler* a studiat în lucrarea *De curvis triangularibus* curbele triunghiulare şi cele de lărgime constantă (numite de el *orbiforme*) [**5**].

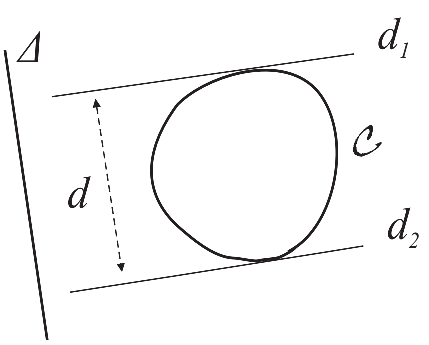


Fig. 1

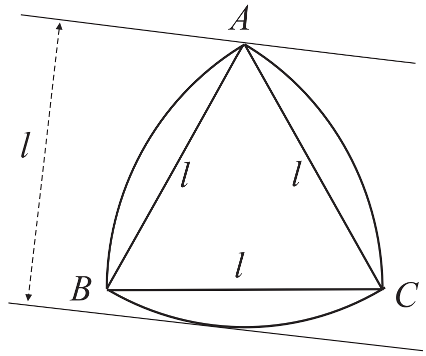


Fig. 2

Modul în care a fost obţinut triunghiul Reuleaux poate fi utilizat pentru a găsi noi curbe de lărgime constantă. În fig. 3 este indicat un pentagon curbiliniu de lărgime constantă obţinut având la bază un pentagon regulat; arcele care-l mărginesc sunt arce de cerc cu centrele în unul din vârfurile pentagonului şi care unesc extremităţile laturilor opuse. Evident, putem vorbi de poligoane curbilinii de lărgime constantă cu un număr impar de arce - *poligoane Reuleaux,* o generalizare a triunghiului Reuleaux. Toate aceste curbe sunt alcătuite dintr-un număr finit de arce de cerc egale, iar lărgimea lor este egală cu diametrul poligonului regulat de bază. De altfel, s-a arătat că poligoanele Reuleaux sunt singurele curbe de lărgime constantă formate dintr-un număr finit de arce de cerc de aceeaşi lungime. Menţionăm că în Marea Britanie monedele de 20 şi 50 pence au forma de heptagoane Reuleaux. Şi în alte ţări circulă astfel de monede: Botswana, Canada, Cipru, Iordania, Mauritania [**5**].

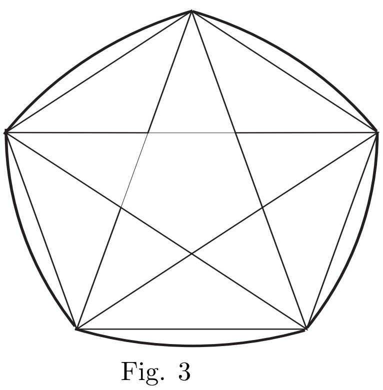


Fig. 3

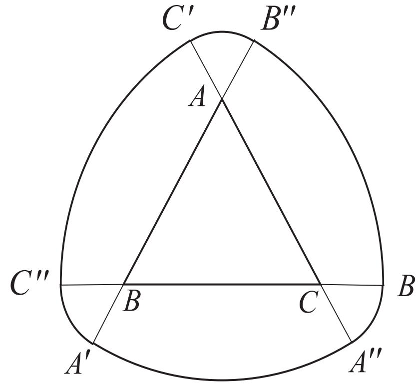


Fig. 4

Curbele de lărgime constantă date ca exemplu mai sus au vârfuri, anume, punctele comune arcelor ce compun curba sunt puncte unghiulare. Se poate însă trece cu uşurinţă la poligoane curbilinii cu lărgime constantă fără vârfuri (netede). În fig.4 este ilustrat acest procedeu de trecere pe cazul triunghiului Reuleaux; o construcţie similară se poate face pentru oricare poligon Reuleaux. Arcul $\widehat{BC}$ din fig. 2 este înlocuit cu arcul $\widehat{A'A''}$ concentric cu el, dar de rază $l + l_0$ ($l_0 > 0$ dat) şi la fel se construiesc arcele $\widehat{B'B''}$, $\widehat{C'C''}$. Se închide curba cu arcele de cerc $\widehat{B''C'}$, $\widehat{C''A'}$, $\widehat{A''B'}$ cu centrele în vârfurile A, B, respectiv C şi de rază l_0. Evident, curba obţinută, paralelă cu triunghiul Reuleuax, are lărgimea $l + l_0$ şi este netedă.

Utilizând procedee asemănătoare, se pot construi curbe de lărgime constantă pornind cu poligoane neregulate având un număr par de laturi. În fig. 5 se consideră un patrulater complet $ABCDEF$ (echivalent, patru drepte care se intersectează) şi apoi un punct P_1 pe dreapta AB. Se construiesc succesiv următoarele arce de cerc: $\widehat{P_1P_2}$ cu centrul în F, $\widehat{P_2P_3}$ cu centrul în D, $\widehat{P_3P_4}$ cu centrul în E, ... , $\widehat{P_8P_1}$ cu centrul în B. Este simplu de arătat că ultimul arc construit are ca extremitate punctul P_1 şi că $P_1P_5 = P_2P_6 = P_3P_7 = P_4P_8$. Ca urmare, curba închisă obţinută este formată din arce (neegale) de cerc şi are lărgime constantă. Procedeul este valabil si pentru un număr oarecare (par sau impar) de drepte care se intersectează.

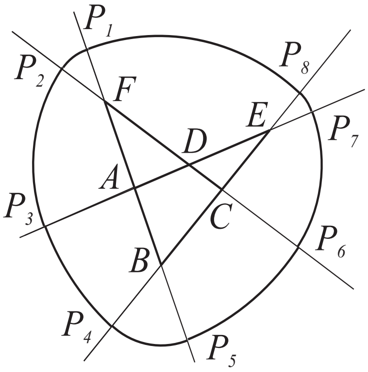


Fig. 5

Aşadar, există o infinitate de curbe de lărgime constantă. Observăm că toate curbele de mai sus sunt formate din arce de cerc. Menţionăm că acest fapt nu este obligatoriu şi că există curbe de lărgime constantă pentru care nicio porţiune, oricât de mică, nu este arc de cerc.

2. Proprietăţi. Teorema lui Barbier. Enunţăm câteva proprietăţi importante ale curbelor de lărgime constantă [**4**,**5**,**7**]:

I. *Cercul este singura curbă de lărgime constantă care are un centru de simetrie.*

II. *Curbele de lărgime constantă au în vârfuri unghiuri interioare de cel puţin* 120°. Numai triunghiul Reuleaux are în cele trei vârfuri unghiuri interioare de 120°.

III. *Printre curbele de lărgime constantă, cercul mărgineşte o suprafaţă de arie maximă, iar triunghiul Reuleaux una de arie minimă.*

IV. *Cercurile înscris şi circumscris unei curbe de lărgime constantă sunt concentrice şi suma razelor lor este egală cu lărgimea curbei.*

Am văzut deja că perimetrul triunghiului Reuleaux este dat de formula $P = \pi d$, unde d este lărgimea sa (în acest caz, egală cu lungimea l a laturii triunghiului echilateral de bază) şi tot prin calcul elementar se verifică că formula este valabilă pentru orice poligon Reuleaux. O proprietate surprinzătoare a curbelor de lărgime constantă a fost stabilită în anul 1860 de către matematicianul francez *Joseph-Émile Barbier* (1838-1889).

Teorema lui Barbier. *Curbele de lărgime constantă d au perimetrul egal cu πd.*

Demonstraţie. Vom putea da doar o schiţă de demonstraţie, bazată pe conceptul algebric de adunare Minkowski a mulţimilor convexe. Un punct O fiind luat ca origine de vectori, suma a două mulţimi convexe K_1 şi K_2 este mulţimea, notată $K_1 + K_2$, formată din extremităţile vectorilor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\forall A \in K_1$ şi $\forall B \in K_2$ (adunarea vectorilor efectuându-se după regula paralelogramului). Vom utiliza următoarele proprietăţi ale sumei de mulţimi convexe [**4**,**7**]: 1) lărgimea mulţimii sumă într-o direcţie dată este suma lărgimilor mulţimilor termen în acea direcţie; 2) perimetrul sumei este egal cu suma perimetrelor mulţimilor termen; 3) suma dintre o mulţime convexă şi simetrica sa faţă de un punct arbitrar are o simetrie centrală.

Putem acum demonstra afirmaţia enunţată. Fie K o curbă de lărgime constantă d şi fie K' simetrica sa faţă de un punct luat arbitrar. K' este tot o curbă de lărgime constantă d şi cu acelaşi perimetru ca şi K. Conform proprietăţii 1), $K + K'$ este o curbă de lărgime constantă egală cu $2d$, iar din 2) rezultă că perimetrul sumei $K + K'$ este egal cu suma perimetrelor mulţimilor K şi K'. Pe de altă parte, conform proprietăţilor 3) şi **I,** deducem că suma $K + K'$ este un cerc. Aşadar, suma perimetrelor mulţimilor K şi K' este egală cu perimetrul cercului de diametru $2d$, adică $\pi \cdot 2d$. Obţinem că dublul perimetrului mulţimii K este egal cu $2\pi d$, deci perimetrul mulţimii K este πd, ceea ce trebuia arătat.

Obsevaţie. În [**3**], pentru teorema lui Barbier este prezentată o demonstraţie probabilistică elementară ce are la bază *problema acului lui Buffon.*

3. Rotaţia într-un pătrat. Fie $\mathcal{C}$ o curbă de lărgime constantă d şi Δ o direcţie arbitrară. Se trasează atât dreptele de sprijin perpendiculare pe Δ cât şi acelea paralele cu Δ. Cele două perechi de drepte determină un pătrat de latură d circumscris curbei $\mathcal{C}$. Rotind direcţia Δ, acest pătrat se va roti în jurul curbei $\mathcal{C}$ rămânând în orice moment circumscris ei. Altfel spus, fixând pătratul, curba $\mathcal{C}$ se va roti fiind înscrisă în orice moment în pătrat.

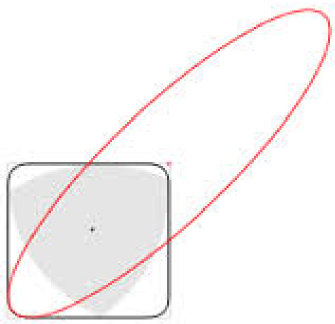


Fig. 6

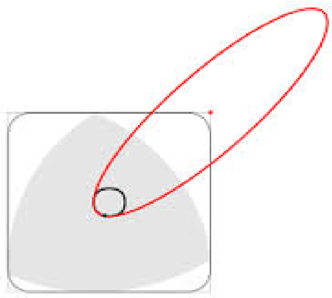


Fig. 7

Să luăm drept curbă $\mathcal{C}$ un triunghi Reuleaux şi să-l rotim în pătratul circumscris lui. În orice moment al rotaţiei, două dintre vârfurile triunghiului ating două laturi adiacente ale pătratului, pe când al treilea vârf parcurge un arc de curbă în apropierea celui de-al patrulea vârf al pătratului [**5**]. *Gleißner* şi *Zeitler* (2000) arată că mulţimea acoperită de triunghiul Reuleaux se obţine ,,rotunjind" colţurile pătratului la arce de elipsă şi stabilesc elementele care determină elipsele din care fac parte cele patru arce (în fig. 6 este indicată această mulţime şi una dintre elipse). Suprafaţa acoperită este aproximativ 98,77% din suprafaţa pătratului. Menţionăm şi faptul că pe parcursul rotirii centrul triunghiului Reuleaux nu rămâne fix, ci trasează o curbă formată din patru arce de elipsă (*Wagon*, 1991), care este indicată în fig. 7 [**6**].

Aceste proprietăţi ale triunghiului Reuleaux stau la baza construirii burghielor care pot da găuri ,,aproape pătrate", a unor mecanisme care transformă un tip de mişcare în altul, proiectoarelor de film sau a compresorului rotativ al motorului Wankel. Alte poligoane Reuleaux sunt utilizate pentru a face găuri pentagonale, hexagonale sau octogonale.

4. Extinderi în spaţiu. Se spune că un corp convex din $\mathbb{R}^3$ este de *lărgime constantă* d, dacă distanţa dintre planele oricărei perechi de plane de sprijin ale sale este egală cu d. Există o infinitate de corpuri de lărgime constantă d. Sfera este cel mai simplu exemplu de acest fel. Dar, spre deosebire de situaţia similară din plan, nu există corpuri de lărgime constantă mărginite numai de suprafeţe de sferă (exceptând sfera însăşi).

Cel mai simplu corp de lărgime constantă, diferit de sferă, se obţine rotind un triunghi Releaux în jurul uneia din axele sale; corpul rezultat are volum minim printre corpurile de rotaţie de lărgime constantă dată. Similar triunghiului Reuleaux, în spaţiu avem *tetraedrul Reuleaux*, care se obţine ca intersecţie a celor patru sfere de rază l centrate în vârfurile unui tetraedru regulat de muchie l, dar acesta nu are lărgime constantă. Însă, acesta poate fi modificat în două moduri diferite şi obţinut două suprafeţe (corpuri) de lărgime constantă [**4**,**5**].

Teorema lui Barbier nu rămâne valabilă în spaţiu, corpuri de aceeaşi lărgime pot avea ariile suprafeţelor lor diferite. Avem, însă, un rezultat important în această privinţă. *Umbra* unui corp pe un plan este proiecţia ortogonală pe plan a corpului. Evident, dacă corpul are lărgime constantă d , atunci şi umbrele sale pe orice plan vor fi de lărgime constantă d; conform teoremei lui Barbier, aceste umbre au perimetrul πd. Este adevărată şi afirmaţia inversă, adică avem: *un corp convex are lărgime constantă dacă şi numai dacă umbrele sale au acelaşi perimetru.*

Bibliografie

1. H. Rademacher, O. Toeplitz – *Despre numere şi figuri*, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

2. F. Reuleaux – *The Kinematics of Machinery*, Macmillan, New York, 1876; Dover Publications, 1964.

3. G. Sudan – *Câteva probleme matematice interesante*, (cap. 5, 37-49), Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969.

4. I. M. Yaglom, V. G. Boltyansky – *Figuri convexe*, Moscova-Leningrad, 1951 (în l. rusă).

5. *https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle.*

6. *http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html.*

7. *http://www.cut-the-knot.org/ctk/Barbier.shtml.*

Problema celor 17 cercuri

Gheorghe MITROAICA[1]

Abstract. In this Note it is indicated a solution involving 17 steps to the following problem: Given a circle of radius 1, construct the concentric circle with radius $\sqrt{7}$, using a compass only.

Keywords: circle, compass.

MSC 2010: 51M04.

În prima sa carte despre numărul 7, *Un număr sprijină lumea*, autorul a făcut câteva conexiuni ale eroului cărţii cu geometria. În acest sens ar fi, poate, interesant ca şi pe această ultimă lucrare s-o ,,colorăm" geometric cât mai interesant. Este cazul, deci, să intre în arenă... ,,radical din 7". După îndelungi căutări am găsit următoarea problemă:

Se dă cercul de rază egală cu unitatea şi se cere ca pornind de la el să se construiască, numai cu compasul, cercul concentric cu raza egală cu radical din şapte (numită *Problema celor 17 cercuri*).

Soluţia autorului foloseşte pe cea a *Problemei 265* din Revista Matematică şi Fizică din septembrie 1952, autor *N. Patraulea*, care trata găsirea numai cu ajutorul compasului a mijlocului unui segment determinat de două puncte date.

În esenţă, problema enunţată constă în a găsi un segment a cărui lungime să măsoare $\sqrt{7}$. Fireşte, primul cerc al problemei este chiar cercul de rază unitate de la care pornim. Începem prin a ne ,,agăţa" de un punct oarecare A al circumferinţei date. Căpătăm astfel o direcţie AO şi pot să intre în scenă piruetele compasului:

1) este cercul de rază unitatea, pe care se defineşte problema;
2) cu raza AO şi centrul în A se descrie un arc care taie cercul dat în B;
3) cu centrul în B şi cu aceeaşi rază se punctează C în acelaşi mod;
4) absolut identic, cu centrul în C se încrusteată D, diametral opus lui A;
5) cu centrul în A şi raza AD se descrie un amplu arc de cerc...;
6) cu centrul în D şi raza BD se descrie arcul care-l intersectează pe precedentul în punctele E şi F;
7) cu centrul în E şi raza DE se descrie un arc de cerc...;
8) cu centrul în F şi raza $FD = DE$ se descrie un arc de cerc care îl intersectează pe precedentul în M.

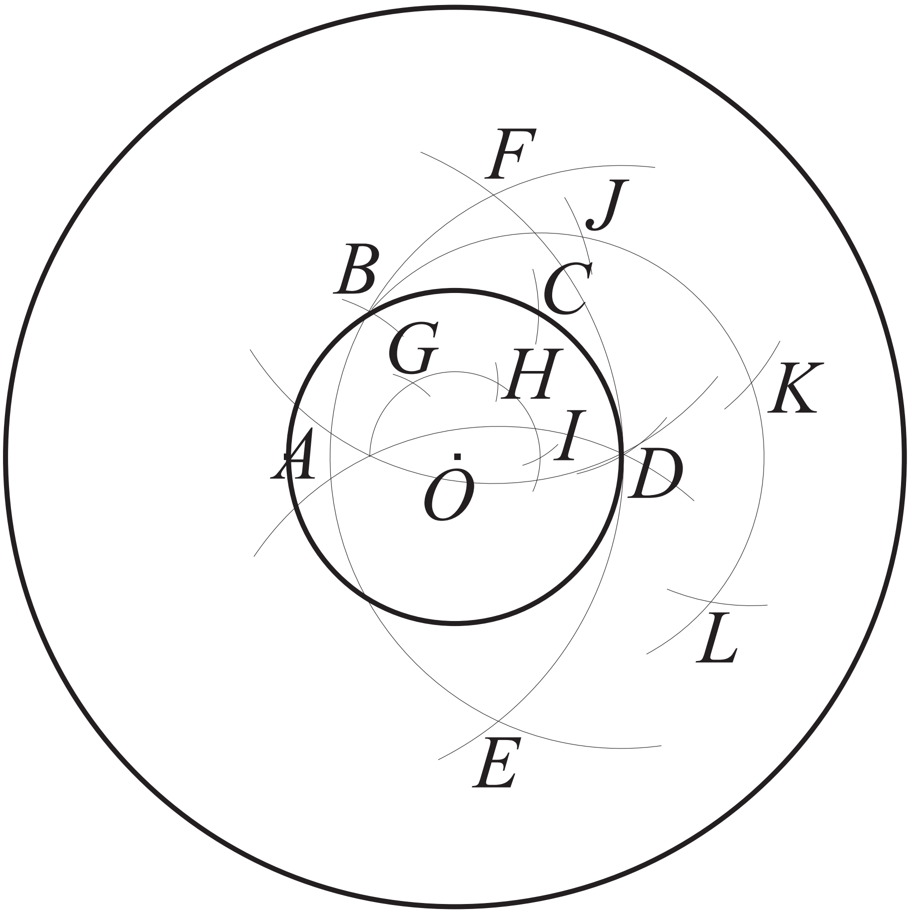
Aici se încheie raţionamentul Problemei 265; ne oprim şi noi pentru a verifica faptul că M este mijlocul segmentului OA. Pentru aceasta să-i calculăm puterea faţă de cercurile cu centrele în E şi F:

$$AM \cdot AD = AE^2 - DE^2 = 2^2 - \left(1 \cdot \sqrt{3}\right)^2 = 1,$$

unde s-a ţinut seama de faptul că $DE = BD$ este latura triunghiului echilateral înscris în cecul cu raza unitatea. Din $AM \cdot AD = 1$, AD fiind egal cu 2, rezultă că $AM = \frac{1}{2}$, ceea ce trebuia verificat.

Aşadar, am folosit compasul de 8 ori pentru a găsi mijlocul segmentului AO. Urmează cea de-a 9-a piruetă a compasului, care înseamnă şi debutul părţii originale

[1]Dr. Fizică, Bucureşti; *mitroaicatony@yahoo.it*



a rezolvării problemei. Un pas mic pentru compas, un pas mare pentru rezolvarea problemei...

9) Cu centrul în O şi raza MO se descrie mai mult decât un semicerc, având un capăt în M;

10) se poartă raza MO pe acest cerc şi se marchează punctul G;

11) cu centrul în G şi aceeaşi rază purtată în continuare se capătă punctul H;

12) cu centrul în H şi aceeaşi rază se fixează I, coliniar cu A, M, O. Să evaluăm momentul! Ca geometri de... nota 7 cel puţin, dibuim că ,,triunghiurile” ABM şi BMI sunt dreptunghice. Şi dacă triunghi dreptunghic e, atunci Pitagora e...! Avem, deci: din AMB relaţia

$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Din triunghiul BMI, un pont...

$$BI^2 = BM^2 + MI^2 = \frac{3}{4} + 1^2 = \frac{7}{4}$$

sau $BI = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Deci, ,,mână birjar"! E de...13 drumul, dar ştim de-acum sfârşitul.

13) cu centrul în I şi raza BI se descrie mai mult decât un semicerc care trece prin B;

14) cu centrul în B şi raza BI se intersectează semicercul 13 în J;

15) similar, se pică pe punctul K (centrul în J, raza BI);

16) ţinând-o tot aşa, ne punem în posesia celui mai dorit punct de către rezolvitor, L, diametral opus lui B, coliniar deci cu acesta şi cu I. Am obţinut deci: $BL = 2BI = \sqrt{7}$, adică exact raza cercului de construit cum cere problema;

17) cel mai căutat, dar şi cel mai facil de trasat cerc, cercul cu centrul în O şi raza $\sqrt{7}$.

O problemă ca pentru 7, ,,numărul fără egal", speră autorul.

Bibliografie

1. **Gh. Mitroaica** – *Un număr sprijină lumea*, Soc. Ştiinţă & Tehnică SA, Bucureşti, 1998.
2. **N. Patraulea** – *Problema 265*, Revista Matematică şi Fizică, 1952, nr.9, 223-224.
3. **A. Tóth** – *Noţiuni de teoria construcţiilor geometrice*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1963.

Nota Redacţiei. Pentru cititorii revistei, adăugăm un comentariu.

Teoria construcţiilor geometrice este un capitol fascinant al geometriei. Grecii antici au dat o mare importanţă construcţiilor geometrice, în particular celor cu rigla şi compasul; lor le datorăm cele trei probleme celebre: *dublarea cubului, trisecţia unghiului* şi *cuadratura cercului.* Danezul **Georg Mohr** în 1672 şi italianul **Lorenzo Mascheroni** în 1797 au arătat, în mod independent, rezultatul următor (numit *teorema Mohr-Mascheroni*): *orice construcţie ce poate fi efectuată cu rigla şi compasul se poate face numai cu compasul.* Posibilitatea teoretică afirmată în această teoremă nu exclude interesul pentru realizarea efectivă a unei construcţii numai cu compasul (adică indicarea etapelor ce trebuie parcurse pentru ca de la datele problemei să se ajungă, utilizând numai compasul, la elementele cerute).

În Notă este utilizată o construcţie a mijlocului unui segment dată de *N. Patraulea.* Observăm că orice altă construcţie a mijlocului o poate înlocui, etapele 9-17 de mai sus rămânând aceleaşi. În [**3,** p.42] se indică o împărţire cu compasul a unui segment în n părţi egale dată de L. Mascheroni.

Proprietăţi ale razelor cercurilor mixtliniare exînscrise

Neculai ROMAN[1]

Abstract. A couple of identities for the radii of the mixtlinear excircles to a triangle are established.

Keywords: inradius, circumradius, exradii, mixtilinear excircles.

MSC 2010: 51M04.

Fie triunghiul ABC, r, R – razele cercurilor înscris şi circumscris, r_a, r_b, r_c – razele cercurilor exînscrise şi R_1, R_2, R_3 – razele cercurilor mixtliniare exînscrise triunghiului ABC. Amintim, că R_1 este raza cercului tangent semidreptelor $[AB, [AC$ şi tangent exterior cercului circumscris. Analog se introduc R_2 şi R_3.

În [**2**] sunt indicate câteva proprietăţi ale razelor R_1, R_2 şi R_3, iar în [**1**] sunt prezentate un număr de proprietăţi ale razelor r_1, r_2, r_3 ale cercurilor mixtliniare înscrise (r_1 este raza cercului tangent semidreptelor $[AB, [AC$ şi tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC şi analog se introduc r_2, r_3).

Scopul acestei Note este de a prezenta noi proprietăţi ale razelor cercurilor mixtliniare exînscrise, altele decât cele din [**2**]. Vor fi utilizate tehnici de lucru similare celor din [**1**].

Sunt cunoscute formulele pentru razele cercurilor mixtliniare exînscrise ([**2**]):

$$(1)\quad R_1 = \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{rbc}{(p-a)^2};\ R_2 = \frac{r_b}{\cos^2 \frac{B}{2}} = \frac{rca}{(p-b)^2};\ R_3 = \frac{r_c}{\cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{rab}{(p-c)^2}.$$

Se va apela în mod curent la identităţile:

(2_1) $\quad ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr,$

(2_2) $\quad abc = 4RS = 4Rpr,$

(2_3) $\quad a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr),$

(2_4) $\quad a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr),$

(2_5) $\quad a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 = 2pr(2R - r),$

(2_6) $\quad ab(p-a)(p-b) + bc(p-b)(p-c) + ca(p-c)(p-a) = r^2[p^2 + (4R + r)^2],$

cât şi la următoarele relaţii relativ la razele cercurilor exînscrise ([**3**]):

$$(3)\qquad \sum r_a = 4R + r,\ \ \sum r_b r_c = p^2,\ \ r_a r_b r_c = p^2 r;$$

$$(4)\qquad \sum r_a^3 = (4R + r)^3 - 12Rp^2$$

((4) rezultă din identitatea $x^3+y^3+z^3 = 3xyz+(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)]$).

[1]Profesor, Şcoala Gimnazială ,,Vasile Alecsandri", Mirceşti (Iaşi); *romanneculai@yahoo.com*

Propoziţia 1. *În orice triunghi au loc identităţile*:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{p^2}[(4R+r)^3 + p^2r - 8p^2R]; \tag{5}$$

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = 8R(2R-r); \tag{6}$$

$$R_1R_2R_3 = 16R^2r. \tag{7}$$

Demonstraţie. Folosind formulele (1), (3), (4) şi relaţiile $r_a = p\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ etc., avem:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \sum \frac{r_a}{\cos^2\frac{A}{2}} = \sum r_a(1 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}) = \sum r_a + \sum r_a \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}$$
$$= \sum r_a + \sum r_a\left(\frac{r_a}{p}\right)^2 = \sum r_a + \frac{1}{p^2}\sum r_a^3 = 4R + r + \frac{1}{p^2}[(4R+r)^3 - 12Rp^2]$$

de unde, prin calcul simplu, obţinem (5).

$$\sum R_1R_2 \overset{(1)}{=} \sum \frac{rbc}{(p-a)^2}\cdot\frac{rca}{(p-b)^2} = r^2abc\sum\frac{c\cdot p^2(p-c)^2}{S^4} = \frac{abc}{S^2}\sum c(p-c)^2$$
$$\overset{(2_5)}{=} \frac{4Rrp}{p^2r^2}\cdot 2pr(2R-r) = 8R(2R-r)$$

$$R_1R_2R_3 \overset{(1)}{=} \prod\frac{rbc}{(p-a)^2} = r^3(abc)^2\prod\frac{1}{(p-a)^2} \overset{(2_2)}{=} r^3(4RS)^2\cdot\frac{p^2}{S^4} = 16R^2r.$$

Propoziţia 2. *În orice triunghi au loc identităţile*:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R} \text{ (vezi [4])}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_3}\cdot\frac{1}{R_1} = \frac{(4R+r)^3 + p^2r - 8p^2R}{16p^2R^2r}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{R_3} = \frac{1}{16R^2r}. \tag{10}$$

Demonstraţie. Folosind relaţiile (5), (6) şi (7), obţinem ecuaţia:

$$x^3 - \frac{(4R+r)^3 + p^2r - 8p^2R}{p^2}x^2 + 8R(2R-r)x - 16R^2r = 0, \tag{11}$$

cu soluţiile R_1, R_2 şi R_3. Dacă în (11) efectuăm substituţia $x = \dfrac{1}{y}$, obţinem ecuaţia:

$$y^3 - \frac{2R-r}{2Rr}y^2 + \frac{(4R+r)^3 + p^2r - 8p^2R}{16p^2R^2r}y - \frac{1}{16R^2r} = 0 \tag{12}$$

ce are soluţiile $\dfrac{1}{R_1}$, $\dfrac{1}{R_2}$ şi $\dfrac{1}{R_3}$ şi, utilizând relaţiile lui Viète, obţinem relaţiile (8)-(10).

Propoziţia 3. *În orice triunghi sunt adevărate identităţile:*

$$\frac{r_a}{R_1}+\frac{r_b}{R_2}+\frac{r_c}{R_3}=\frac{4R+r}{2R}, \tag{13}$$

$$\frac{r_a}{R_1}\cdot\frac{r_b}{R_2}+\frac{r_b}{R_2}\cdot\frac{r_c}{R_3}+\frac{r_c}{R_3}\cdot\frac{r_a}{R_1}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2}, \tag{14}$$

$$\frac{r_a}{R_1}\cdot\frac{r_b}{R_2}\cdot\frac{r_c}{R_3}=\frac{p^2}{16R^2}. \tag{15}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned}\sum\frac{r_a}{R_1}&=\sum\cos^2\frac{A}{2}=\sum\frac{p(p-a)}{bc}\\&=\frac{p}{abc}\sum a(p-a)=\frac{1}{4Rr}(2p^2-a^2-b^2-c^2)\overset{(2_3)}{=}\frac{4R+r}{2R},\\ \sum\frac{r_a}{R_1}\cdot\frac{r_b}{R_2}&=\sum\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}\\&=\sum\frac{p^2(p-a)(p-b)}{abc^2}=\sum\frac{p^2}{a^2b^2c^2}\sum ab(p-a)(p-b)\\&\overset{(2_6)}{=}\frac{1}{16R^2r^2}\cdot r^2[p^2+(4R+r)^2]=\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2},\\ \frac{r_a}{R_1}\cdot\frac{r_b}{R_2}\cdot\frac{r_c}{R_3}&=\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\\&=\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}=\frac{p^2S^2}{16R^2S^2}=\frac{p^2}{16R^2}.\end{aligned}$$

Propoziţia 4. *În orice triunghi sunt adevărate identităţile:*

$$\frac{R_1}{r_a}+\frac{R_2}{r_b}+\frac{R_3}{r_c}=\frac{(4R+r)^2+p^2}{p^2}, \tag{16}$$

$$\frac{R_1}{r_a}\cdot\frac{R_2}{r_b}+\frac{R_2}{r_b}\cdot\frac{R_3}{r_c}+\frac{R_3}{r_c}\cdot\frac{R_1}{r_a}=\frac{8R(4R+r)}{p^2}, \tag{17}$$

$$\frac{R_1}{r_a}\cdot\frac{R_2}{r_b}\cdot\frac{R_3}{r_c}=\frac{16R^2}{p^2}. \tag{18}$$

Demonstraţie. Se procedează ca în Propoziţia 2.

În încheiere, propunem cititorului demonstrarea următoarelor identităţi:
1) $\sum aR_1=\frac{4R}{p}[(4R+r)^2-2p^2]$, 2) $\sum\frac{bc}{R_1}=\frac{1}{r}(p^2-8Rr-2r^2)$.

Bibliografie

1. R. Bairac – *Cercuri semiînscrise în triunghi*, Delta (Chişinău), nr. 1/2006, 12–15.

2. M. Bencze – *About Special Circles*, Octogan Math. Mag., 16(2008), no.1A, 224-227.

3. T. Lalescu – *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, 1958.

4. N. Roman – *Problema O:1152*, G.M.B - 3/2007, 163.

NOTA ELEVULUI

Două probleme de conciclicitate în triunghi

Ştefan DOMINTE [1]

Abstract. Two points are considered on each side of a triangle ABC. The following problem is approached: what peculiarity has the triangle when the six considered points are concyclic. The Propositions 1 - 6 give answers when the points have certain particular positions on the sides of the triangle ABC.

Keywords: incircle, nine-point circle, Taylor′s circle, concyclic points.

MSC 2010: 51M04.

Fie ABC un triunghi oarecare. Relativ la liniile importante într-un triunghi sunt binecunoscute următoarele rezultate [**1**; pp. 13, 78]:

Picioarele înălţimilor şi mijloacele laturilor unui triunghi sunt conciclice – **cercul celor nouă puncte** sau **cercul lui Euler** (cerc care trece şi prin mijloacele segmentelor determinate de ortocentrul triunghiului şi vârfurile sale).

Proiecţiile picioarelor înălţimilor unui triunghi pe celelalte două laturi sunt conciclice – **cercul lui Taylor.**

Vom utiliza notaţiile obişnuite pentru elementele triunghiului. Să mai notăm, corelat cu ordinea BC, CA, AB pentru laturi: H_a, H_b, H_c – picioarele înălţimilor; M_a, M_b, M_c – mijloacele laturilor; L_a, L_b, L_c – picioarele bisectoarelor; I_a, I_b, I_c – punctele de contact cu laturile ale cercului înscris şi J_a, J_b, J_c – punctele de contact cu interiorul laturilor ale cercurilor exînscrise.

Sugerat de rezultatele precedente, ne punem următoarele probleme:

Problema 1. *Dacă pe laturile triunghiului ABC considerăm alte perechi de puncte, diferite de perechile $(H_a, M_a), (H_b, M_b), (H_c, M_c)$ şi formate cu puncte alese dintre cele menţionate mai sus, ce se poate spune în privinţa conciclicităţii punctelor din aceste perechi?*

Problema 2. *Dacă proiectăm pe laturile BC, CA, AB mijloacele laturilor, picioarele bisectoarelor sau punctelor de contact cu laturile ale cercului înscris sau cercurilor exînscrise, ce se poate spune despre conciclicitatea celor şase puncte obţinute?*

Vom constata că această condiţie de conciclicitate este foarte restrictivă, căci impune triunghiului să fie echilateral. În cazul triunghiului echilateral, punctele $H_a, M_a, L_a.I_a, J_a$ coincid, ca şi punctele similare situate pe laturile CA şi AB, iar cercul de conciclicitate este cercul înscris triunghiului echilateral (ce coincide cu cercul Euler al triunghiului).

[1] Elev, cl. a X-a, Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti; *stef_dominte@yahoo.com*

Propoziţia 1. *Dacă picioarele bisectoarelor şi punctele de contact cu laturile ale cercului înscris sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Evident, cercul ce conţine punctele L_a, L_b, L_c şi I_a, I_b, I_c este cercul înscris triunghiului ABC. Cum punctul L_a se află şi pe BC şi pe cercul înscris, rezultă că L_a coincide cu I_a. Ca urmare, AL_a este şi bisectoare şi înălţime în triunghiul ABC, deci $AB = AC$. Similar se arată că $BA = BC$. In final, triunghiul ABC este echilateral.

Propoziţia 2. *Dacă punctele de contact cu laturile ale cercului înscris şi ale cercurilor exînscrise sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Se procedează la fel. Cercul care conţine cele şase puncte specificate în enunţ este cercul înscris triunghiului. Deducem că J_a coincide cu I_a, deci avem $BI_a = BJ_a$. Cum $BI_a = p - b$ şi $BJ_a = p - c$ [**1**; p. 30], obţinem că $b = c$. Analog se arată că $c = a$ şi, în final, triunghiul ABC este echilateral.

Observaţie. Dacă în componenţa perechilor de puncte luate pe laturile triunghiului se află picioarele înălţimilor sau mijloacele laturilor, atunci cercul celor şase puncte din aceste perechi este cercul lui Euler, care va juca rolul avut de cercul înscris în Problemele 1 şi 2. În acelaşi fel se constată că, limitându-ne la tipul de puncte considerate la început, ipoteza de conciclicitate impune triunghiului să fie echilateral; cu excepţia unui caz, acela al perechilor $(H_a, M_a), (H_b, M_b), (H_c, M_c)$, pentru care triunghiul poate să fie oarecare.

Propoziţia 3. *Dacă picioarele bisectoarelor şi punctele de contact cu laturile ale cercurilor exînscrise sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Scriind puterea punctului A faţă de cercul ce trece prin L_a, L_b, L_c şi J_a, J_b, J_c, obţinem: $AL_b \cdot AJ_b = AL_c \cdot AJ_c$. Este cunoscut faptul că $AL_b = \dfrac{bc}{c+a}, AL_c = \dfrac{bc}{b+a}, AJ_b = p - c$ şi $AJ_c = p - b$ [**1;** pp. 142, 144]. Înlocuind în egalitatea precedentă, obţinem uşor că $b = c$. Analog, apelând la puterea punctului B, deducem că $a = c$. Aşadar, triunghiul ABC este echilateral.

Propoziţia 4. *Dacă proiecţiile mijloacelor laturilor pe celelalte două laturi ale triunghiului sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Să notăm cu M_{ab} şi M_{ac} proiecţiile mijlocului M_a pe laturile CA, respectiv AB; notaţii similare relativ la mijloacele M_b şi M_c (Fig. 1). Avem:

$$\begin{aligned}
\widehat{C} &\overset{1}{=} \widehat{AM_bM_c} \overset{2}{=} \widehat{AM_{bc}M_{cb}} \overset{3}{=} \widehat{M_{ac}M_{ca}M_{cb}} \\
&= \widehat{M_{ac}M_{ca}M_c} + \widehat{M_cM_{ca}M_{cb}} \\
&\overset{4}{=} \widehat{M_{ac}M_aM_c} + \widehat{M_cM_{ca}M_{cb}} \\
&\overset{5}{=} 90^\circ - \widehat{A} + \widehat{M_cM_{ca}M_{cb}} \\
&\overset{6}{=} 90^\circ - \widehat{A} + \widehat{M_{cb}CM_c} \\
&= 90^\circ - \widehat{A} + \widehat{ACM_c}
\end{aligned}$$

(1 – din $M_bM_c \parallel CB$, 2 – $M_bM_cM_{bc}M_{cb}$ inscriptibil, 3 – $M_{ac}M_{ca}M_{cb}M_{bc}$ inscriptibil, 4 – $M_{ac}M_{ca}M_aM_c$ inscriptibil, 5 – $M_aM_{ac}M_c$ triunghi dreptunghic, 6 – $M_cM_{ca}CM_{cb}$ inscriptibil). Reţinem termenii extremi şi obţinem: $\widehat{ACM_c} = \widehat{A} + \widehat{C} - 90°$, adică $\widehat{ACM_c} = 90° - \widehat{B}$. Analog, avem: $\widehat{BCM_c} = 90° - \widehat{A}$.

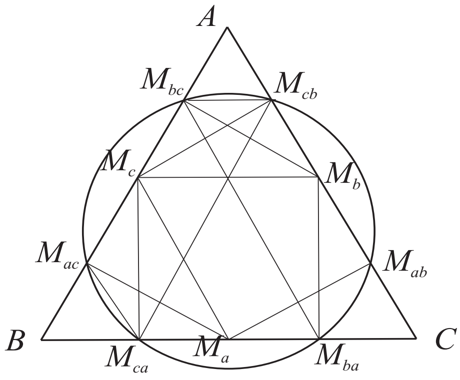


Fig. 1

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile ACM_c şi BCM_c, avem:

$$\frac{AM_c}{\sin(90° - B)} = \frac{CM_c}{\sin A}$$

şi

$$\frac{BM_c}{\sin(90° - A)} = \frac{CM_c}{\sin B},$$

de unde, ţinând seama că $AM_c = BM_c$, obţinem: $\sin 2A = \sin 2B$, deci $A = B$. sau $a = b$. Similar, se obţine şi $b = c$. Deci ABC este triunghi echilateral.

Propoziţia 5. *Dacă proiecţiile punctelor de contact ale cercului înscris pe celelalte două laturi ale triunghiului sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

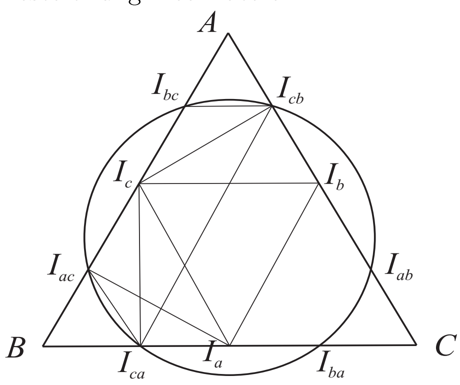


Fig. 2

Demonstraţie. Notăm proiecţiile punctelor de contact I_a, I_b, I_c după cum se vede în Fig. 2 (I_a se proiectează în $I_{ab} \in AC$ şi $I_{ac} \in AB$ etc). Formal, se trece de la Fig. 1 la Fig. 2 prin înlocuirea literii M cu litera I şi păstrarea indicilor. Ca şi în Propoziţia 1, vom stabili o legătură utilă între unghiuri, care să ducă la rezolvarea problemei; urmăm aceeaşi cale, dar nu vom explica paşii făcuţi. Avem:

$$\widehat{AI_bI_c} = \widehat{AI_{bc}I_{cb}} = \widehat{I_{ac}I_{ca}I_{cb}} = \widehat{I_{ac}I_{ca}I_c} + \widehat{I_cI_{ca}I_{cb}} = \widehat{I_{ac}I_aI_c} + \widehat{I_cI_{ca}I_{cb}} =$$
$$= \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{I_cI_{ca}I_{cb}} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{I_{cb}CI_c} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{ACI_c},$$

de unde obţinem: $\widehat{AI_bI_c} = \dfrac{\widehat{B}}{2} + \widehat{ACI_c}$ sau $90° - \dfrac{\widehat{A}}{2} = \dfrac{\widehat{B}}{2} + \widehat{ACI_c}$, ceea ce este echivalent cu $\widehat{ACI_c} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$. Aşadar, CI_c este bisectoarea unghiului $\widehat{C}$. Similar, AI_a şi BI_b sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$. Ca în Propoziţia 1, urmează că triunghiul ABC este echilateral.

Propoziţia 6. *Dacă proiecţiile picioarelor bisectoarelor pe celelalte două laturi ale triunghiului sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Semnificaţia notaţiilor din Fig. 3 este următoarea: L_a este piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{A}$ şi L_{ab}, L_{ac} sunt proiecţiile acestui punct pe AC, respectiv AB, iar restul notaţiilor au semnificaţii asemănătoare. Procedăm ca în Propoziţiile 4 şi 5. Avem $\widehat{AL_bL_c} = \widehat{AL_{bc}L_{cb}} = \widehat{L_{ac}L_{ca}L_{cb}} = \widehat{L_{ac}L_{ca}L_c} + \widehat{L_cL_{ca}L_{cb}} = \widehat{L_{ac}L_aL_c} + \widehat{L_cL_{ca}L_{cb}} = 90° - \widehat{BL_cL_a} + \widehat{L_cL_{ca}L_{cb}} = 90° - \widehat{BL_cL_a} + \widehat{L_{cb}CL_c} = 90° - \widehat{BL_cL_a} + \frac{\widehat{C}}{2}$, deci $\widehat{AL_bL_c} + \widehat{BL_cL_a} = 90° + \dfrac{\widehat{C}}{2}$. Similar vom obţine $\widehat{BL_cL_a} + \widehat{CL_aL_b} = 90° + \dfrac{\widehat{A}}{2}$ şi $\widehat{CL_aL_b} + \widehat{AL_bL_c} = 90° + \dfrac{\widehat{B}}{2}$. În consecinţă. $\widehat{AL_bL_c} = 90° - \dfrac{\widehat{A}}{2}, \widehat{BL_cL_a} = 90° - \dfrac{\widehat{B}}{2}, \widehat{CL_aL_b} = 90° - \dfrac{\widehat{C}}{2}$. De aici deducem că $AL_b = AL_c, BL_c = BL_a$ şi $CL_a = CL_b$, relaţii echivalente cu faptul că punctele L_a, L_b, L_c sunt punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile respective. Conform Propoziţiei 1, triunghiul ABC este echilateral.

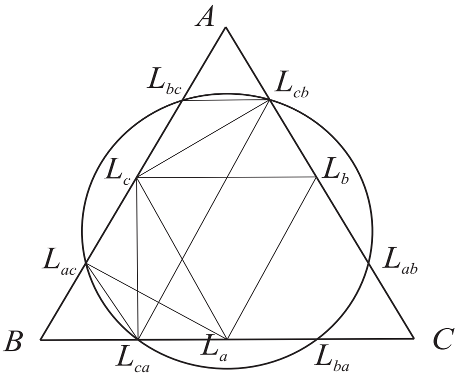


Fig. 3

Observaţie. Condiţia de conciclicitate este impusă unui număr de şase puncte situate pe laturile unui triunghi, câte două pe fiecare latură. În această Notă, au fost indicate două modalităţi de a ne procura aceste puncte, dar se pot imagina şi alte procedee în acest sens. Condiţiile restrictive în care am lucrat au impus triunghiului să fie, *în general*, echilateral (cercul lui Euler şi cercul lui Taylor fiind excepţii). În cap. VII din [**1**],*Cercurile lui Tucker,* se găsesc rezultate importante şi frumoase în această ordine de idei.

Încheiem cu următoarea

Problemă propusă. *Fie dat un triunghi ABC şi punctele $X \in (BC), Y \in (CA), Z \in (AB)$. Notăm proiecţia punctului X paralelă cu AC pe latura AB cu X_c (adică $X_c \in AB$ şi $XX_c \parallel AC$), iar proiecţia lui X paralelă cu AB pe latura AC cu X_b; analog se introduc punctele Y_a şi Y_c, Z_b şi Z_a. Arătaţi că în fiecare dintre cazurile:*

a) X, Y, Z sunt picioarele înălţimilor;
b) X, Y, Z sunt picioarele bisectoarelor;
c) X, Y, Z sunt punctele de contact ale cercului înscris;
d) X, Y, Z sunt punctele de contact ale cercurilor exînscrise

condiţia de conciclicitate a punctelor $X_c, X_b, Y_a, Y_c, Z_b, Z_a$ implică faptul că triunghiul este echilateral.

Bibliografie

1. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.

Procedeu de rezolvare a unor probleme cu matrice

Emanuel NECULA[1]

Abstract. A procedure for solving certain problems that involve matrices of the same order is proposed and applied. It is based upon the Proposition 1 and the identities (1)-(9).

Keywords: matrix, commutant, nilpotent, determinant.

MSC 2010: 97D40.

În această Notă vom prezenta un procedeu de rezolvare a unor probleme privind matrice de acelaşi ordin cu elemente în $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Procedeul propus are la bază următorul rezultat simplu:

Propoziţia 1. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, unde $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ şi $\mathbb{K}$ este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, există două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ astfel încât $A = X + Y$ şi $B = X - Y$.*

Demonstraţie. Se consideră $X = \frac{1}{2}(A + B)$ şi $Y = \frac{1}{2}(A - B)$.

Vor fi folosite des, mai jos, următoarele relaţii evidente:

(1) $A + B = 2X, A - B = 2Y$,
(2) $A^2 = (X + Y)^2 = X^2 + Y^2 + XY + YX$,
(3) $B^2 = (X - Y)^2 = X^2 + Y^2 - XY - YX$,
(4) $AB = (X + Y)(X - Y) = X^2 - Y^2 - XY + YX$,
(5) $BA = (X - Y)(X + Y) = X^2 - Y^2 + XY - YX$,
(6) $A^2 + B^2 = 2(X^2 + Y^2)$, (7) $A^2 - B^2 = 2(XY + YX)$,
(8) $AB + BA = 2(X^2 - Y^2)$, (9) $AB - BA = 2(YX - XY)$.

De asemenea, vom folosi şi următorul rezultat cunoscut şi cu demonstraţie simplă:

Propoziţia 2. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, atunci există $\alpha \in \mathbb{K}$ astfel încât $det(A + xB) = x^2 detB + x\alpha + detA$; mai precis, $\alpha = tr\,A \cdot tr\,B - tr\,AB$.*

Vom ilustra procedeul propus pe un număr de probleme.

Problema 1. *Fie n un număr natural nenul şi A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătaţi că matricea $AB - BA$ este singulară.* (*ONM*, 2014)

Demonstraţie. Considerăm matricele $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care $A = X + Y$ şi $B = X - Y$. Conform relaţiilor (6) şi (4), condiţia din problemă se scrie $-2Y^2 = XY - YX = [X, Y]$ (comutatorul matricelor X şi Y).

Deoarece Y comută cu $-2Y^2$, rezultă că Y comută şi cu $[X, Y]$. Deci, conform lemei lui Jacobson, comutatorul celor două matrice este niloptent şi rezultă că $\det(XY - YX) = 0$. Folosind şi relaţia (9), deducem concluzia cerută.

Problema 2. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice nilpotente şi astfel încât $AB = BA$. Să se arate că $AB = O_2$.* (*Concursul ,,Laurenţiu Duican"*, 2011).

Demonstraţie. Din ipoteză, avem: $A^2 = B^2 = O_2$, $AB = BA$, $A \neq O_2$, $B \neq O_2$, care se rescriu astfel: (i) $X^2 + Y^2 + XY + YX = O_2$, (ii) $X^2 + Y^2 - XY - YX = O_2$, (iii) $XY = YX$, (iv) $X \neq \pm Y$.

[1]Elev, cl. a XII-a, Col. Naţ. de Inf. ,,Dinicu Golescu", C-lung Muscel; *emi-emi@yahoo.ro*

Adunând (i) şi (ii), obţinem: (v) $X^2 + Y^2 = O_2$. Din (i) şi (v) rezultă că avem (vi) $XY + YX = O_2$. Din (vi) şi (iii) deducem că (vii) $XY = YX = O_2$.

Înmulţind relaţia (v) cu X (la dreapta sau la stânga) şi folosind (vii), obţinem că $X^3 = O_2$, adică X este nilpotentă şi, ca urmare, (viii) $X^2 = O_2$.

Din (v) şi (viii) rezultă că (ix) $Y^2 = O_2$. Combinând relaţia (4) cu (vii)-(ix), deducem că $AB = O_2$, c.c.t.d.

Problema 3. *Se consideră matricele* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *pentru care* $AB+BA = O_n$. *Dacă* $\det(A+B) = 0$, *arătaţi că* $\det(A^3 - B^3) = 0$. (*Cristian Chiser*, RMT - 1/2011).

Demonstraţie. Folosind relaţiile (8) şi (1), obţinem că (i) $X^2 = Y^2$ şi (ii) $\det X = 0$. Se verifică uşor că $A^3 - B^3 = 2(Y^3 + X^2Y + YX^2 + XYX)$, deci

$$\begin{aligned}\det(A^3 - B^3) &= 2^n \det(Y^3 + X^2Y + YX^2 + XYX)\\ &\overset{(i)}{=} 2^n \det(X^2Y + X^2Y + YY^2 + XYX) = 2^n \det(2X^2Y + Y^2Y + XYX)\\ &\overset{(i)}{=} 2^n \det(3X^2Y + XYX) = 2^n \det X \cdot \det(3XY + YX) \overset{(ii)}{=} 0,\end{aligned}$$

adică $\det(A^3 - B^3) = 0$, c.c.t.d.

Problema 4. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *astfel încât det*$(AB + BA) \leq 0$. *Să se arate că det*$(A^2 + B^2) \geq 0$.

Demonstraţie. Folosind relaţiile (8) şi (6), ipoteza devine (i) $\det(X^2 - Y^2) \leq 0$, iar concluzia se rescrie ca $\det(X^2 + Y^2) \geq 0$. Observăm că $\det X, \det Y \in \mathbb{R}$, deoarece $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Este natural să considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(a) = \det(X^2 + aY^2) = a^2 \det Y^2 + a\alpha + \det X^2,$$

conform Propoziţiei 2, unde $a \in \mathbb{R}$.

Din (i) rezultă că $f(-1) \leq 0$, adică $\det Y^2 + \det X^2 \leq \alpha$. Cum $\det X^2 = (\det X)^2 \geq 0$ şi, analog, $\det Y^2 \geq 0$, deducem că (ii) $0 \leq \det Y^2 + \det X^2 \leq \alpha$. Ca urmare,

$$\det(X^2 + Y^2) = f(1) = \det Y^2 + \alpha + \det X^2 \overset{(ii)}{\geq} 0 + 0 = 0, \text{c.c.t.d.}$$

Problema 5. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *şi proprietăţile:*

p_1: $\det(A - B) = \det(A + B)$,

p_2: $\det(A^2 - B^2) = \det(A^2 + B^2)$,

p_3: $\det(AB - BA) = \det(AB + BA)$.

Arătaţi că, dacă două dintre propoziţiile de mai sus sunt adevărate, atunci şi cea rămasă este adevărată. (*Mihai Opincariu*, GMB-3/2009).

Demonstraţie. Ţinând seama de relaţiile (1), (6)-(9), propoziţiile p_1, p_2, p_3 se scriu în forma: p_1: $\det X = \det Y$, p_2: $\det(X^2 + Y^2) = \det(XY + YX)$, $p_3 : \det(X^2 - Y^2) = \det(YX - XY)$.

Notăm $p := \det X$, $q := \det Y$, $(p, q \in \mathbb{R})$. Conform Propoziţiei 2, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care avem:

$$\begin{aligned}
\det(X^2 + aY^2) &= a^2 \det Y^2 + \alpha a + \det X^2 = a^2(\det Y)^2 + \alpha a + (\det X)^2 \\
&= a^2 q^2 + \alpha a + p^2, \\
\det(YX + aXY) &= \det(XY)a^2 + \beta a + \det(YX) = pqa^2 + \beta a + pq.
\end{aligned}$$

Cele trei propoziţii se rescriu astfel: $p_1 : p = q$, p_2: $q^2 + \alpha + p^2 = pq + \beta + pq$, $p_3 :$ $q^2 - \alpha + p^2 = pq - \beta + pq$.

Să presupunem că $p_1 : p = q$ este adevărată. Atunci, avem:

$$\begin{aligned}
&q^2 + \alpha + p^2 = pq + \beta + pq \Leftrightarrow 2p^2 + \alpha = 2p^2 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \\
&\qquad \Leftrightarrow p^2 - \alpha + p^2 = p^2 - \beta + p^2 \Leftrightarrow q^2 - \alpha + p^2 = pq - \beta + pq.
\end{aligned}$$

Deci, p_2 este adevărată dacă şi numai dacă p_3 este adevărată, adică au loc implicaţiile: $p_1 \wedge p_2 \to p_3$ şi $p_1 \wedge p_3 \to p_2$.

Dacă p_2 şi p_3 sunt adevărate, prin adunarea lor, obţinem:

$$2p^2 + 2q^2 = 4pq \Rightarrow (p - q)^2 = 0 \Rightarrow p = q,$$

deci p_1 este adevărată, iar problema este complet rezolvată.

În final, propunem cititorilor să folosească acelaşi procedeu în cazul problemelor:

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $A \neq B$. Dacă $A^3 = B^3$ şi $A^2B = B^2A$, arătaţi că $A^2 + B^2$ este neinversabilă.

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $AB + BA = O_n$ şi $\det(A + B) = 0$. Demonstraţi că $\det(A^4 - B^4) = 0$. (*Traian Tămâian*, GMB - 7-8-9/2010)

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) $A^2 - B^2 = AB - BA$. Demonstraţi că $\det(A + B) = 0$ sau $\det(A - B) = 0$.

b) $A^2 + B^2 = AB + BA$. Arătaţi că $\det(A - B) = 0$. (*Florian Rotaru*, GMB - 4/1999)

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice având proprietăţile: 1) $\det A > 0$, $\det B > 0$; 2) $A^2 - B^2 = AB - BA$; 3) $\det(A - B) = \det(A + B)$. Demonstraţi că $\det A = \det B$. (*Florian Rotaru*, RMT - 1/1998)

5. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, demonstraţi echivalenţa: $(AB - BA)^2 = O_2 \Leftrightarrow \det(A^2 - B^2) = \det((A + B)(A - B))$. (*Mihai Opincariu*, GMB - 7-8/2000)

Bibliografie

1. **V. Pop, L. Lupuşor** (coord.) – *Matematica pentru grupele de performaţă, cl. a XI-a*, Editura Dacia Educaţional, Cluj-Napoca, 2004.
2. **O. Şontea** – *Elemente de algebră liniară. Probleme pentru examene, concursuri şi olimpiadă*, Ed. Gil, Zalău, 2011.
3. **T. Tămâian** – *Matematică. Probleme pentru examene şi concursuri şcolare. Clasele IX-XII*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2013.

Calcul matriciel – une décomposition particulière

Adrien REISNER [1]

Abstract. In this article we present the *LU decomposition* of a square non-singular matrix A with a particular case of a tridiagonal matrix. We obtain a necessary and sufficient condition for the existence of this decomposition.

Keywords: decomposition LU, tridiagonal matrix.

MSC 2010: 15A21, 15A23.

I. Décomposition LU d'une matrice A inversible

$\{E_{i,j}\}$ étant l'ensemble des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, désignons par $M_{i,j}$ la matrice qui échange les lignes i et j de la matrice unité I_n, i.e

$$M_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i} + \sum_{k \neq i,j} E_{k,k}.$$

Théorème 1. *Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $M_{i,j}A$ est obtenue à partir de la matrice A en interversant les lignes i et j. De plus, $\det M_{i,j} = -1$ et par suite $M_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Pour tout couple (p,q), on a: $M_{i,j}E_{p,q} = E_{p,q}$, si $p \neq i,j$ et $M_{i,j}E_{i,q} = E_{j,q}$, $M_{i,j}E_{j,q} = E_{i,q}$. La multiplication à gauche par $M_{i,j}$ échange les lignes i et j des matrices de la base $\{E_{i,j}\}$. Par linéarité de la mutiplication par $M_{i,j}$, il en est de même pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\det M_{i,j}$ est obtenue en échangeant deux lignes de la matrice unité I_n, on a par suite: $\det M_{i,j} = -\det I_n = -1$, i.e. $M_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $i,j : 1...n$ posons $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ - matrice de *transvection.*

Théorème 2. *Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ est obtenue à partir de la matrice A en ajoutant à la i-ème ligne la j-ème ligne de A multipliée par λ.*

Démonstration. Pour tout couple d'indices (p,q), on a:

$$T_{i,j}(\lambda)E_{p,q} = E_{p,q} \text{ si } p \neq q \text{ et } T_{i,j}(\lambda)E_{j,q} = E_{j,q} + \lambda E_{i,q}$$

Par suite, pour les matrices de la base $\{E_{i,j}\}$ la mutiplication à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$ ajoute à la i-ème ligne de la matrice sa j-ème ligne multipliée par λ. Par linéarité de la multiplication par $T_{i,j}(\lambda)$ il en est de même pour tout matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. On a: $T_{i,j}(-\lambda) \times T_{i,j}(\lambda) \times I_n = I_n$ et, donc, $(T_{i,j}(\lambda))^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Théorème 3. *Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $MA = U$, où U est une matrice triangulaire supérieure.*

[1] TELECOM ParisTech; *adrien.reisner@yahoo.fr*

Démonstration. On uilise la *méthode du pivot de Gauss* - voir [**1**], [**3**]. La matrice A étant inversible, sa première colonne n'est pas nulle. Si $a_{i_1,1} \neq 0$, la matrice $M_{1,i_1}A = (b_{i,j})$ vérifie $b_{1,1} \neq 0$. On remplace alors, pour $2 \leq i \leq n$, la ligne L_i de cette matrice par $L_i - \dfrac{b_{i,1}}{b_{1,1}}L_1$, i.e. en multipliant à gauche par la matrice de transvection $T_{i,1}(-\dfrac{b_{i,1}}{b_{1,1}})$. On obtient ainsi une matrice $A^{(1)} = (a^{(1)}_{i,j})$ dont les termes de la première colonne sont nuls à part le premier. B_1 étant la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de $A^{(1)}$, il vient: $\det A^{(1)} = a^{(1)}_{1,1} \times \det B_1$ et $\det B_1 \neq 0$. La matrice B_1 est donc inversible et sa deuxième colonne possède donc un terme non nul $a^{(1)}_{i_2,2}$ avec $i_2 \geq 2$. En multipliant $A^{(1)}$ à gauche par M_{2,i_2} on obtient une matrice dont le terme d'indice $(2,2)$ est non nul. En multipliant à gauche la matrice obtenue par des matrices de la forme $T_{i,2}(\lambda)$ pour $3 \leq i \leq n$, on obtient une matrice $A^{(2)}$ de la forme $A^{(2)} = \begin{pmatrix} a^{(2)}_{1,1} & a^{(2)}_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n-1}p^{(2)} & a^{(2)}_{1,n} \\ 0 & a^{(2)}_{2,2} & \ldots\ldots\ldots & a^{(2)}_{2,n-1} & a^{(2)}_{2,n} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$, où $a^{(2)}_{1,1}$ et $a^{(2)}_{2,2}$ ne sont pas nuls et B_2 est inversible. On poursuit le procédé afin d'obtenir une suite de matrices $A^{(1)}, A^{(2)}, ..., A^{(n-1)}$ dans laquelle la matrice $A^{(p)}$ a tous ses termes d'indice (i,j) avec $j \leq p$ et $i > j$ qui sont nuls. La matrice $A^{(n-1)}$ est donc triangulaire supérieure: on pose $A^{(n-1)} = U$. La matrice U est ainsi obtenue en multipliant à gauche la matrice A par des matrices de la forme $M_{i,j}$ ou $T_{i,j}(\lambda)$. Le produit de ces matrices inversibles est une matrice inversible qu'on désigne par M. Finalement, on a: $MA = U$, c.q.f.d.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$, on note $A_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice obtenue à partir de A en gardant les p premières lignes et les p premières colonnes de la matrice A.

Corollaire 4. *Pour $A \in GL_n(R)$ une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que $A = LU$ est que: $\forall p : 1...n$, $\det A_p \neq 0$. De plus, on peut supposer que la diagonale de la matrice L est constituée de 1. Dans ce cas, la décomposition $A = LU$ est unique.*

Démonstration. *Condition nécessaire.* Supposons l'existence d'une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que $A = LU$. Pour tout $1 \leq p \leq n$ on a alors: $A_p = L_pU_p$. En effet, L est de la forme $\begin{pmatrix} L_p & O \\ \times & \times \end{pmatrix}$ et U de la forme $\begin{pmatrix} U_p & \times \\ O & \times \end{pmatrix}$ et, par conséquent, A est de la forme $\begin{pmatrix} L_pU_p & \times \\ \times & \times \end{pmatrix}$ et $A_p = L_pU_p$. La matrice A étant inversible, il en est de même les matrices L et U; ces deux matrices étant triangulaires, leurs termes diagonaux sont non nuls. Pour $1 \leq p \leq n$ les matrices L_p et U_p ont leurs termes diagonaux non nuls. Elles sont donc inversibles et il en est de même pour leur produit A_p. Finalement, $\forall p : 1...n$, $\det A_p \neq 0$.

Condition suffisante. Inversement, soit donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $1 \leq p \leq n$, $\det A_p \neq 0$. On utilise les résultats de la démonstration du théorème précédent. On a $\det A_1 = a_{1,1} \neq 0$. On obtient $A^{(1)}$ en multipliant A par un produit de matrices de la forme $T_{i,1}(\lambda)$ avec $2 \leq i \leq n$. La matrice $A^{(1)}$ s'obtient à partir de A en effecuant des opérations élémentaires sur les lignes. Il en est de même de $A_2^{(1)}$ à partir de A_2. On a donc $\det A_2^{(1)} = \det A_2 \neq 0$. Comme $A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \times \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, on a: $a_{2,2}^{(1)} \neq 0$ et $a_{2,2}^{(1)}$ peut servir donc pour pivot. La matrice $A^{(2)}$ s'obtient à partir de $A^{(1)}$ par multiplication à gauche seulement par des matrices de transvection $T_{i,2}(\lambda)$ avec $3 \leq i \leq n$. En poursuivant ce raisonnement $A^{(p-1)}$ est construite à partir de A par des transformations élémentaires sur les lignes. Il en est de même de $A_p^{(p-1)}$ à partir de A_p. On obtient: $\det A_p^{(p-1)} = \det A_p \neq 0$. Comme par construction la matrice $A_p^{(p-1)}$ est triangulaire supérieure on en déduit $a_{p,p}^{(p-1)} \neq 0$ et on peut se servir de ce terme comme pivot.

Finalement, la matrice M est le produit de matrices de la forme $T_{i,j}(\lambda)$ pour $i > j$ (en effet, à la première étape on a $j = 1$, $i \geq 2$, à la seconde $j = 2$, $i \geq 3$ etc.). Toutes ces matrices sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. La matrice est inversible et $L = M^{-1}$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Enfin, de la relation $MA = U$ on en déduit: $A = LU$, c.q.f.d.

On peut supposer de plus que la diagonale de L est constituée de 1. Dans ce cas la décomposition $A = LU$ est unique. En effet, supposons l'existence de deux telles décompositions $A = LU = L'U'$. Il vient alors $L'^{-1}L = U'U^{-1}$. Comme $L'^{-1}L$ est triangulaire inférieure avec une diagonale de 1 et $U'U^{-1}$ est triangulaire supérieure on a nécessairement $L'^{-1}L = U'U^{-1} = I_n$, et donc $L = L'$ et $U = U'$.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $r < n$ et si $\det A_p \neq 0$ pour tout $1 \leq p \leq r$, alors la matrice A admet une décomposition $A = LU$. De plus, on peut choisir l'une des deux matrices L ou U inversible. L et U sont inversibles toutes les deux si et seulement si $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

II. Cas particulier d'une matrice A tridiagonale

Je considère une matrice tridiagonale, i.e. une matrice de la forme suivante: $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,i} = a_i$, $a_{i,i+1} = b_i$, $a_{i+1,i} = c_i$ pour tout $i : 1...n-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon, i.e.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & ...... & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & ...... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ...... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ...... & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & ...... & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Posons - avec les notations de la première partie - $\Delta_k = \det A_k$.

Théorème 5. *On a la récurrence:* $\Delta_k = a_k \times \Delta_{k-1} - b_{k-1} \times c_{k-1} \times \Delta_{k-2}$ $(*)$.

Démonstration. On a: $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = a_1 a_2 - b_1 c_1$ et pour $k \geq 3$ on obtient en développant Δ_k par rapport à la dernière ligne:

$$\Delta_k = a_k \Delta_{k-1} - c_{k-1} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & ...... & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & ...... & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ...... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ...... & c_{k-3} & a_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ...... & 0 & c_{k-2} & b_{k-1} \end{pmatrix},$$

d'où $(*)$ en développant ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne.

Théorème 6. *Lorsque $\Delta_k \neq 0$ pour tout k, la matrice A admet une décomposition LU unique de la forme suivante:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ...... & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & ...... & 0 & 0 \\ ... & ... & ...... & ... & ... \\ 0 & 0 & ...... & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta_1 & b_1 & ...... & 0 \\ 0 & \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} & ...... & 0 \\ ... & ... & ...... & ... \\ 0 & 0 & ...... & \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Avec $L = (l_{i,j})$ et $U = (u_{i,j})$, où $l_{i,i} = 1$ pour tout i, $l_{i,i-1} = l_{i-1}$, $u_{i,i} = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$ pour tout i (avec $\Delta_0 = 1$) et $u_{i,i+1} = b_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, la matrice $A = LU = (a_{i,j})$ vérifie $a_1 = a_{1,1} = \Delta_1$, $a_i = a_{i,i} = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} + l_{i-1} b_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq n$, $b_i = a_{i,i+1} = u_{i,i+1} = b_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et enfin $c_{i-1} = a_{i,i-1} = l_{i-1} u_{i-1,i-1} = l_{i-1} \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-2}}$ pour $2 \leq i \leq n$.

On doit avoir pour $2 \leq i \leq n$: $l_{i-1} = \dfrac{c_{i-1} \Delta_{i-2}}{\Delta_{i-1}}$, ce qui définit les $l_1, l_2, ..., l_{n-1}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que pour tout $2 \leq i \leq n$:

$$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} + l_{i-1} b_{i-1} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} + \frac{c_{i-1} b_{i-1} \Delta_{i-2}}{\Delta_{i-1}},$$

c'est à dire: $\Delta_i = a_i \Delta_{i-1} - b_{i-1} c_{i-1} \Delta_{i-2}$ ce qui résulte du Théorème 5. Cette décomposition est unique - voir Corollaire 4.

Remarque. Du Corollaire 4, il en résulte que la non-nullité de tous les Δ_k est aussi une condition nécessaire pour l'existence d'une telle décomposition.

Cas particulier de matrice tridiagonale. Soit la matrice tridiagonale A avec: $a_{i,i} = 2a$ pour tout $i : 1...n$ et $b_j = c_j = -1$ pour tout $j : 1...n-1$.

Théorème 7. *La décomopsition LU de la matrice A existe si et seulement si a n'est pas de la forme $a = cos \dfrac{m\pi}{k+1}$ avec $1 \leq m \leq k \leq n$.*

Démonstration. Avec $\Delta_0 = 1$, la suite (Δ_k) vérifie la relation récurrente linéaire d'ordre 2: $\Delta_k = 2a\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}$ pour $2 \leq k \leq n$. Le trinôme $r^2 - 2ar + 1$ admet pour discriminant $\delta = 4a^2 - 4$. Distinguons trois cas suivant la valeur de a:

1. $|a| > \mathbf{1}$. Dans ces conditions, $\delta > 0$ et l'équation $r^2 - 2ar + 1 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $a + \sqrt{a^2 - 1}$ et $a - \sqrt{a^2 - 1}$. Il existe par suite deux réels K_1 et K_2 tels que pour tout $1 \leq k \leq n$: $\Delta_k = K_1(a + \sqrt{a^2-1})^k + K_2(a - \sqrt{a^2-1})^k$. On obtient avec $k = 0$ et $k = 1$:

$$K_1 + K_2 = 1 \text{ et } K_1(a + \sqrt{a^2-1}) + K_2(a - \sqrt{a^2-1}) = 2a$$

soit, finalement, pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$\Delta_k = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \times [(a + \sqrt{a^2-1})^{k+1} - (a - \sqrt{a^2-1})^{k+1}].$$

La condition $\Delta_k = 0$ équivaut à $(a + \sqrt{a^2-1})^{k+1} = (a - \sqrt{a^2-1})^{k+1}$. Dans ces conditions: $a + \sqrt{a^2-1} = \pm(a - \sqrt{a^2-1})$; on en déduit au carré $a\sqrt{a^2-1} = 0$ ce qui est impossible puisque $|a| > \mathbf{1}$. Finalement, lorsque $|a| > \mathbf{1}$, on a $\Delta_k \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$, et la matrice A peut s'écrire sous la forme $A = LU$.

Si $a > 1$, il existe $t > 0$ tel que $a = \cosh t$ et dans ce cas $\Delta_k = \dfrac{\sinh(k+1)t}{\sinh t}$.

Si $a < -1$, il existe $t > 0$ tel que $a = -\cosh t$ et alors $\Delta_k = (-1)^k \dfrac{\sinh(k+1)t}{\sinh t}$.

2. $a = \pm\mathbf{1}$. Dans ce cas, $\delta = 0$ et a est la seule racine de $r^2 - 2ar + 1 = 0$. Il existe alors K_1 et K_2 réels tels que pour $1 \leq k \leq n$: $\Delta_k = a^k(K_1 k + K_2)$. On obtient en considérant $\Delta_0 = 1 = K_2$ et $\Delta_1 = 2a = a(K_1 + 1)$:

$$\Delta_k = k + 1 \textit{ si } a = 1 \textit{ et } \Delta_k = (-1)^k(k+1) \textit{ si } a = -1.$$

Dans ce cas, de même que précédemment, aucun Δ_k n'est nul et A possède une décomposition LU.

3. $|a| < \mathbf{1}$. Dans ce cas, $\delta < 0$ et les racines de $r^2 - 2ar + 1 = 0$ sont complexes conjuguées: $a + i\sqrt{1-a^2}$ et $a - i\sqrt{1-a^2}$. En posant $\theta = \arccos a \in]0, \pi[$, il vient alors $\sqrt{1-a^2} = \sin\theta$ et les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Il existe deux nombres complexes K_1 et K_2 tels que pour tout $1 \leq k \leq n$: $\Delta_k = K_1 e^{ik\theta} + K_2 e^{-ik\theta}$ avec $K_1 + K_2 = 1$ et $K_1 e^{i\theta} + K_2 e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ soit $K_1 = \dfrac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}$ et $K_2 = -\dfrac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta}$, d'où, finalement:

$$\Delta_k = \frac{1}{2i\sin\theta}[e^{i(k+1)\theta} - e^{-i(k+1)\theta}] = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}.$$

$\Delta_k = 0$ équivaut à $(k+1)\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Comme $\theta \in]0, \pi[$, $\Delta_k = 0$ si et seulement si $\theta = \dfrac{m\pi}{k+1}$ avec $1 \leq m \leq k$. On en déduit que la décomposition LU de la matrice A existe si et seulement si a n'est pas de la forme $a = \cos\dfrac{m\pi}{k+1}$ avec $1 \leq m \leq k \leq n$, d'où le Théorème 7.

Bibliographie

1. H. Roudier – *Algèbre linéaire*, édition Vuibert, Paris, 2008.

2. J. Fresnel – *Algèbre des matrices*, édition Hermann, Paris, 1997.

3. R. Goblot – *Algèbre linéaire*, éditon Scientifika, Paris, 1994.

CHESTIUNI METODICE

Ce este mai simplu de utilizat: (CBS) sau (B)?

Dumitru M. BĂTINEŢU-GIURGIU[1]***, Neculai STANCIU*** [2]

Abstract. The authors present some aspects concerning the Bergström inequality and some types of problems in which this inequality is used. They assert that the use of this inequality is more convenient than the use of Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Keywords: Cauchy-Buniakovski-Schwarz inequality, Bergström′s inequality.

MSC 2010: 97H30.

Între inegalităţile elementare uzuale, sunt binecunoscute implicaţiile şi echivalenţele următoare:

• *Minkovski* $\Rightarrow$ *Hölder* $\Leftrightarrow$ *Bernoulli* $\Leftrightarrow$ *Radon* $\Leftrightarrow$ *Bergström* (B) $\Leftrightarrow$ *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* (CBS)
• *Jensen (Rogers)* $\Rightarrow$ *Hölder* $\Leftrightarrow$ *Bernoulli* $\Rightarrow$ *Radon* $\Rightarrow$ *Bergström* (B) $\Leftrightarrow$ *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* (CBS)

Vom comenta mai jos modalitatea în care sunt rezolvate cel mai adesea problemele de un anumit tip, anume, cele pentru care este firesc să se utilizeze *inegalitatea lui H. Bergström* (B):

Dacă $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $x_k \in \mathbb{R}$ *şi* $y_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, *atunci*:

$$\text{(B)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k}.$$

De obicei, aceste probleme, pe care le vom numi de tip (B), sunt rezolvate aplicând inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* (CBS):

Dacă $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a_k \in \mathbb{R}$ *şi* $b_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = \overline{1,n}$, *atunci*:

$$\text{(CBS)} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Desigur, fiecare dintre aceste modalităţi este corectă, numai că prima (cu *Bergström*) este mai simplă, fiind naturală şi directă, în timp ce a doua (folosind CBS) este mai complicată, fiind o consecinţă ce trebuie explicată.

Remarca 1. Inegalitatea lui *Bergström* (B) se poate demonstra fără a folosi inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* (CBS) şi invers, inegalitatea (CBS) se poate dovedi fără a utiliza inegalitatea (B).

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Matei Basarab", Bucureşti
[2]Profesor, Şcoala Gimnazială ,,George Emil Palade", Buzău; *stanciuneculai@yahoo.com*

Remarca 2. Inegalitatea (B) de mai sus este implicată de cea în care am considera „$x_k \in \mathbb{R}_+^*$" în loc de „$x_k \in \mathbb{R}$" (deci sunt echivalente). Demonstrăm acest fapt în trei paşi:

i) Dacă $x_k \in \mathbb{R}^*, \forall k = \overline{1,n}$, atunci avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{y_k} \geq \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k} \geq \frac{(|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k|)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k} \geq \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k},$$

deci (B) este adevărată.

ii) Dacă $x_k = 0, \forall k = \overline{1,n}$, avem: $0 = 0$, adevărat.

iii) Dacă $m\,(m \in \mathbb{N}^*,\ m < n)$ dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt nenule iar restul sunt nule, putem presupune (fără a restrânge generalitatea) că $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}_+^*$, iar $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$. În acest caz avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k^2}{y_k} \overset{(B)}{\geq} \frac{(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{m} y_k} = \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{m} y_k} \geq \frac{(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k},$$

deci (B) este demonstrată şi în acest caz.

Remarca 3. Inegalitatea (CBS) este implicată de cea în care am considera „$a_k, b_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$" în loc de „$a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = \overline{1,n}$" (deci sunt echivalente). Avem:

i) Dacă $a_k, b_k \in \mathbb{R}^*$, atunci:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|)^2 = (\sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |b_k|)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2) = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2),$$

deci inegalitatea (CBS) este adevărată şi dacă printre a_k, b_k se găsesc unele negative.

ii) Dacă printre a_k, b_k sunt unele nule, fără a restrânge generalitatea putem presupune că $a_k \in \mathbb{R}_+^*, k = \overline{1,m}$, $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_n = 0$ şi $b_k \in \mathbb{R}_+^*$, $k = \overline{1,p}$, $b_{p+1} = b_{p+2} = \ldots = b_n = 0$, unde $1 \leq p \leq m \leq n$.

Atunci $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k b_k$ şi avem:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 = (\sum_{k=1}^{p} a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{p} a_k^2)(\sum_{k=1}^{p} b_k^2) \leq (\sum_{k=1}^{m} a_k^2)(\sum_{k=1}^{p} b_k^2) = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2).$$

Propoziţie. *Inegalităţile (B) şi (CBS) sunt echivalente.*

Demonstraţie. Putem considera că $a_k, b_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, conform remarcilor 2 şi 3.

(B)$\Rightarrow$(CBS) Dacă în (B) luăm $x_k = a_k b_k$ şi $y_k = b_k^2$, $\forall k = \overline{1,n}$, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2b_k^2}{b_k^2}\geq\frac{(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2}\Rightarrow(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)\geq(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2,$$

deci are loc (CBS).

(CBS)⇒(B) Dacă în inegalitatea (CBS) luăm $a_k=\sqrt{y_k}$ şi $b_k=\dfrac{x_k}{\sqrt{y_k}}$, $\forall k=\overline{1,n}$, rezultă că

$$(\sum_{k=1}^{n}y_k)(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k})\geq(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{y_k}\cdot\frac{x_k}{\sqrt{y_k}})^2=(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\geq\frac{(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}y_k},$$

deci are loc (B).

Propoziţia precedentă pune în evidenţă faptul că orice problemă care se rezolvă cu inegalitatea (CBS) se poate rezolva şi cu inegalitatea (B), cât şi invers. Este firesc, însă, ca problemele de tip (B) să fie rezolvate cu inegalitatea lui Bergström.

În acest sens prezentăm o soluţie mult mai simplă decât cea dată în G.M.-B, nr. 11/2014, pentru o problemă propusă în G.M.-B, nr. 5/2014.

E:14666. *Se consideră numerele reale pozitive a,b,c şi d astfel încât $a+b+c+d=4$. Arătaţi că* $\dfrac{a^2}{b+c+d}+\dfrac{b^2}{a+c+d}+\dfrac{c^2}{a+b+d}+\dfrac{d^2}{a+b+c}\geq\dfrac{4}{3}$.

(*Vasile Scurtu*)

Soluţie. Se aplică *inegalitatea lui Bergström*; obţinem:

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{3(a+b+c+d)}=\frac{4}{3}.$$

Acest articol are ca punct de plecare unele momente din activitatea noastră de ,,problem posing" sau de ,,problem solving" sau chiar de propunerea spre publicare în reviste de matematică din diverse ţări a unor articole care utilizează inegalitatea (B). Astfel, am propus probleme care se rezolvau cu inegalitatea lui Bergström, dar, considerând-o necunoscută în acele ţări, am procedat ca în Gazeta Matematică, adică $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\overset{(CBS)}{\geq}\dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$. Referentul (secret) ne-a comunicat în referat ,,Please explain the step CBS". Pentru ca problema să nu fie respinsă a trebuit să facem acest lucru, explicând implicaţia: (B)⇒(CBS).

S-a mai întâmplat ca la aceeaşi publicaţie, sau la altele, să trimitem alte inegalităţi în care foloseam $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\overset{(B)}{\geq}\dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$. În aceste cazuri, materialele au fost ori aprobate fără obiecţie (inegalitatea fiind cunoscută sub numele Bergström), ori ni s-au cerut detalii despre istoricul relaţiei lui *H. Bergström* (inegalitatea nefiind cunoscută).

De fapt este foarte simplu, dacă inegalităţile sunt de tip (B), rezolvaţi-le cu *inegalitatea lui Bergström* şi nu cu inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz.*

O ,,demonstraţie” a inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz folosind inegalitatea lui Cebâşev !

***Titu ZVONARU*[1], *Neculai STANCIU*[2]**

Abstract. The authors signal out a case of incorrected application of Chebyshev′s inequality.
Keywords: Cauchy-Bouniakovski-Schwarz inequality, Chebyshev′s inequality.
MSC 2010: 97H30.

Pentru implicaţia Cebâşev $\Rightarrow$ (CBS), avem în vedere următoarea ,,**Demonstraţie**”. Dacă $a \geq b \geq c$ şi $x \leq y \leq z$, atunci aplicând inegalitatea lui Cebâşev, rezultă că

$$\begin{aligned}(ax+by+cz)^2 &\leq \left(\frac{1}{3}(a+b+c)(x+y+z)\right)^2 = \\ &= \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \cdot \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \\ &\leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2),\end{aligned}$$

pentru ultima parte folosindu-se inegalitatea $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$. Ca urmare,

$$(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2),$$

adică exact inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz (CBS).

,,Demonstraţia” prezentată este greşită! Pentru a aplica *Cebâşev* unei expresii de forma $ax+by+cz$, trebuie ca (a,b,c) şi (x,y,z) să fie ordonate. De cele mai multe ori putem presupune fără probleme că $a \geq b \geq c$. Nu presupunerea în sine e o greşeală, ci modul de a o folosi. Dacă din această presupunere rezultă că $x \geq y \geq z$ sau $x \leq y \leq z$, putem aplica *Cebâşev.* Dacă din presupunerea $a \geq b \geq c$ nu rezultă nimic despre x, y, z, nu putem aplica Cebâşev. Altfel spus: ,,*Demonstraţia*” este valabilă doar când cel mai mare dintre a, b, c este cuplat cu cel mai mare dintre x, y, z, cel mijlociu cu cel mijlociu şi cel mai mic cu cel mai mic (sau cel mai mare cu cel mai mic, cel mijlociu cu cel mijlociu şi cel mai mic cu cel mai mare). Ce se întâmplă dacă nu este aşa?

Un exemplu (pentru a fi mai clari). Să se demonstreze că

$$3(ax+by+cz) \geq (a+b+c)(x+y+z).$$

,,*Demonstraţie*”. Presupunem că $a \geq b \geq c$ şi $x \geq y \geq z$. Aplicăm Cebâşev şi gata.

Să luăm de bună inegalitatea tocmai ,,demonstrată” (deoarece am spus că putem face aceste presupuneri fără a afecta generalitatea). În acest caz, dacă luăm $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $x = 2$, $y = 5$, $z = 2$, avem: $39 \geq 45$!!!

[1]Comăneşti; *tzvonaru@yahoo.com*
[2]Profesor, Şcoala Gimnazială ,,George Emil Palade”, Buzău; *stanciuneculai@yahoo.com*

Observaţie. S-a mai făcut (intenţionat!) aceeaşi greşeală când s-a demonstrat mai sus CBS folosind *Cebâşev*.

Observaţie. Cele de mai sus nu înseamnă că problemele nu sunt adevărate, ci doar că, uneori, soluţiile nu sunt corecte (vezi, de exemplu: problema 5317 din SSM `http://www.ssma.org/Websites/ssma/images/Jan-15_(final_copy).pdf` cu comentariul la adresa `http://www.ssma.org/Websites/ssma/images/Feb-15(finalcopy).pdf` şi problema 1007 din CMJ, Sept. 2014, No.4).

Să exemplificăm cu o demonstraţie corectă, folosind *Cebâşev*, a *inegalităţii lui Nesbitt*:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Într-adevăr, să presupunem că $a\geq b\geq c$; rezultă că $\dfrac{1}{b+c}\geq\dfrac{1}{c+a}\geq\dfrac{1}{a+b}$. Aplicând inegalitatea lui *Cebâşev* şi apoi inegalitatea (CBS) avem

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\overset{(CBS)}{\geq}\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=$$
$$=\frac{1}{6}((a+b)+(b+c)+(c+a))\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\overset{(CBS)}{\geq}$$
$$\overset{(CBS)}{\geq}\frac{1}{6}\cdot 3^2=\frac{3}{2}.$$

Recreaţii ... matematice

Binomul lui Newton sub formă de determinant.

Fie $x,a\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Are loc formula

$$\text{(N)}\qquad (x+a)^n=\begin{vmatrix} x^n & -a & -ax & \ldots\ldots & -ax^{n-1}\\ x^{n-1} & 1 & -a & \ldots\ldots & -ax^{n-2}\\ x^{n-2} & 0 & 1 & \ldots\ldots & -ax^{n-3}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ x & 0 & 0 & \ldots\ldots & -a\\ 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1\end{vmatrix}$$

Formula (N) poate fi demonstrată prin inducţie matematică. Formula şi o altă demonstraţie sunt prezente în *Recreaţii Ştiinţifice,* vol. II (1884), pp. 9-11, unde se spune că *,,Această chestiune este tractată de D. Marchand în Journal de Mathématiques, Bourget et de Longchamps, anul 1883, pag. 248 şi următoarele."*

(*continuare la p. 129*)

Cercul celor nouă puncte (Euler) – sursă de noi probleme

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. Using the the nine-point circle (Euler′s circle) as a pretext, the author aims to suggest to pupils a way in which they could find their own research topic by themselves.

Keywords: nine-point circle, incircle, circumcicle, duality.

MSC 2010: 51M04.

Nota de faţă se adresează elevilor de gimnaziu şi liceu pasionaţi de matematică şi îşi propune să le arate cum, doar cu cunoştinţele dobândite în clasă, îşi pot găsi singuri un subiect de cercetare şi cum să-şi conducă apoi munca de obţinere a unor rezultate noi.

În revistele de matematică, elevul găseşte în mod frecvent comentarii, generalizări sau studii relativ la unele inegalităţi algebrice, unele teoreme de geometrie etc. întâlnite de el în manualele şcolare (de exemplu, generalizări ale inegalităţii mediilor sau ale teoremei lui Ceva etc.).

Vom folosi ca punct de pornire şi inspiraţie *cercul celor nouă puncte* (*cercul lui Euler*), o adevărată ,,vedetă" a geometriei triunghiului. În scopul propus, vom proceda astfel:

I. revedem cunoştinţele avute despre cercul lui Euler;
II. ,,demontăm" acest obiect şi propriităţile sale în ,,componente" (vom vedea mai târziu ce semnficaţie au cuvintele puse în ghilimele);
III. examinăm ,,piesele" obţinute şi apoi formulăm propriile noastre ,,obiecte" relativ la care ne propunem să abordăm un număr de ,,chestiuni" (evident, acestea ne sunt sugerate de obiectul de pornire - cercul lui Euler);
IV. căutăm să dăm răspuns (pozitiv sau negativ) măcar la o parte dintre chestiunile puse sau care apar între timp (eliminăm chestiunile formulate greşit, iar pe cele ,,rebele" le amânăm sau apelăm la un sprijin binevoitor);
V. redactăm Nota cu rezultatele obţinute, cu grija ca ea să fie clară şi bine argumentată (întregim cu ,,verigile": lipsă pe care, eventual, le constatăm).

Dat un triunghi ABC, cercul celor nouă puncte (cercul lui Euler) asociat triunghiului este cercul determinat de mijloacele laturilor, picioarele înălţimilor şi mijloacele segmentelor AH, BH şi CH ale triunghiului (notaţiile $O, H, I, R, r, \mathcal{C}(O,R), \mathcal{C}(I,r)$ etc. sunt cele uzuale).

În privinţa poziţiei lui faţă de cercurile $\mathcal{C}(O,R)$ şi $\mathcal{C}(I,r)$, amintim următoarele proprietăţi:

[1] Prof.dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; *t_birsan@yahoo.ro*

• centrul cercului lui Euler, notat O_9, este mijlocul segmentului OH, iar pentru raza sa, notată R_9, avem: $R_9 = \dfrac{R}{2}$ şi $r \leq R_9 < R$ (cu egalitate dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral);

• cercul lui Euler, $\mathcal{C}(O_9, R_9)$, se află în interiorul cercului $\mathcal{C}(O, R)$ sau este secant cu acesta, după cum $\triangle ABC$ este ascuţitunghic sau obtuzunghic; în cazul în care $\triangle ABC$ este dreptunghic, $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}(O, R)$ în vârful unghiului drept;

• cercul $\mathcal{C}(I, r)$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ (într-un punct numit punctul lui Feurbach).

În privinţa poziţiei cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ faţă de $\triangle ABC$, amintim:

• dacă $\triangle ABC$ este ascuţiunghic $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ intersectează laturile sale în puncte interioare lor;

• dacă $\triangle ABC$ este obtuzunghic, $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ intersectează latura mare în puncte interioare, iar pe celelalte două în câte un punct interior şi unul exterior laturii respective;

• dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic, $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ intersectează ipotenuza în două puncte interioare, trece prin vârful unghiului drept, iar catetele mai sunt intersectate în câte un punct interior lor.

Nu continuăm cu alte proprietăţi ale cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$, avem deja suficient material pentru reflecţie, care să ,,aprindă" ideile de început ale viitoarei Note. Au ieşit în evidenţă anumite elemente şi raporturi între ele: segmentele interceptate de $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ pe laturi, poziţia acestuia faţă de $\mathcal{C}(O, R)$ şi $\mathcal{C}(I, r)$, poziţia centrului O_9, raportul razei R_9 faţă de R şi r. A venit momentul de ,,naştere" a Notei.

Reluând definiţia cercului lui Euler, vedem că acesta interceptează pe laturi segmente bine determinate – ele având ca extremităţi picioare de înălţimi şi mediane. Ce se întâmplă dacă modificăm această restricţie asupra segmentelor interceptate? De exemplu, dacă am considera că ele sunt situate în interiorul laturilor sau includ laturile sau conţin picioarele înălţimilor dar nu şi pe cele ale medianelor etc.

Referindu-ne la proprietăţile cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ de mai sus, putem considera, în mod formal, alte cercuri şi clase de cercuri. De exemplu, faptul că O_9 este mijlocul lui OH şi are raza $\dfrac{R}{2}$ ne poate sugera să considerăm cercuri cu centrele pe OH şi care împart OH în segmente aflate în raportul k iar razele lor să fie egale cu $\dfrac{R}{k}$ sau să vedem ce revine tringhiului ABC dacă O_9 ar fi şi pe cercul $\mathcal{C}(I, r)$ sau pe alt cerc/dreaptă. Dacă ne-am referi la poziţia cercului $\mathcal{C}(O_9, R_9)$ faţă de vârfurile A, B, C sau la unele proprietăţi de tangenţă enunţate mai sus, am avea prilejul să formulăm noi întrebări.

Urmează o etapă de selecţie în care să reţinem pentru cercetare două-trei dintre chestiunile formulate, cele mai interesante, accesibile şi care corespund gustului nostru.

Pentru continuarea discuţiei am reţinut următoarea chestiune:

Fie dat un triunghi ABC ascuţitunghic. Să considerăm familia de cercuri $\mathcal{C}(O', R')$ *care au proprietatea următoare:*

(P) *cercul* $\mathcal{C}(O', R')$ *intersectează laturile triunghiului în interiorul lor.*

Să se vadă dacă au loc inegalităţile $r \leq R' < R$.

Menţionăm mai întâi că triunghiul ABC este luat ascuţiunghic în concordanţă cu faptul că această formă este impusă de cercul lui Euler asociat lui, care are proprietatea (P). Observăm că cercurile $\mathcal{C}(O,R)$ şi $\mathcal{C}(I,r)$ nu au proprietatea (P), dar apar ca situaţii limită în care segmentele MN, PQ şi RS (fig. 1) se extind la laturi sau se restrâng la puncte (de tangenţă). Aşadar, cercurile $\mathcal{C}(O',R')$ sunt ,,intermediare" în raport cu $\mathcal{C}(I,r)$ şi $\mathcal{C}(O,R)$, iar cercul lui Euler este printre ele. În prima inegalitate din enunţ putem avea egalitate, aşa cum se întâmpla în cazul cercului Euler asociat unui triunghi echilateral. Vom prezenta două soluţii pentru a stabili că inegalităţile propuse au loc.

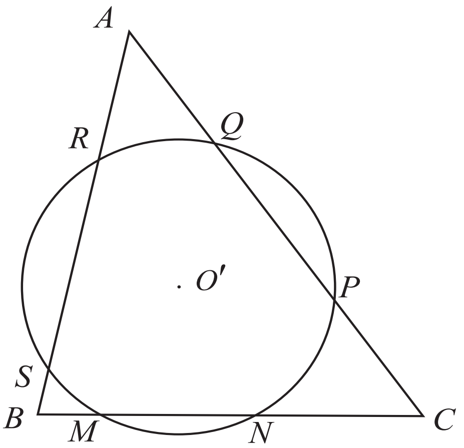


Fig.1

Soluţia 1. *Inegalitatea* $R' < R$. Triunghiul ABC fiind ascuţiunghic, punctele O şi O' sunt în interiorul său.

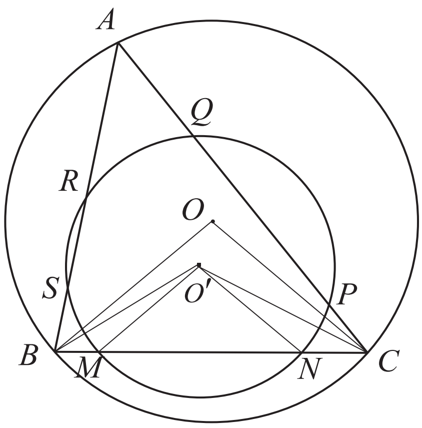


Fig.2

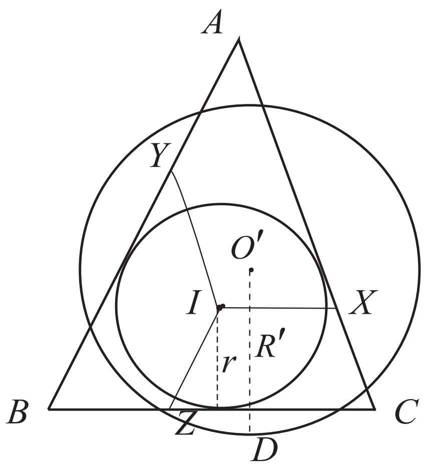


Fig. 3

Evident, O' este situat în unul dintre triunghiurile OAB, OBC şi OCA, fie el OBC ca în fig. 2. Unim O' cu vârfurile B, C şi punctele M, N. Avem: $O'M + O'N < O'B + O'C < OB + OC$, de unde $2O'M < 2OB$, adică $R' < R$.

Inegalitatea $R' \geq r$. Ducem semidreptele IX, IY şi IZ paralele cu BC, CA, respectiv AB (fig. 3). Dacă $IXAY$ este patrulaterul care conţine centrul O', atunci raza $O'D$ a cercului $\mathcal{C}(O',R')$ perpendiculară pe dreptele BC şi IX este mai mare decât distanţa dintre ele, adică decât r, ceea ce încheie demonstraţia.

Făcând apel la dualitatea: vârf-latură, mediatoare-bisectoare, O-I, cerc circumscris-cerc înscris, cerc printr-un vârf - cerc tangent la o latură etc., putem reduce stabilirea inegalităţii $r \leq R' < R$ la stabilirea părţii drepte $R' < R$. Chiar dacă această cale nu este mai simplă, o astfel de soluţie merită atenţie.

Soluţia 2. *Inegalitatea* $R' < R$. Este uşor de văzut că vârfurile A, B, C sunt puncte exterioare cercului $\mathcal{C}(O', R')$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $O'A < O'B < O'C$ (fig. 4). Parcurgem trei etape.

1) Considerăm cercul $\mathcal{C}(O', O'A)$ concentric cu $\mathcal{C}(O', R')$, care trece prin vârful A şi lasă în exterior vârfurile B şi C.

2) Considerăm punctul O'' astfel încât $O''A = O''B = O'A$; el este punctul de intersecţie a mediatoarei laturii AB cu cercul $\mathcal{C}(A, AO')$ şi situat în interiorul triunghiului. Cercul $\mathcal{C}(O'', O''A)$ are raza egală cu a cercului $\mathcal{C}(O', O'A)$ şi trece prin vârfurile A şi B (putem spune că $\mathcal{C}(O'', O''A)$ se obţine deplasând cercul $\mathcal{C}(O', O'A)$ astfel încât să treacă şi prin vârful B).

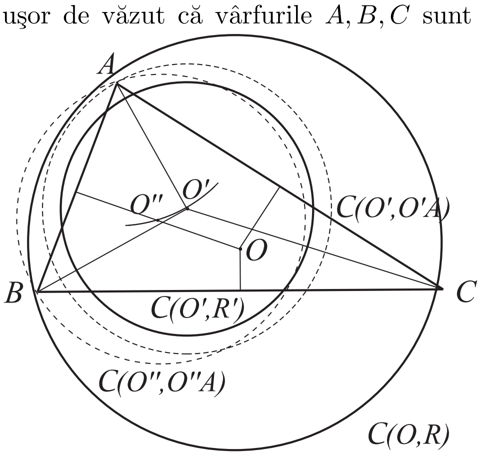


Fig.4

Punctul C se află în exteriorul cercului $\mathcal{C}(O'', O''A)$. Într-adevăr, din faptul că $O'B < O'C$ rezultă că punctul O' este de partea mediatoarei laturii BC în care se află B. Pe de altă parte, O'' este situat în unghiul $\widehat{AO'B}$ (după cum rezultă din $O'A < O'B$ şi modul cum a fost consturit O''). Ca urmare, O'' se află, ca şi O', de partea mediatoarei laturii BC ce conţine vârful B. Aşadar, $O''B < O''C$, adică C este exterior faţă de $\mathcal{C}(O'', O''A)$.

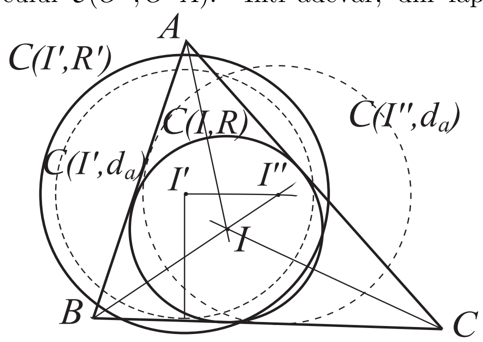


Fig. 5

3) În sfârşit, mişcând punctul O'' pe mediatoarea laturii AB până ce ajunge în O – centrul cercului circumscris –, cercul $\mathcal{C}(O'', O''A)$ se măreşte treptat şi în final coincide cu cercul $\mathcal{C}(O, R)$.

Urmărind razele cercurilor ce apar în etapele parcurse, avem: $R' < O'A = O''A < R$, deci $R' < R$.

Inegalitatea $r < R'$. Se parcurg etapele de mai sus, procedând prin dualitate. Fie $\mathcal{C}(I', R')$ un cerc cu proprietatea (P). Să notăm cu d_a, d_b, d_c distanţele punctului I' la laturile BC, CA, respectiv AB şi să presupunem că $d_a > d_b > d_c$ (fig. 5). Se realizează, prin dualitate, trecerile: $\mathcal{C}(I', R') \to \mathcal{C}(I', d_a) \to \mathcal{C}(I'', d_a) \to \mathcal{C}(I, r)$ (a se urmări fig. 5). În prima trecere cercul dat este restrâns la un cerc concentric tangent la o latură, în a doua se menţine mărimea cercului şi se obţine un cerc tangent la două laturi (centrul I'' este intersecţia bisectoarei unghiului B cu paralela prin I' la latura BC) şi în a treia se obţine cercul tangent la toate laturile, adică cercul înscris

$\mathcal{C}(I, r)$.

Evident, între razele acestor cercuri avem: $R' > d_a > r$, deci $R' > r$, ceea ce încheie demonstraţia.

Nu am fost preocupaţi de epuizarea subiectului ales. Scopul urmărit a fost să arate elevului cu aptitudini pentru matematică cum se concepe o Notă. Au rămas destule lucruri de făcut; de exemplu, se pot dovedi uşor afirmaţiile:

1) *dacă un poligon convex este înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ şi centrul O este în interiorul poligonului, iar $\mathcal{C}(O', R')$ este un cerc cu proprietatea (P) relativ la poligon, atunci $R' < R$;*

2) *dacă un cerc $\mathcal{C}(O', R')$ are proprietatea (P) şi segmentele determinate pe laturile triunghiului conţin picioarele înălţimilor şi medianelor corespunătoare lor, atunci $R' > \dfrac{R}{2}$.*

Trebuie procedat cu atenţie, pentru că răspunsul la o problemă pe care ne-o propunem poate fi şi negativ. Astfel, dacă cercul $\mathcal{C}(O', R')$ are proprietatea (P), atunci după cum am văzut, avem că $r \leq R' < R$, dar nu putem afirma că $\mathcal{C}(O', R')$ este inclus în interiorul cercului $\mathcal{C}(O, R)$ şi nici că $\mathcal{C}(I, r)$ este inclus în interiorul lui $\mathcal{C}(O', R')$.

Recreaţii ... matematice

(*continuarea ,,recreaţiei" de la p.124*)

Demonstraţia formulei binomului lui Newton.

Pornim de la identitatea $y^{n+1} - x^{n+1} = (y - x)(y^n + xy^{n-1} + ... + x^{n-1}y + x^n)$. Punând aici $y = x + a$ sau $y - x = a$, deducem că $y^{n+1} - ay^n - axy^{n-1} - ... - ax^{n-1}y = x^{n+1} + ax^n$. Această egalitate şi cele obţinute trecând pe n în $n-1, n-2, ..., 0$ formează următorul sistem de ecuaţii în necunoscutele $y^{n+1}, y^n, ..., y$:

$$\begin{cases} y^{n+1} - ay^n - axy^{n-1} - ... - ax^{n-1}y = x^n\,(x+a) \\ \qquad y^n - ay^{n-1} - ... - ax^{n-2}y = x^{n-1}\,(x+a) \\ \qquad\qquad \text{.......................................} \\ \qquad\qquad\qquad y^2 - ay = x\,(x+a) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y = x + a \end{cases}.$$

Cum determinantul sistemului este egal cu 1, pentru necunoscuta y^{n+1} avem:

$$y^{n+1} = (x+a)^{n+1} = (x+a) \cdot \begin{vmatrix} x^n & -a & -ax & \text{...........} & -ax^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & -a & \text{...........} & -ax^{n-2} \\ x^{n-2} & 0 & 1 & \text{...........} & -ax^{n-3} \\ \text{......} & \text{....} & \text{....} & \text{...........} & \text{.......} \\ x & 0 & 0 & \text{...........} & -a \\ 1 & 0 & 0 & \text{...........} & 1 \end{vmatrix},$$

de unde rezultă formula (N).

ŞCOLI ŞI DASCĂLI

Şcoala domnească (1714–1766)

Secolul al XVIII-lea, marcat în lumea românească de profunde schimbări politice şi considerat, în general, o perioadă de regres, a fost în domeniul învăţământului o etapă de evoluţie constantă. Numărul instituţiilor a sporit, Şcoala domnească a fost reformată de mai multe ori, s-au editat manuale, s-au înfiinţat biblioteci, iar procentul ştiutorilor de carte a crescut. Dintre toate realizările menţionate mai sus, cea mai însemnată a fost organizarea pe baze solide a Şcolii domneşti[1], instituţie care a funcţionat mai bine de o sută de ani (1714-1821), fie sub acest nume, fie cel de Academia domnească, începând din 1766.

Până în prezent, au fost formulate diferite opinii cu privire la originea acesteia, unii istorici considerând că domnitorul Nicolae Mavrocordat a reorganizat Colegiului de la Trei Ierarhi[2], alţii susţinând că instituţia înfiinţată de Vasile Lupu a fost efemeră, neexistând nici o legătură între cele două şcoli[3]. Din acest punct de vedere, considerăm că nu este vorba nici de reînfiinţarea Colegiului Vasilian, dar nici nu putem nega legătura dintre cele două instituţii, în condiţiile în care ambele au fost organizate din iniţiativa domnitorilor, şi-au ţinut cursurile în aceeaşi clădire (pentru o perioadă), având însă modele diferite. Apreciem că Şcoala domnească a fost fondată prin reformarea Colegiului Vasilian, căruia i s-au adus modificări în ceea ce priveşte planul de studii.

Deschiderea Şcolii domneşti din Iaşi a avut loc în timpul lui Nicolae Mavrocordat, domnitor preocupat de propria educaţie, de instruirea fiilor săi, aşa cum ni-l relevă şi paginile din cronicile vremii: ,,om înţelept şi învăţat ce era în toate ştiinţele (...). Cunoştea limba greacă veche, avea multe cunoştinţe şi în istorie (...). Ştia multe limbi în chip desăvârşit ca şi tatăl său, Alexandru. Era om bisericos, păzitor al sfintelor porunci şi se ţinea departe de ospeţe”[4].

Corespondenţa dintre Nicolae Mavrocordat şi profesorul Iacob Manos din Argos confirmă informaţiile prezentate în letopiseţe, ilustrând interesul pentru educaţie, preocupările sale filosofice, mai ales că din aceste învăţături a putut înţelege mai bine problemele statului[5].

---

[1] În actul emis în 1766 de către Grigorie Alexandru Ghica, instituţia ieşeană este denumită pentru prima dată ,,Academie a învăţăturilor şi epistimurilor”.

[2] A. D. Xenopol, *Memoriu asupra învăţământului superior în Moldova*, Iaşi, Tipografia Naţională, 1885, p. 10; V. A. Urechia, Istoria şcoalelor de la 1800-1864, vol. I, Bucureşti, Imprimeria Statului, 1892, p. 12.

[3] S. Bârsănescu, *Academia domnească din Iaşi 1714–1821*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1962, p. 31.

[4] *Cronica Ghiculeştilor (1695-1754). Istoria Moldovei între anii 1695-1754*, ediţie îngrijită de Nestor Camariano şi Ariadna Camariano-Cioran, Bucureşti, Editura Academiei, 1965, pp. 65, 75.

[5] *Documente privitoare la istoria românilor culese de Eudoxiu Hurmuzaki* vol. XIV, partea I (1320-1716), editat de N. Iorga, Bucureşti, 1913, p. 427.

Deoarece actul care a stat la baza organizării instituţiei ieşene nu s-a păstrat sau nu a fost descoperit până în prezent, nu putem afirma cu certitudine data la care a fost deschisă. Pe baza izvoarelor istorice indirecte, credem că momentul poate fi plasat în primăvara lui 1714, pregătirile începând cu un an înainte, când domnitorul Moldovei apela la profesorul său pentru a-i trimite cărţile necesare. De altfel, Cronica anonimă a Moldovei 1661-1729 relatează că: ,,Acesta domnu în dzilele sale, al doile an a domnii sale, [...] au aşedzat domnul şcoale de învăţătura cărţii, în oraş, în Iaşi, cu cheltuiala sa: şcoală elinească, grecească, moldoveniască, cu dascăli învăţaţi"[6]. Însă, definitivarea acestui proiect în anul 1713 este exclusă deoarece problema organizării instituţiei a fost discutată cu patriarhul Ierusalimului, Hrisant Notara, în timpul vizitei acestuia la Iaşi, eveniment petrecut la începutul anului următor, după Bobotează[7]. Din izvoarele evocate mai sus, nu aflăm data exactă a deschiderii şcolii, însă avem certitudinea că aceasta nu a avut loc mai devreme de 6 ianuarie 1714, dar nici mai târziu de 3 aprilie 1714, când profesorul Iacob Manos îl felicita pe Hrisant Notara pentru sfatul şi sprijinul acordat domnului Moldovei în direcţia edificării acesteia: ,,Admir şi şcolile ridicate în Moldova şi doresc celui care le-a alcătuit, domnului şi stăpânitorului meu, să le îngrijească şi să le cârmuiască întru mulţi ani"[8].

În ceea ce priveşte programa de studii a instituţiei ieşene, considerăm că aceasta era asemănătoare cu cea a Şcolii domneşti din Ţara Românească, care, la rândul său, avea ca model pe cea a Academiei din Constantinopol. Un argument în acest sens îl constituie faptul că ambele instituţii au fost organizate cu sprijinul şi în prezenţa patriarhului Hrisant Notara şi că trebuiau deschise în acelaşi an, 1707, însă condiţiile politice au determinat amânarea acestui proiect pentru Moldova până în 1714. În consecinţă, studiile filologice şi teologice ocupau un loc important, dar nu erau neglijate nici disciplinele ştiinţifice, printre obiectele parcurse numărându-se logica, retorica, fizica, metafizica, ,,despre cer", ,,despre naştere şi pieire", ,,despre suflet". În descoperirea acestor domenii se foloseau operele învăţaţilor greci şi latini precum Socrate, Sofocle, Euripide, Demostene, Pindar, Xenofon, Plutarh, Tucidide, Pitagora, operele teologice ale lui Grigore din Nazianz, lucrarea despre sintaxă a lui Alexandru Mavrocordat[9]. O importanţă deosebită era acordată studiului limbilor greacă veche şi nouă, slavonă şi română: ,,Adus-au şi doi dascăli de carti elinească şi unul de carte cia de obşti greciască ca să înveţe cine ar vrea şi un dascăl ca să înveţă carte slovenească şi altul ca să înveţă pe înţăles moldoveneşti"[10]. Întrucât domnitorul cunoştea bine limba latină, întreţinând conversaţii de ore întregi cu fostul rege al Poloniei, Stanislav Lesczynski, considerăm că nu putea omite acest obiect de studiu din planul de învăţământ. De asemenea, filosofia, religia şi istoria erau studiate deoarece dom-

[6] *Ibidem,* vol. XIV, partea I, pp. 535-536; Pseudo-Alexandru Amiras, *Cronica anonimă a Moldovei de la 1661 până la 1729*, Bucureşti, Editura Academiei Române 1975, p. 141.

[7] *Cronica Ghiculeştilor (1695-1754). Istoria Moldovei între anii 1695-1754*, p. 65; Pseudo-Alexandru Amiras, op. cit., p. 177; Axinte Uricariul, *Letopiseţul Ţării Moldovei* (*1711-1715*), Chişinău, 1999, p. 104.

[8] *Documente privitoare la istoria românilor culese de Eudoxiu Hurmuzaki*, vol. XIV, partea I, pp. 565, 586.

[9] *Ibidem*, vol. XIV, partea I, pp. 392-394.

[10] Axinte Uricariul, op. cit., p. 104; *Cronica Ghiculeştilor* (*1695-1754*). *Istoria Moldovei între anii 1695-1754*, p. 65; Pseudo-Alexandru Amiras, *op. cit.*, p. 177.

nitorul Nicolae Mavrocordat avea cunoştinţe bogate de filosofie, era om bisericos, iar înţelegerea istoriei constituia o prioritate deoarece conştientiza rolul acesteia pentru un om de stat[11].

Şcoala domnească din Iaşi şi-a deschis porţile în anul 1714, dar a fost organizată treptat, până la mutarea lui Nicoale Mavrocordat pe tronul Ţării Româneşti, corespondenţa domnitorului ilustrând preocuparea pentru sporirea numărului profesorilor şi dotarea acesteia cu cărţi. Astfel, înainte de începerea activităţii, fuseseră aduşi la Iaşi doi dascăli, Constandie şi Athanasie, iar la începutul anului 1715, au venit încă doi, Constantin, numit profesor la Şcoala domnească, şi ,,prea-învăţatul popă chir Serafim", care se ocupa de educaţia fiului domnitorului: ,,învăţatul chir Serafim s-a aşezat pentru robul Tău, fiul mieu Scarlat, şi de-ar da Dumnezeu ca prin sfintele rugăciuni să înainteze în creştere şi virtute"[12]. Prea-învăţatul Constantin s-a lovit iniţial de refuzul ucenicilor de a frecventa învăţământul în limba greacă, dar, la scurt timp, dovedindu-şi calităţile de dascăl şi având susţinerea domnitorului, i-a convins să-i urmeze cursurile. Tot în anul 1715, au fost numiţi şi dascălii Gheorghe Papadopulos (pentru limba greacă) şi Ştefan (pentru limba greacă), cel din urmă fiind un tânăr din partea locului, ,,serios şi destoinic pentru o astfel de sarcină"[13].

În ceea ce priveşte nivelul de studii, Ştefan Bîrsănescu şi Constantin Cihodaru apreciau că instituţia din Iaşi era o şcoală superioară de tipul celei din Ţara Românească[14]. Aceeaşi concluzie se desprinde şi din scrierile istoricului N. Iorga, care, referindu-se atât la şcoala ieşeană, cât şi la cea din Bucureşti, le considera ,,şcoli bune, foarte bune, corespunzătoare celor din centrul şi apusul Europei"[15]. Din punctul nostru de vedere, Şcoala domnească, dacă ar fi să o comparăm cu organizarea sistemului de educaţie din zilele noastre, cuprindea atât învăţământul mediu, cât şi pe cel superior. De altfel, în secolele XVII-XVIII nu existau trei trepte de învăţământ (primar, secundar şi superior), putându-se vorbi doar de cel elementar - unde tinerii învăţau scrisul, cititul, socotitul - şi şcolile ,,înalte" care înglobau învăţământul mediu şi superior din zilele noastre.

Cursurile acestei instituţii de învăţământ s-au ţinut iniţial în clădirea ridicată pentru funcţionarea Colegiului Vasilian, pe Uliţa Ciubotărească, lângă feredeu (baia publică). Aceasta fusese avariată în 1686-1687, când biserica Trei Ierarhi împreună cu şcoala fuseseră distruse de polonezii lui Ioan Sobieski, dar, între timp, a fost reparată, iar în 1714 se găsea în bună stare[16]. Cea mai relevantă dovadă o avem într-un act din 1761, care atestă schimbul de proprietăţi dintre mănăstirea Trei Ierarhi şi suiulgii Dima şi Constantin: ,,au fost acele şcoale până în zilele lui Mihai Racoviţă voievod, la leat 7232 (1723 sau 1724), şi arzând de foc şcoalele, au rămas locul slobod şi pustiu

[11] *Istoria oraşului Iaşi*, vol. I, p. 292; Axinte Uricariul, op. cit., pp. 104-105; *Cronica Ghiculeştilor (1695-1754). Istoria Moldovei între anii 1695-1754*, p. 75; Pseudo-Alexandru Amiras, op. cit., p. 311.

[12] *Documente privitoare la istoria românilor culese de Eudoxiu Hurmuzaki,* vol. XIV, partea I, pp. 565-566 şi pp. 863-864; Ibidem, vol. XIV, partea I, pp. 676-677.

[13] *Documente privitoare la istoria românilor culese de Eudoxiu Hurmuzaki,* vol. XIV, partea I, pp. 682-684

[14] Ştefan Bârsănescu, *op. cit.*, p. 36; *Istoria oraşului Iaşi*, vol. I, p. 290

[15] N. Iorga, *Istoria învăţământului românesc*, p. 76.

[16] Constantin I. Andreescu, *op. cit.*, p. 42.

până la leat 7244 (1736), când egumenul mănăstirii Trei Ierarhi l-a dat cu bezmăn suiulgiului Dima şi fratelui său Constantin"[17].

După incendiul din 1724, domnitorul Mihai Racoviţă, negăsind o clădire destul de încăpătoare pentru desfăşurarea activităţii Şcolii domneşti, a hotărât mutarea dascălilor în incinte separate. Astfel, cursurile de limba greacă s-au ţinut în cadrul mănăstirii Barnovschi, apoi au fost mutate la Mitropolie. Cea din urmă instituţie, pentru a avea resursele necesare întreţinerii şcolii, începând cu anul 1729, a primit numeroase scutiri de dări şi danii de la mitropolitul Gheorghie, de la numeroşi boieri şi negustori şi chiar de la domnitorul ţării[18]. Cursurile de ,,slavonie" s-au ţinut în chiliile bisericii Sfântul Sava din Iaşi, domnitorul Mihai Racoviţă fiind nevoit să găsească o soluţie rapidă pentru adăpostirea elevilor şi profesorilor, iar acest lăcaş de cult dispunea de spaţiu suficient şi nu fusese afectat de incendiu[19]. După mutarea cursurilor Şcolii domneşti cu predare în limba greacă în chiliile de la Mitropolie, domnitorul, din dorinţa de a aşeza în cadrul acestei instituţii şi cursurile de limbă slavonă, la 20 februarie 1735 a luat hotărârea de a ridica o construcţie nouă pentru a servi scopului propus. Până în primăvara anului următor, la 1 martie 1736, construirea caselor de la Mitropolie a fost finalizată, însă nu avem certitudinea că şcoala slavonească a fost mutată imediat de la Sfântul Sava la Mitropolie[20]. Cursurile de limba română, nu ştim unde au fost mutate, însă pe parcursul deceniului al cincilea se ţineau în cadrul bisericii Sfântul Nicolae domnesc. Acestea au rămas pe lângă aceeaşi biserică şi după 1762, când şcoala slavonă a fost mutată în incinta Mitropoliei, alături de cea cu predare în limba greacă[21].

În ceea ce priveşte evoluţia ,,Şcolii înalte domneşti" în prima jumătate a secolului al XVIII-lea, aceasta a funcţionat fără întrerupere, cunoscând atât perioade de înflorire, cât şi de declin. Mutarea lui Nicoalae Mavrocordat pe tronul Ţării Româneşti şi desfăşurarea războiului austro-otoman din 1716-1718 au contribuit la dezorganizarea ei. Noul domnitor, Mihail Racoviţă, deşi a reconfirmat hrisovul emis de către înaintaşului său, nu s-a preocupat îndeaproape de această instituţie, declinul ei reieşind din corespondenţa profesorului Constantin Malatios: ,,dascălii au rămas fără şcolari, iar profesorii fără plată"[22].

Beneficiind de o educaţia aleasă, înţelegând rolul acesteia în devenirea unui popor (,,ţiind samă de prea-asprele răutăţi şi nesuferite nenorociri ce vin din neînvăţătura cea întunecată"[23]), Grigorie al II-lea Ghica a trecut la reformarea Şcolii domneşti, dovedind o preocupare constantă pentru acest domeniu pe parcursul celor trei domnii. Aceasta a fost reorganizată într-un timp foarte scurt, cu sprijinul lui Nicoalae Mavrocordat, pe atunci domn în Ţara Românească, şi prin ,,părinteasca îngrijire şi supraveghere" a lui Hrisant Notara. Grigorie al II-lea Ghica a menţinut vechea struc-

[17] *Documente privitoare la istoria oraşului Iaşi*, vol. VI, pp. 330-332.

[18] *Ibidem*, vol. IV, pp. 70-71, 77, 80, 99, 118, 149, 150, 162-164, 187-188, 192, 197-198, 220-221, 235-236, 302.

[19] Dan Bădărău, Ioan Caproşu, *Iaşii vechilor zidiri*, Iaşi, Editura Demiurg, 2007, p. 163.

[20] *Documente privitoare la istoria oraşului Iaşi*, vol. IV, pp. 162-164, 193-196.

[21] *Ibidem*, vol. V, pp. 369-370, pp. 373-374, pp. 382-384 şi vol. vol. VII, pp. 220-221.

[22] *Documente privitoare la istoria românilor culese de Eudoxiu Hurmuzaki*, vol. XIV, partea a II-a, pp. 814-822.

[23] *Ibidem*, vol. XIV, partea a II-a, p. 1003.

tură cu predare ,,în patru limbi", respectiv greaca veche şi nouă, slava şi româna, iar măsurile luate au dus şi la modernizarea instituţiei în ceea ce priveşte metodele folosite. Astfel, în predarea limbii greceşti se recomanda să se procedeze de la studiul noţiunilor simple la cele complexe: ,,toate treptat şi fără amestec, cu ceruta rânduială, cu predarea şi ordinea cuvenită, şi nu mai puţin şi cu îngrijirea deosebită"[24]. Banii pentru plata profesorilor şi întreţinerea elevilor erau asiguraţi din contribuţiile anuale puse pe seama mitropolitului, episcopilor, boierilor cu dregătorii şi negustorilor din Iaşi[25], această hotărâre fiind modificată în cursul celei de a doua domnii deoarece aceştia se adunau greu, stabilindu-se întreţinerea şcolilor de către preoţi[26].

Constantin Mavrocordat, spirit luminat, a completat măsurile luate de predecesorul său, acordând sprijin tinerilor săraci care doreau să-şi continuie studiile la Şcoala domnească şi luând măsuri pentru a asigura o bună pregătire elevilor. De asemenea, a arătat o preocupare deosebită pentru educaţia preoţilor, stabilind că supravegherea ucenicilor, care doreau să urmeze o carieră ecleziastică, să fie pusă tot în grija mitropolitului Moldovei: cei care ,,să vor face preoţi dintre dânşii să fie învăţaţ(i) şi pedepsiţ(i) să poată ceti orânduiala bisericii după cum se cuvine"[27]. Tot în această perioadă, Constantin Mavrocordat a introdus două discipline noi (latina şi araba) şi a lărgit sfera de recrutare a elevilor: ,,Aşijderea au mai făcut şcoali de învăţătură şi latineşti şi arăpeşti şi au dat de ştire tuturor mazililor în toată ţara ca să-ş aducă copiii la învăţătură la şcoală"[28].

Împrejurările politice şi criza financiară generată, în special, de consolidarea dominaţiei otomane au dus de cele mai multe ori la dezorganizarea şcolii. Într-o astfel de situaţie se găsea în 1758, când domnitorul Ioan Calimah a orânduit pe mitropolitul Iacob Putneanu şi pe învăţatul Critie să cerceteze starea instituţiei ieşene. Măsura a fost determinată şi de faptul că dascălii nu aveau o imagine prea bună în societatea moldavă, iar dorinţa domnitorului era să aibă profesori ,,pricopsiţi" de la care ucenicii să aibă ce învăţa, întrucât aprecia că şcoala este ,,cuibul înţelepciunilor, grădina iscusitelor meşteşuguri, izvorul învăţăturilor, glasul celor de demult care buciumă adevărul"[29].

Raportul întocmit în urma cercetării situaţiei de la Şcoala domnească dezvăluia că instituţia se afla în declin deoarece fii boierilor nu acordau o importanţă deosebită propriei educaţii, uneori părăsind-o pentru a ocupa diferite dregătorii, iar ucenicii săraci erau nevoiţi să îşi întrerupă studiile din cauză că nu dispuneau de mijloacele materiale necesare: ,,unii din ucenici iubind mai mult cinstea Curţii, alţii fiindu streini şi de cele trebuincioasă pentru viaţă lipsiţ(i), neîngăduind vremea şi neşăzând până la sfârşitul învăţăturii ies, părăsind cartea"[30]. Decăderea era determinată şi de dezvoltarea haotică a învăţământului particular, unii profesori - străini sau localnici -

[24] *Ibidem*, vol. XIV, partea a II-a, p. 995 şi p. 1004.
[25] *Ibidem*, vol. XIV, partea a II-a, pp. 1005-1006.
[26] *Documente privitoare la istoria oraşului Iaşi*, vol. V, p. 335.
[27] *Ibidem*, vol. IV, p. 163.
[28] Ion Neculce, *Letopiseţul Ţării Moldovii de la Dabija voievod până la domnia lui Ioan Mavrocordat voievod (1662-1743). O samă de cuvinte*, ediţie critică şi studiul introductiv de Gabriel Ştrempel, Bucureşti, Editura Minerva, 1982, p. 858.
[29] *Ibidem*, vol. VI, p. 194.
[30] *Ibidem*, vol. VI, p. 195.

strângând ucenici şi făcând ,,şcoale osăbite", care loveau în învăţământul organizat de către domnitor.

Pentru redresarea acesteia, Ioan Calimah a stabilit că ucenicii nu aveau voie să părăsească instituţia până la finalizarea studiilor, acestea urmând să se desfăşoare obligatoriu pe o perioadă de şase ani, şi nici să ocupe demnităţi în administraţia statului. Şcolilor particulare, deschise de diferiţi profesori, li se interzicea funcţionarea, tinerii moldoveni fiind îndrumaţi spre ,,Şcoala cea mare domnească", iar cei mare încălcau aceste hotărâri, erau denunţaţi şi pedepsiţi chiar de domnitor. În ceea ce priveşte dascălii de la curţile boiereşti, puteau să îşi continue activitatea cu condiţia să îi instruiască doar pe tinerii acelor familii şi să nu formeze clase[31]. Hotărârile luate au dus la o mai bună organizare a instituţiei, proces continuat de către domnitorul Grigorie al III-lea Ghica, care a transformat-o într-o adevărată Academie a ,,epistimurilor" (ştiinţelor), intrând într-o nouă etapă de evoluţie.

În concluzie, în anul 1714 a fost organizată, de către domnitorul Nicolae Mavrocordat, Şcoala domnească, cea mai importantă instituţie cu rol educativ din Moldova care cuprindea cursurile corespunzătoare învăţământului secundar şi superior din zilele noastre. Aceasta a funcţionat până la incendiul din 1724 în clădirile de pe Uliţa Ciubotărească, apoi cursurile au fost mutate în incinte separate, pentru ca din a doua jumătate a secolului al XVIII-lea să fie reunite şi mutate in incinta Mitropoliei. Programa era asemănătoare cu cea a Şcolii domneşti din Bucureşti, care avea ca model pe cea a Academiei din Constantinopol, studiile teologice şi filologice ocupând un loc important, fără a fi neglijate total nici noţiunile cu caracter ştiinţific. O importanţă deosebită se acorda studiilor de limba greacă veche şi nouă, limba slavă, limba română, dar şi filosofiei şi istoriei, domnitorul fiind un cunoscător al acestor discipline de studiu. Şcoala a funcţionat fără întrerupere, cunoscând atât perioade de înflorire, în timpul unor domnitori precum Nicolae Mavrocordat, Grigorie al II-lea Ghica, Constantin Mavrocordat, dar şi de declin, în timpul lui Mihail Racoviţă sau Ioan Mavrocordat. La mijlocul secolului al XVIII-lea, instituţia se afla în declin, însă, în timpul domnitorului Grigorie al III-lea Ghica, a fost reorganizată, fiind transformată într-o adevărată academie, în care erau studiate atât disciplinele umaniste, cât şi ştiinţele.

Prof. dr. Adriana RADU
Colegiul Naţional din Iaşi

[31] *Ibidem,* vol. VI, p. 196.

Concursul de matematică ,,Al.Myller" Ediţia a XIII-a, Iaşi, 26 februarie 2015

Clasa a V-a

1. a) Determinaţi cel mai mic număr natural care începe cu 2015, se termină cu 2015 şi are suma cifrelor 2015.

b) De câte ori se foloseşte cifra 7 în scrierea tuturor numerelor naturale mai mici ca 2015?

2. Demonstraţi că, oricare ar fi numărul natural p impar şi nedivizibil cu 3, există un număr natural m astfel încât $p^2 = 24m + 1$.

3. Arătaţi că numărul $a = \overline{\underbrace{44\ldots4}_{2014 \text{ de } 4}5}^2 + \overline{\underbrace{11\ldots1}_{2015 \text{ de } 1}} - 10^{2015}$ este pătrat perfect.

Clasa a VI-a

1. Se consideră unghiurile distincte $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle COD$, cu interioarele nedisjuncte, ambele având măsurile de $60°$. Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOC$ şi $\measuredangle BOD$.

2. Se consideră mulţimea $A = \left\{1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots11}_{19 \text{ de } 1}\right\}$.

a) Arătaţi că mulţimea A nu se poate scrie ca reuniunea a două mulţimi disjuncte având aceeaşi sumă a elementelor.

b) Demonstraţi că mulţimea A nu conţine multipli de 121.

c) Arătaţi că mulţimea A nu se poate scrie ca reuniunea a două mulţimi disjuncte având acelaşi produs al elementelor.

Cătălin Ciupală

3. a) Se consideră numărul natural $n \geq 3$ şi numărul $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Arătaţi că fracţia $\frac{k}{n}$ este ireductibilă dacă şi numai dacă fracţia $\frac{n-k}{n}$ este ireductibilă.

b) Determinaţi suma fracţiilor ireductibile din mulţimea $\left\{\frac{1}{2015}, \frac{2}{2015}, \ldots, \frac{2014}{2015}\right\}$.

Clasa a VII-a

1. Determinaţi fracţiile ireductibile $\frac{a}{b}$ care se scriu sub formă zecimală ca fracţii periodice, cu zecimala de pe poziţia b egală cu b.

Gabriel Popa

2. Fie $ABCD$ un dreptunghi iar M şi N mijloacele laturilor BC respectiv AD. Dacă P este un punct pe semidreapta $(CD$ care nu aparţine segmentului $[CD]$ şi

Q este intersecţia dintre PN şi AC, demonstraţi că MN este bisectoarea unghiului $\measuredangle QMP$.

3. Determinaţi numerele prime p şi q cu proprietatea că $p^2 + q = 201q^2 + p$.

Titu Zvonaru

Clasa a VIII-a

1. Se consideră segmentele OA, OB şi OC, două câte două perpendiculare. Notăm cu M şi cu N proiecţiile punctului O pe dreptele AB respectiv BC. Arătaţi că unghiurile $\measuredangle OAN$ şi $\measuredangle OCM$ sunt congruente dacă şi numai dacă segmentele AB şi BC sunt congruente.

Gabriel Popa

2. Se consideră mulţimile $A = \left\{ \frac{a}{b} | a, b \in (0,1) \right\}$ şi $B = \left\{ \frac{a}{b} | a, b \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \right\}$.

a) Arătaţi că $A = (0, +\infty)$.

b) Demonstraţi că cele două mulţimi sunt egale.

Gabriel Popa

3. Cinci numere reale pozitive au proprietatea că, dacă din suma oricăror trei se scade suma celor două rămase, diferenţa obţinută este pozitivă. Demonstraţi că produsul tuturor celor zece astfel de diferenţe nu este mai mare decât pătratul produsului celor cinci numere iniţiale.

Clasa a IX-a

1. Pe un cerc se consideră, în sensul mişcării acelor de ceasornic, punctele A, B, C, D, E şi F astfel încât măsurile arcelor $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DE}, \widehat{EF}$ şi $\widehat{FA}$ (măsurate tot în sensul mişcării acelor de ceasornic) să fie, într-o ordine oarecare, $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ şi $6x$, unde $x \in \mathbb{R}_+^*$, iar valoarea absolută a diferenţei măsurilor oricăror două arce opuse să fie egală cu $3x$. Arătaţi că putem alege patru dintre cele şase puncte care să fie vârfurile unui trapez isoscel.

Cristian Lazăr

2. Fie x, y, z numere reale strict pozitive având suma pătratelor egală cu 3. Arătaţi că

$$\frac{x^2y}{x^3+y} + \frac{y^2z}{y^3+z} + \frac{z^2x}{z^3+x} \leq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru

3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care au proprietatea că

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

Gheorghe Iurea

Clasa a X-a

1. Determinaţi numerele reale $x \in (\log_3 2, +\infty)$ cu proprietatea că

$$\log_2(3^{\log_2(3^x-1)} - 1) = \log_3(2^{\log_3(2^x+1)} + 1).$$

2. Notăm cu a_k cel mai mare divizor impar al numărului natural nenul k. Demonstraţi că $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \geq \dfrac{n!}{2^{n-1}}$, oricare ar fi numărul natural nenul n. Pentru care valori ale lui n se atinge egalitatea?

3. Fie a şi b două numere complexe astfel încât $|a| > 1$, $|b| > 1$ şi $|a+b| > 1$. Arătaţi că $|z-a| + |z-b| + |z+a+b| > 3$, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 1$.

Gheorghe Iurea

Clasa a XI-a

1. Determinaţi matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care au proprietatea că $A^2 = O_3$.

2. Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este monotonă şi are proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty} (f(2x) - f(x)) = 0$. Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} (f(ax) - f(x)) = 0$, oricare ar fi numărul real pozitiv a.

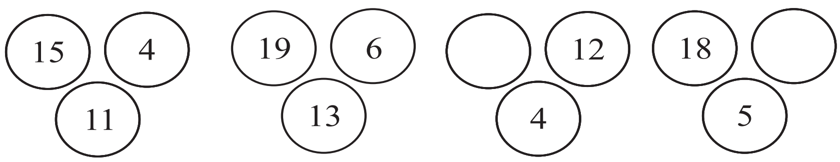
3. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are toţi termenii egali cu 1 sau cu 2 şi are proprietatea că, pentru fiecare număr întreg $n \geq 1$, $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n - n\sqrt{2}| < \dfrac{1}{2}$. Demonstraţi că nu există numere naturale $n_0 \geq 1$ pentru care şirul $(a_n)_{n\geq n_0}$ să fie periodic.

Concursul de matematică ,,Florica T. Câmpan"

Ediţia a XV-a, Iaşi, 28 februarie 2015

Clasa I

1. a) Descoperă regula şi completează corespunzător:



b) Micşorând vecinii unui număr cu 3, obţinem 4 şi 6. Care este numărul?

c) Ionuţ foloseşte de 17 ori cifra 7 în scrierea unui şir cresctor de 16 numere naturale mai mici decât 100. Care ar putea fi cel mai mic număr din şir? Dar cel mai mare? Scrieţi şi voi un astfel de şir!

2. a) În urmă cu trei ani, Mirela şi Ioana aveau împreună 18 ani. Câţi ani au împreună acum?

b) Dacă din cel mai mare număr mai mic decât 30 scazi cel mai mic număr mai mare decât 20, vei afla vârsta Mariei. Ce vârstă are Maria?

3. a) O vrăbiuţă sare de 10 ori în 60 de secunde. Fiecare săritură măsoară 5 cm. În câte secunde va parcurge 25 cm?

b) Într-un şir sunt 16 băieţi şi fete. La fiecare capăt de şir se află câte un băiat. Ei sunt aşezaţi astfel: un băiat - două fete, un băiat - două fete şi aşa mai departe. Câte fete sunt în şir? Dar băieţi?

Clasa a II-a

1. a) Determinaţi numerele $\overline{ad2}$, $\overline{a9b}$, $\overline{2dc}, \overline{ade}, \overline{3ff}$ ştiind că sunt numere pare consecutive, în ordine crescătoare.

b) Se consideră şirul format din numerele care conţin numai cifrele $0, 1$ şi 2, scrise în ordine crescătoare: $0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, \ldots$ Câte numere de trei cifre conţine şirul?

2. a) Dan, Ion şi Florica colecţionează timbre. Ei au clasoare identice. Florica observă că ei îi mai sunt necesare 20 timbre, lui Dan îi mai sunt necesare 18 timbre şi lui Ion îi mai trebuie 16 timbre pentru ca fiecare să-şi completeze clasorul. Ea mai observă că, dacă ar da toate timbrele pe care le are celorlalţi doi, aceştia ar avea clasoarele complete. Câte timbre sunt într-un clasor complet? Câte timbre are fiecare?

b) În clasele a II-a dintr-o şcoală sunt 80 de elevi. Cum pot fi alcătuite clasele, dacă numărul elevilor din fiecare clasă este cel puţin 25 şi cel mult 30?

3. Am scris toate numerele naturale de două cifre pe câte un cartonaş şi am pus cartonaşele într-o cutie. Câte cartonaşe trebuie extrase, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că am extras cel puţin două cartonaşe cu numere având aceeaşi sumă a cifrelor?

Clasa a III-a

1. a) Dacă $3a + b = 11$ şi $2b + c = 8$, calculaţi $6a + 8b + 3c$.

b) Mă gândesc la un număr. După ce îi adaug cifra zero la sfârşit, îl micşorez cu dublul numărului iniţial şi obţin 64. La ce număr m-am gândit?

2. a) Mama are de cinci ori vârsta fiicei, iar împreună au 36 de ani. Peste câţi ani mama va avea de patru ori vârsta fiicei?

b) Pentru a câştiga mâna fetei de împărat, Făt-Frumos a primit următoarea poruncă:

– Să-mi aduci două zile la rând câte un buchet de trandafiri, fiecare cu cel puţin 17 şi cel mult 31 de trandafiri! În fiecare dintre buchete, trandafirii galbeni să fie de şase ori mai puţini decât cei albi şi roşii la un loc, iar cei roşii de două ori mai puţini decât cei albi! Să nu-mi aduci în ambele zile acelaşi număr de trandafiri!

Cum va proceda Făt-Frumos, dacă vrea să obţină mâna fetei de împărat?

3. Spunem că un număr natural de trei cifre este *simpatic* dacă diferenţa a două dintre cifrele sale este 8.

a) Găsiţi trei numere simpatice.

b) Câte numere simpatice există?

Clasa a IV-a

1. a) Determinaţi cel mai mare număr format din cifre distincte, care este mai mic decât numărul 333333.

b) Lia aşază un număr de mărţişoare, în mod egal, mai întâi în 4 cutii, apoi în 5 cutii. Prima dată rămân două mărţişoare în afara cutiilor iar a doua oară rămân trei mărţioare în afara cutiilor. Numărul mărţişoarelor din fiecare cutie este, în primul caz, cu 5 mai mare decât numărul mărţişoarelor din fiecare cutie în cel de-al doilea caz. Câte mărţioare are Lia?

2. În turneul de şah *Hasdeenii* au participat, la categoria 10-12 ani, un număr de 16 şahişti. Cel care pierde este eliminat din joc. În primele două runde s-au jucat câte 8 partide, în următoarele două câte 4 partide, iar în ultimele două runde s-au jucat două, respectiv o partidă, desemnându-se câştigătorul.

a) Câte partide s-au jucat în întregul turneu?

b) Ce loc a obţinut jucătorul care a câştigat patru partide?

3. Se consideră 40 de cărţi de joc: patru cu valoarea 1, patru cu valoarea 2, patru cu valoarea 3, ..., patru cu valoarea 10. Toate cărţile se împart la întâmplare, în mod egal, între doi jucători. Fără a se uita la cărţile pe care le are, pe rând, fiecare aşază câte o carte pe masă, cu faţa în sus. Dacă la un moment dat unul dintre jucători observă pe masă câteva cărţi cu suma 15, el poate elimina din joc acel grup de cărţi. Câştigă cel care a eliminat mai multe astfel de grupe.

Denisa şi Dorel joacă acest joc. Spre final, pe masă rămâne o singură carte, cu valoarea 9. Denisa mai are în mână două cărţi având valorile 3 şi 5, iar Dorel are în mână o singură carte. Ce valoare are cartea din mâna lui Dorel?

Cătălin Budeanu

Clasa a V-a

1. a) Arătaţi că numărul $1 + 3 + 5 + \ldots + 2015$ este pătrat perfect.

b) Aflaţi care este ultimul termen al sumei $1 + 3 + 5 + \ldots + n$, ştiind că suma este egală cu 10000000000.

2. O pereche ordonată de numere naturale nenule (a, b) se numeşte *pereche specială* dacă numărul $3^a + 7^b$ se divide cu 10.

a) Câte perechi speciale de forma $(a, 2015)$, unde $a < 2015$, există?

b) Dacă (a, b) este pereche specială, arătaţi că şi (b, a) este pereche specială.

Dorel Luchian

3. În Fruitsland, ţara lui Natural-Juice Împărat, sunt livezi cât vezi cu ochii şi discuţiile tot despre pomii fructiferi se poartă. Într-o zi, în Piaţa Centrală din Fruitsburg, capitala ţării, mai mulţi pieţari care vindeau portocale şi mere stăteau de vorbă:

– Eu am o livadă cu portocali, care e cât un sfert din livada cu portocali a împăratului, zicea pieţarul Bebe, care vindea portocale.

– Livada mea cu portocali e doar jumătate cât a ta, spunea altul către Bebe.

– Livada mea cu portocali e doar jumătate cât a ta, se adresa al treilea vobitorului dinaintea lui.

– Livada mea cu portocali e chiar cât a ta şi toţi cei care am vorbit avem la un loc exact 4000 de portocali, a concluzionat ultimul către vobitorul dinaintea lui.

Aprins de subiectul discuţiei şi foarte mândru de sine, Bebe a revenit şi s-a lăudat:

– Eu mai am şi o livadă cu meri, care e şi ea cât un sfert din livada cu meri a împăratului.

– Livada mea cu meri e doar jumătate cât a ta, a spus altul către Bebe.

– Livada mea cu meri e doar jumătate cât a ta, i-a replicat altul celui de dinainte.

Şi tot aşa, această a doua discuţie a continuat şi nimeni nu mai ştie câţi vorbitori au fost dar se ştie că, până la ultimul vorbitor, fiecare a spus că livada lui cu meri e doar jumătate cât a celui care a vorbit înaintea lui, în timp ce ultimul dintre vorbitori a zis către penultimul:

– Livada mea cu meri e chiar cât şi a ta şi toţi cei care am vorbit acum despre livezi cu meri avem la un loc exact 4096 de meri.

a) Câţi portocali sunt în livada cu portocali a lui Natural-Juice Împărat?

b) Câţi meri sunt în livada cu meri a lui Natural-Juice Împărat?

Silviu Boga

Clasa a VI-a

1. Avem la dispoziţie o riglă negradată şi un raportor de pe care s-au şters toate gradaţiile, cu excepţia celei care indică unghiul de $17°$. Prezentaţi câte un procedeu pentru a desena unghiuri având măsurile de:

a) $85°$; b) $10°$; c) $13°$.

2. Când conduce, tata merge întotdeauna cu viteza de 90 km/h atunci când drumul coboară, cu 60 km/h atunci când drumul urcă şi cu 72 km/h atunci când parcurge porţiuni orizontale de drum.

Mergând în excursie la munte, tata are nevoie de cinci ore pentru a ajunge din Iaşi în staţiune şi de patru ore pentru întoarcerea din staţiune în Iaşi (atât la dus, cât şi la întoarcere, se merge fără opriri şi pe acelaşi traseu). Determinaţi distanţa pe care o parcurge tata dus-întors.

3. Două supermarketuri vindeau lapte DELICIOS la acelaşi preţ. Într-o zi de sâmbătă, au fost stabilite următoarele promoţii: primul supermarket anunţă o reducere de preţ de 20% iar al doilea, la fiecare trei cutii cumpărate, oferă o a patra cutie gratuit. Bianca merge la primul supermarket, iar David la al doilea. Ei cumpără această marcă de lapte, luând fiecare acelaşi număr de cutii şi plătind aceeaşi sumă totală. Câte cutii a cumpărat fiecare?

Ciprian Baghiu

Clasa a VII-a

1. În vârfurile unui triunghi, în mijlocul fiecărei laturi precum şi în centrul său de greutate se scriu numere naturale astfel încât suma numerelor asociate oricăror trei puncte coliniare să fie 17. Câte modalităţi de scriere a numerelor există?

2. Un pătrat de latură n este format din pătrăţele de latură 1. Parcurgem toate pătrăţelele unitate, rând cu rând, fiecare rând de la stânga la dreapta şi rândurile fiind parcurse de sus în jos. Marcăm primul pătrăţel, lasăm două nemarcate, apoi marcăm trei, lasăm patru nemarcate ş.a.m.d. O secvenţă de pătrăţele consecutive marcate sau nemarcate poate conţine pătrăţele de pe rânduri consecutive şi, dacă o secvenţă de pătrăţele care ar trebui marcate nu poate fi, în final, încheiată, se renunţă la marcarea sa.

a) Dacă pătratul desenat conţine nouă pătrăţele marcate, determinaţi latura sa.

b) Dacă pătratul desenat conţine n^2 pătrăţele marcate, $n \geq 2$, determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care ultimul pătrăţel de pe ultimul rând este marcată.

c) Dacă pătratul desenat conţine $2k+1$ pătrăţele marcate, $k \geq 2$, demonstraţi că există un rând care are toate pătrăţelele marcate.

Claudiu-Ştefan Popa

3. Un ţăran are o bucată de pământ de formă triunghiulară pe care trebuie să o împartă în două parcele de arii egale. Casa ţăranului (pe care o vom considera ca fiind un punct) este situată pe una dintre laturi şi trebuie să se învecineze cu ambele parcele. Arătaţi cum poate împărţi ţăranul terenul în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) casa este mijlocul uneia dintre laturi;

b) casa nu este mijlocul niciunei laturi.

Doru Buzac

Clasa a VIII-a

1. a) Determinaţi numărul natural nenul n pentru care $\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 7}+\dfrac{2^3}{7\cdot 15}+\ldots+\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}<0,999$.

b) Dacă $x \in \left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, calculaţi valoarea expresiei

$$E(x)=\sqrt{x(x+2)+1}+\sqrt{x(x-1)+\frac{1}{4}}.$$

2. Două vase, unul în formă de cub cu latura x dm şi unul în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 9 dm, lăţimea 4 dm şi înălţimea 10 dm, sunt aşezate pe o masă şi comunică în partea inferioară printr-o conductă cu capacitatea de 5 litri.

a) Dacă latura cubului este $x = 8$ dm şi se toarnă în vasul cubic 505 litri de apă, aflaţi înălţimea la care se ridică apa în cele două vase.

b) Aflaţi latura cubului astfel încât, atunci când cubul este plin, cantitatea de apă din cele două vase să fie aceeaşi.

3. Într-o ţară cu 64 de oraşe, o companie aeriană are 2000 de rute (tur-retur). Demonstraţi că, utilizând rutele companiei, din orice oraş se poate ajunge în oricare altul.

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2015

Clasele primare

P311. *Scrie în casete toate numerele de la* 10 *la* 19*, o singură dată fiecare, astfel încât să obţii rezultatul dat:* $\square+\square=\square+\square=\square+\square=\square+\square=\square+\square=29$.

(*Clasa I*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

Soluţie. $10+19=11+18=12+17=13+16=14+15=29$.

P312. *Scrie numerele de la* 0 *la* 9 *în grupe de câte patru astfel încât, în fiecare grupă, numerele scrise să fie în ordine descrescătoare şi vecine.*

(*Clasa I*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

Soluţie. $9876, 8765, 7654, 6543, 5432, 4231, 3210$.

P313. *Fratele meu este cu* 3 *ani mai mic decât mine, iar eu am* 8 *ani. Care va fi suma vârstelor noastre peste* 2 *ani?*

(*Clasa I*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Peste doi ani suma vârstelor va fi 10 ani + 7 ani = 17 ani.

P314. *Două numere îndeplinesc condiţiile: a) suma lor este* 81 *şi b) dacă din primul număr se scade* 9*, rezultatul va fi dublul celui de-al doilea. Aflaţi numerele.*

(*Clasa a II-a*) **Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. $a+b=81$, $a=9+2b \Rightarrow 2b+9+b=81 \Rightarrow 3b+9=81 \Rightarrow 3b=72 \Rightarrow b=24, a=57$.

P315. *Un număr de două cifre se numeşte ordinar dacă are suma cifrelor mai mare decât suma cifrelor vecinului său mai mic. Scrieţi toate numerele ordinare care au suma cifrelor* 8.

(*Clasa a II-a*) **Georgiana Avădanei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Numerele de două cifre care au suma cifrelor 8 sunt: $17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80$. Numărul 80 nu este ordinar deoarece $7+9=16, 8+0=8$, $16>8$. Celelalte şapte numere sunt ordinare.

P316. *Completaţi un pătrat* 4×4 *cu numerele* $2,3,4,5,6,7,8$ *astfel încât ele să fie scrise crescător şi consecutiv pe fiecare linie şi fiecare coloană. De câte ori apare numărul* 5*?*

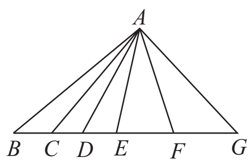
(*Clasa a II-a*) **Bianca Gimiga, elevă, Iaşi**

2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8

Soluţie. Singura completare posibilă este cea din figura alăturată. Numărul 5 apare de patru ori.

P317. *Câte triunghiuri sunt în figura alăturată?*

(*Clasa a III-a*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**



Soluţie. Sunt atâtea triunghiuri câte segmente distincte se pot forma cu punctele B, C, D, E, F, G, adică 5+4+3+2+1 = 15.

P318. *Găsiţi numerele naturale* $\overline{ab}$ *astfel încât* $\overline{ab}=b+b\times b+b\times b\times b$.

(*Clasa a III-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

Soluţie. Dacă $b \geq 5$, suma din dreapta este un număr de trei cifre. Verificând celelalte valori posibile, obţinem singura soluţie $b = 4$, $a = 8$: $84 = 4+4\times4+4\times4\times4$.

P319. *Să se arate că niciun număr din şirul* $5, 10, 15, 20, \ldots, 100$ *nu poate avea suma cifrelor egală cu* 15.

(*Clasa a III-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Un număr din acest şir poate avea ultima cifră 0 sau 5. Suma cifrelor este maximă dacă cifra unităţilor este 5, iar cifra zecilor este 9. Concluzionăm că suma poate fi maximum 14.

P320. *Putem găsi şase numere consecutive de forma* $7 \times n$ *a căror sumă să fie un număr par?* (*Exemplu:* $14, 21, 28$ *sunt numere consecutive de forma* $7 \times n$.)

(*Clasa a III-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fie $7 \cdot a$, $7 \cdot (a+1)$, $7 \cdot (a+2)$, $7 \cdot (a+3)$, $7 \cdot (a+4)$, $7 \cdot (a+5)$ cele şase numere consecutive de forma $7 \cdot n$. Printre numerele $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$, trei numere sunt impare. Deoarece numărul 7 este impar, atunci trei dintre numerele considerate vor fi pare, iar celelalte trei vor fi impare. Rezultă că suma celor şase numere este de fiecare dată un număr impar.

P321. *Mama şi cei cinci copii ai săi au împreună* 86 *ani. Vârstele copiilor sunt numere pare consecutive. La naşterea celui mai mic copil, mama avea triplul vârstei celui de-al treilea copil. Aflaţi vârstele celor şase.*

(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Vieru, Iaşi**

Soluţie. Vârstele copiilor în ordine descrescătoare sunt: $a+8$, $a+6$, $a+4$, $a+2$, a. În prezent mama are vârsta $3 \cdot (a+4) + a = 4a + 12$. Înseamnă că $9a + 32 = 86$, de unde rezultă $a = 6$ (ani). Vârstele copiilor sunt: 6 ani, 8 ani, 10 ani, 12 ani şi 14 ani. Mama are $4 \cdot 6 + 12 = 36$ (ani).

P322. *Numerele naturale* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *au proprietatea că fiecare dintre ele, începând cu al doilea, este jumătatea sumei tuturor numerelor scrise înaintea lui. Aflaţi* n *ştiind că* $x_n = 9$.

(*Clasa a IV-a*) **Doina Ivaşcu, elevă, Iaşi**

Soluţie.

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 2 \cdot 9 = 18$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} = 18 : 3 \times 2 = 12$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-3} = 12 : 3 \times 2 = 8$

Deoarece 8 nu se împarte exact la 3, înseamnă că $x_1 = 8, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 9$ şi $n = 4$.

P323. *Daţi un exemplu de* 39 *numere pare, consecutive, mai mari ca* 39 *şi a căror sumă se împarte exact la* 4.

(*Clasa a IV-a*) **Andreea Munteanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fiecare din cele 39 numere se împarte exact la 2. Este necesar ca suma câturilor să se împartă exact la 2. Acest lucru este posibil dacă 20 câturi sunt impare şi 19 câturi sunt pare. Rezultă că primul şi ultimul cât trebuie să fie impare.

Exemplu de astfel de numere: $42, 44, 46, \ldots, 118$.

P324. *Un dreptunghi format din pătrăţele având latura de* 1 *cm are perimetrul de* 20 *cm. Se completează pătrăţelele dreptunghiului respecând regulile următoare:*

1) *după ce se completează prima linie se trece la completarea liniei a doua ş.a.m.d;* 2) 1 *se scrie o singură dată,* 2 *de două ori,* $\ldots, n$ *se scrie de* n *ori. Să se afle* n*, ştiind că procedând în acest fel toate pătrăţelele au fost completate.*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Dreptunghiul are $1+2+3+\ldots+n = n(n+1):2$ pătrăţele. Pe de altă parte, numărul pătrăţelelor este $L \cdot l$. Înseamnă că $n\cdot(n+1) = 2\cdot L\cdot l$. Deoarece $2\cdot L\cdot l$ este produsul a două numere consecutive şi $L+l=10$, iar $2\cdot 7\cdot 3 = 6\cdot 7$, urmează că $n=6$. Alte soluţii nu mai sunt.

Clasa a V-a

V.186. *Determinaţi ultimele două cifre ale numărului* $A = 7+7^2+7^3+\ldots+7^{2015}$.

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

Soluţie. Observăm că $1+7+7^2+7^3 = 400$. Atunci $A = 7+7^2+7^3+(1+7+7^2+7^3)\cdot(7^4+7^8+\ldots+7^{2012}) = 399 + M_{100}$, deci utlimele două cifre ale numărului A sunt 99.

V.187. *Stabiliţi în câte zerouri se termină scrierea zecimală a produsului* $A = 1016^2\cdot 1017^2\cdot\ldots\cdot 2015^2$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Soluţie. Observăm că $A = B^2$, unde $B = 1016\cdot 1017\cdot\ldots\cdot 2015$. Produsul B conţine 200 de factori care se divid cu 5. Dintre acestea, 40 se divid cu 25, 8 se divid chiar cu 125 şi 2 se divid cu 625. Prin urmare, exponentul lui 5 în descompunerea în factori primi a lui B este $200+40+8+2 = 250$. Factorul 2 apare la un exponent mai mare, prin urmare B se termină în 250 de zerouri. Rezultă că scrierea zecimală a lui A se termină în 500 zerouri.

V.188. *Arătaţi că* $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2014}{2015}\right)^2 > \frac{1}{2015}$.

Viorica Momiţă, Iaşi

Soluţie. Cum $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \ldots, \frac{2014}{2015} > \frac{2013}{2014}$, rezultă că $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2014}{2015}\right)^2$ $> \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2013}{2014}\cdot\frac{2014}{2015} = \frac{1}{2015}$.

V.189. *Demonstraţi că nu există numere naturale nenule* m, n *şi* k *pentru care* $4^{2m} + 9^{2n+1} = k^2+k+1$.

Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Cum $U(4^{2m}) = 6$ şi $U(9^{2n+1}) = 9$, rezultă că $U(4^{2m}+9^{2n+1}) = 5$, deci numărul $4^{2m}+9^{2m+1}$ se divide cu 5. Pe de altă parte, avem:

restul împărţirii lui k la 5	0	1	2	3	4
restul împărţirii lui k^2 la 5	0	1	4	4	1
restul împărţirii lui k^2+k+1 la 5	1	3	2	3	1

Rezultă că numărul k^2+k+1 nu poate fi divizibil cu 5 şi, de aici, concluzia problemei.

V.190. *Arătaţi că există o infinitate de perechi* $(n, n+1)$*, cu* $n\in\mathbb{N}$*, astfel încât atât* n*, cât şi* $n+1$ *se pot scrie ca sumă de trei pătrate perfecte nenule.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Dacă $n = 26k^2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $n = k^2 + (4k)^2 + (3k)^2$, iar $n + 1 = 1^2 + k^2 + (5k)^2$.

V.191. *Demonstraţi că orice număr natural mai mare ca* 5 *se poate scrie ca suma dintre un număr prim şi un număr compus.*

Mariana-Liliana Popescu, Suceava

Soluţie. Dacă n este număr par, atunci $n = 2 + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right)$, cu $\frac{n}{2} - 1 \geq 2$. Dacă $n = 6k + 1$, $k \geq 1$, atunci $n = 3 + 2(3k - 1)$, cu $3k - 1 \geq 2$. Dacă $n = 6k + 3$, $k \geq 1$, putem considera pentru n chiar această scriere. În sfârşit, dacă $n = 6k + 5$, $k \geq 1$, avem că $n = 2 + 3(2k + 1)$, cu $2k + 1 \geq 3$.

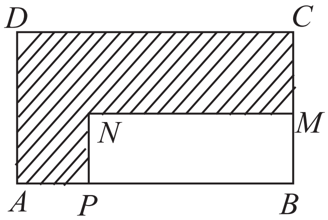
V.192. *Determinaţi valorile numărului natural a pentru care există numere naturale distincte x şi y astfel încât $3x + 7y = 10a$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Pentru $a \geq 7$ există $x = a-7$ şi $y = a+3$ astfel încât $3(a-7)+7(a+3) = 10a$. Cum $3 \cdot 10 + 7 \cdot 0 = 3 \cdot 10$, $3 \cdot 11 + 7 \cdot 1 = 4 \cdot 10$, $3 \cdot 12 + 7 \cdot 2 = 5 \cdot 10$ şi $3 \cdot 13 + 7 \cdot 3 = 6 \cdot 10$, valorile $a \in \{3, 4, 5, 6\}$ sunt, de asemenea, soluţii ale problemei. Se observă că numerele $a \in \{0, 1, 2\}$ nu convin. În concluzie, $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

Clasa a VI-a

VI.186. *O grădină are forma dreptunghiului $ABCD$ ($AB > CD$) şi este împărţită în două parcele: dreptunghiul $MNPB$ şi ,,colţul" haşurat. Se ştie că $AP = CM$, iar partea haşurată are aria de două ori mai mare şi perimetrul cu* 40 *mai mare decât aria, respectiv perimetrul dreptunghiului $MNPB$. Aflaţi lungimile segmentelor AB şi CD ştiind că se exprimă, în metri, prin numere naturale.*



Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Notăm $AP = CM = x$, $BP = a$ şi $BM = b$. Din $\mathcal{P}_{APNMCD} = \mathcal{P}_{MNPB} + 40$ obţinem că $x = 10(m)$ şi, de aici, rezultă că $a, b \in \mathbb{N}$. Din $\mathcal{A}_{ABCD} = 3 \cdot \mathcal{A}_{MNPB}$ deducem că $(a + 10)(b + 10) = 3ab$, de unde $(a - 5)(b - 5) = 75$. Cum $a > b$, putem avea $(a, b) \in \{(80, 6); (30, 8); (20, 10)\}$. În concluzie, $(AB, CD) \in \{(90, 16); (40, 18); (30, 20)\}$.

VI.187. *Determinaţi restul împărţirii numărului $N = 2015^4 \cdot 4^{2015}$ prin* 9.

Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie. Avem: $2015^4 = (M_9 - 1)^4 = M_9 + (-1)^4 = M_9 + 1$; $4^{2015} = (4^3)^{671} \cdot 4^2 = (M_9 + 1)^{671} \cdot 16 = (M_9 + 1) \cdot 16 = M_9 + 7$, deci $N = (M_9 + 1)(M_9 + 7) = M_9 + 7$.

VI.188. *Fie p un numar natural cu proprietatea că, oricare ar fi numerele $a, b \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$, produsul ab nu este divizibil cu p. Arătaţi că p este număr prim.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Evident, $p = 1$ nu verifică ipoteza problemei. Fie $p \geq 2$ ca în enunţ şi să presupunem că p nu ar fi număr prim. Atunci p va avea o pereche de divizori proprii (nu neapărat distincţi) de forma $\left(d, \frac{p}{d}\right)$, cu $d \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Ar rezulta că produsul $d \cdot \dfrac{p}{d} = p$ nu se divide cu p, contradicţie. Astfel, rămâne adevărată concluzia problemei.

VI.189. *Determinaţi numerele prime p şi q pentru care $p^2 + q = 201q^2 + p$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Dacă $p = 2$ avem $201q^2 - q - 2 = 0$ şi nu obţinem soluţii, iar dacă $q = 2$ avem $p^2 - p - 802 = 0$ şi, de asemenea, nu avem soluţii. Rezultă că p şi q sunt impare.

Relaţia dată se poate scrie sub forma $p^2 - q^2 - (p - q) = 200q^2$, deci $(p - q)(p + q - 1) = 200q^2$. Cum $p - q$ nu se divide cu q, atunci $p = kq + 1$ şi rezultă că $(p - q)(k + 1) = 200q$. Cu acelaşi argument, $k = tq - 1$ şi atunci $p = tq^2 - q + 1$ şi $(tq^2 - 2q + 1)t = 200$. Dacă t ar fi par, atunci $p = tq^2 - q + 1$ ar fi par, contradicţie. Rămâne că $t \in \{1, 5, 25\}$. Prin verificare directă, convine doar varianta $t = 5$, când $p = 43$ şi $q = 3$.

VI.190. *Considerăm a, b, c şi d cifre nenule în baza 10 (la litere diferite corespund cifre diferite) astfel încât numărul $N = \overline{abc}_{(d)} - \overline{cba}_{(d)}$ este multiplu de 63. Stabiliţi câte astfel de 4-uple (a, b, c, d) există.*

Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Se impun condiţiile $d > a$, $d > b$, $d > c$ (pentru că a, b, c sunt cifre în baza d) şi $a > c$ (pentru a putea fi efectuată scăderea). Avem: $N = (ad^2 + bd + c) - (cd^2 + bd + a) = d^2(a - c) - (a - c) = (a - c)(d - 1)(d + 1)$. Cum $N \vdots 7$, avem variantele:

(i) $a - c = 7$; atunci $(a, c) = (8, 1)$, deci $d = 9$ şi $N = 7 \cdot 8 \cdot 10$ nu se divide cu 63.

(ii) $d - 1 = 7$; atunci $d = 8$, deci $N = 63 \cdot (a - c) \vdots 63$. Perechea (a, c) poate fi aleasă în $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ moduri (pentru că $a, c \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ şi $a > c$) şi, în fiecare caz, valoarea lui b poate fi aleasă în câte 5 moduri. Rezultă $21 \cdot 5 = 105$ soluţii.

(iii) $d + 1 = 7$; atunci $d = 6$, deci $N = 35(a - c)$. Cum $a, c \leq 5$, nu este posibil ca $a - c$ să se dividă cu 9, deci nu avem soluţii în acest caz.

În conlcuzie, există 105 4-uple cu proprietăţile dorite.

VI.191. *Fie n un număr natural nenul. Determinaţi numărul soluţiilor întregi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ale ecuaţiei $x_1 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^n + 1 = 0$.*

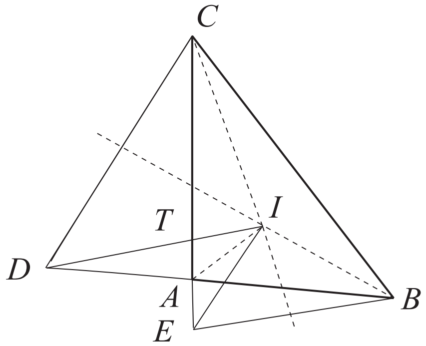
Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este soluţie a ecuaţiei din enunţ, atunci $a_i \in \{-1, 1\}$, $\forall i = \overline{1, n}$. Pentru $n = 2k$, egalitatea $a_1 \cdot a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_{2k}^{2k} + 1 = 0$ este echivalentă cu $a_1 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2k-1} + 1 = 0$. Putem elege $a_1, a_3, \ldots, a_{2k-3}$ în mod arbitrar, iar a_{2k-1} va fi bine determinat prin $a_{2k-1} = -a_1 a_3 \ldots a_{2k-3}$. Cum $a_2, a_4, \ldots, a_{2k}$ pot fi arbitrar alese din mulţimea $\{-1, 1\}$, rezultă că ecuaţia dată are $2^{2k-1} = 2^{n-1}$ soluţii. Dacă $n = 2k + 1$, procedând analog, găsim tot 2^{n-1} soluţii ale ecuaţii din enunţ.

VI.192. *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Notăm cu D simetricul lui C faţă de dreapta BI şi cu E simetricul lui B faţă de dreapta CI. Demonstraţi că $ID \| BE$ dacă şi numai dacă $IE \| CD$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie $m(\widehat{B}) = 2b$, $m(\widehat{C}) = 2c$. Din motive de simetrie, deducem uşor că punctul D aparţine dreptei AB, iar punctul E aparţine dreptei AC; notăm $\{T\} = AC \cap DI$. Deoarece $\triangle BCD$ este isoscel ($BC = BD$) şi BI, CI sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$, respectiv $\widehat{C}$, avem că $m(\widehat{BCD}) = 90° - b$, $m(\widehat{ICD}) = m(\widehat{IDC}) = 90° - b - c$, $m(\widehat{TCD}) = 90° - b - 2c$ şi, analog, $m(\widehat{BEC}) = 90° - c$. Cum $\widehat{ITC}$ este unghi exterior $\triangle TCD$, rezultă că $m(\widehat{ITC}) = m(\widehat{IDC}) + m(\widehat{TCD}) = 90° - b - c + 90° - b - 2c = 180° - 2b - 3c$. Astfel, avem $ID \| BE \Longleftrightarrow \widehat{ITC} \equiv \widehat{BEC} \Leftrightarrow 180° - 2b - 3c = 90° - c \Leftrightarrow b + c = 45°$. Analog se arată că $IE \| CD \Leftrightarrow b + c = 45°$, de unde concluzia problemei.



Clasa a VII-a

VII.186. *Dacă n este număr natural nenul, arătaţi că numerele $2\underbrace{00\ldots0}_{n}\underbrace{99\ldots9}_{n}$ şi $2\underbrace{00\ldots0}_{n+1}\underbrace{99\ldots9}_{n}$ sunt compuse.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

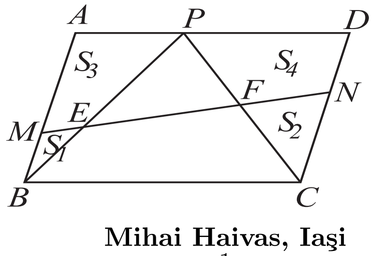
Soluţie. Avem: $2\underbrace{00\ldots0}_{n}\underbrace{99\ldots9}_{n} = 2 \cdot 10^{2n} + 10^n - 1 = (2 \cdot 10^n - 1)(10^n + 1)$ şi $2\underbrace{00\ldots0}_{n+1}\underbrace{99\ldots9}_{n} = 2 \cdot 10^{2n+1} + 10^n - 1 = 20 \cdot 10^{2n} + 10^n - 1 = (4 \cdot 10^n + 1)(5 \cdot 10^n - 1)$, ceea ce arată că numerele din enunţ sunt compuse.

VII.187. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 \geq 12abc$.*

Romeo Cernat, Iaşi

Soluţie. Este imediată inegalitatea $\dfrac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$. Scriem încă două inegalităţi similare şi, prin adunarea lor, obţinem o relaţie echivalentă cu cea din enunţ.

VII.188. *Pe laturile AB, CD şi AD ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, respectiv P şi fie $\{E\} = BP \cap MN$, $\{F\} = CP \cap MN$. Notăm cu S, S_1, S_2, S_3 şi S_4 ariile suprafeţelor $ABCD, BME, CNF, AMEP$, respectiv $DNFP$. Demonstraţi că $S \geq 4(\sqrt{S_1S_2} + \sqrt{S_3S_4})$.*



Mihai Haivas, Iaşi

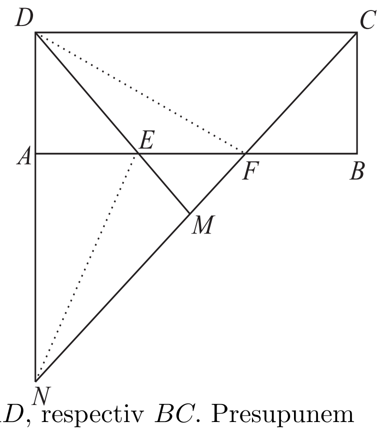
Soluţie. Cum $\mathcal{A}_{PBC} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$, înseamnă că $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \dfrac{1}{4}S$. Atunci $S = 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \geq 4(\sqrt{S_1S_2} + \sqrt{S_3S_4})$, conform inegalităţii mediilor $MA \geq MG$.

VII.189. *Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 3BC$ şi punctele $E, F \in (AB)$ astfel încât $AE = EF = FB$. Dacă $\{N\} = CF \cap AD$, arătaţi că $NE \perp DF$.*

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. Triunghiurile ADE şi BCF sunt dreptunghice isoscele, prin urmare

$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BCF}) = m(\widehat{DCN}) = 45°$. Rezultă că $m(\widehat{DNC}) = 180° - 90° - m(\widehat{DCN}) = 45°$, deci $m(\widehat{DMN}) = 180° - m(\widehat{ADE}) - m(\widehat{DNC}) = 90°$, unde $\{M\} = DE \cap CN$. Astfel, DM este înălţime în $\triangle NDF$ şi, cum FA este tot înălţime, punctul E va fi ortocentrul acestui triunghi. De aici rezultă că $NE \perp DF$.



VII.190. *Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB+CD = BC+AD$. Arătaţi că $AB \| CD$ dacă şi numai dacă cercurile de diametre BC, respectiv AD sunt tangente.*

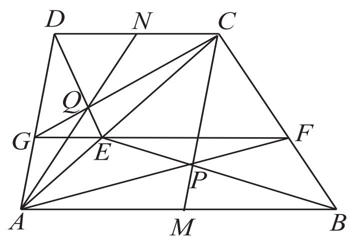
Ioan Săcăleanu, Hârlău, Iaşi

Soluţie. Notăm cu O_1 şi O_2 mijloacele laturilor AD, respectiv BC. Presupunem întâi că $AB \| CD$; cum O_1O_2 este linie mijlocie în trapezul/paralelogramul $ABCD$, rezultă că $O_1O_2 = \dfrac{AB+CD}{2} = \dfrac{AD+BC}{2} = r_1 + r_2$, deci cercurile de diametre AB şi BC sunt tangente. Reciproc, presupunem că cele două cercuri sunt tangente şi fie S mijlocul lui BD. Avem: $O_1O_2 = r_1 + r_2 = \dfrac{AD+BC}{2} = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{CD}{2} = O_1S + O_2S$, conform teoremei liniei mijlocii aplicată în triunghiurile ABD şi ABC. Deducem că $S \in O_1O_2$, de unde $O_1O_2 \| AB \| CD$.

VII.191. *Fie M mijlocul bazei mari AB a trapezului $ABCD$ şi E un punct pe diagonala AC. Notăm $\{P\} = CM \cap BE$, $\{F\} = AP \cap BC$, $\{G\} = FE \cap AD$, $\{Q\} = CG \cap DE$, $\{N\} = AQ \cap CD$. Arătaţi că N este mijlocul bazei mici CD.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie. Aplicând teorema lui Ceva în $\triangle ABC$, obţinem că $\dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{BF}{FC} = 1$, de unde $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{CF}{FB}$. Deducem că $EF \| AB$, deci $GE \| CD$, prin urmare $\dfrac{AG}{GD} = \dfrac{AE}{EC}$. Însă, din teorema lui Ceva aplicată în $\triangle ACD$, obţinem că $\dfrac{AG}{GD} \cdot \dfrac{DN}{NC} \cdot \dfrac{EC}{AE} = 1$. Rezultă că $\dfrac{DN}{NC} = 1$, adică N este mijlocul lui CD.



VII.192. *Un dreptunghi are perimetrul de $58m$. Este posibil să luăm zece puncte pe conturul dreptunghiului astfel încât distanţa dintre oricare două puncte consecutive să fie de $5m$?*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Răspunsul este afirmativ: fie $ABCD$ dreptunghiul şi $X_1, X_2, X_3 \in AB$, $X_4, X_5 \in BC$, $X_6, X_7, X_8 \in CD$, $X_9, X_{10} \in DA$ astfel încât $AX_1 = BX_4 = CX_6 = DX_9 = 3$m, $AX_{10} = BX_3 = CX_5 = DX_8 = 4$ m şi $X_1X_2 = X_2X_3 = X_4X_5 = X_6X_7 = X_7X_8 = X_9X_{10} = 5$m. Pentru această configuraţie, toate cerinţele din enunţ sunt îndeplinite.

Clasa a VIII-a

VIII.186. *Pe planul triunghiului ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$ se ridică perpendiculara AP. Notăm cu M şi N proiecţiile punctului A pe PB, respectiv PC. Demonstraţi că $\widehat{ABN} \equiv \widehat{ACM}$ dacă şi numai dacă $PB = PC$.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Cum $AC \perp AP$ şi $AC \perp AB$, rezultă că $AC \perp (PAB)$, deci $AC \perp PB$. Avem şi $AM \perp PB$, aşadar $PB \perp (CAM)$. Analog se arată că $PC \perp (BAN)$. Fie $\{H\} = BN \cap CM$; atunci $AH = (CAM) \cap (BAN)$ şi, din cele de mai sus, obţinem că $PB \perp AH$ şi $PC \perp OH$, adică $AH \perp (PBC)$.

În triunghiul PBC, CM şi BN sunt înălţimi. Se obţine uşor că $PB = PC$ dacă şi numai dacă $CM = BN$. Unghiurile $\widehat{ABN}$ şi $\widehat{ACM}$ sunt congruente dacă şi numai dacă $AB = AC$ (via triunghiurile dreptunghice HAB şi HAC), fapt care se petrece dacă şi numai dacă $BN = CM$ (via triunghiurile dreptunghice ABN şi ACM).

VIII.187. *Determinaţi numerele reale x, y şi z, ştiind că $x^4 + 27y = -3(y^3 + 27)$, $y^4 + 27z = -3(z^3 + 27)$ şi $z^4 + 27x = -3(x^3 + 27)$.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Adunând membru cu membru relaţiile din enunţ, obţinem că $\sum(x^4 + 3x^3 + 27x + 81) = 0$, adică $\sum(x+3)^2(x^2 - 3x + 9) = 0$. Cum $(x+3)^2 \geq 0$ şi $x^2 - 3x + 9 > 0$, rezultă că $x + 3 = y + 3 = z + 3 = 0$, aşadar $x = y = z = -3$.

VIII.188. *Dacă x şi y sunt numere reale pentru care au sens radicalii, arătaţi că $44\sqrt{x - 2y + 760} + 6\sqrt{1510 - 4x + 2y} + \sqrt{7x + 7y + 3500} \leq 2015$.*

Cristian Pătraşcu şi Andrei Spătaru, elevi, Craiova

Soluţia 1 (**Păucă Georgiana-Sânziana**, **Hălăucă Andrei**, elevi, Truşeşti (Botoşani))**.** Se aplică inegalitatea mediilor pentru fiecare termen al sumei din membrul stâng:

$44\sqrt{x - 2y + 760} \leq \dfrac{44^2 + (x - 2y + 760)}{2}$, $6\sqrt{1510 - 4x + 2y} \leq \dfrac{72 + (755 - 2x + y)}{2}$, $\sqrt{7x + 7y + 3500} \leq \dfrac{7 + (x + y + 500)}{2}$. Prin adunarea acestor inegalităţi, se obţine imediat inegalitatea cerută.

Soluţia 2 (a autorilor)**.** Notăm cu A numărul din membru stâng al inegalităţii din enunţ. Folosind inegalitatea C-B-S, avem: $A^2 \leq (44^2 + (6\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2)((x - 2y + 760) + (755 - 2x + y) + (x + y + 500)) = 2015 \cdot 2015$, de unde cerinţa problemei.

VIII.189. *Dacă x, y, z sunt numere reale, arătaţi că $(3x - 2y + z)^4 + (x + 3y - 2z)^4 + (2x - y - 3z)^4 \geq \dfrac{16}{27}(x + y + z)^4$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Cum $3(u^2 + v^2 + w^2) \geq (u + v + w)^2, \forall u, v, w \in \mathbb{R}$, avem că $3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \left(\dfrac{(a + b + c)^2}{3}\right)^2 = \dfrac{(a + b + c)^4}{9}$, deci $a^4 + b^4 + c^4 \geq \dfrac{(a + b + c)^4}{27}$. Luăm $a = 3x - 2y + z$, $b = x + 3y - 2z$ şi $c = -2x + y + 3z$ şi obţinem inegalitatea din enunţ. Avem egalitate când $a = b = c$, deci pentru $x = y = z$.

VIII.190. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [1, \infty)$, astfel* *încât* $\sqrt{x_1 - a_1^2} + \sqrt{x_2 - a_2^2} + \ldots + \sqrt{x_n - a_n^2} = \dfrac{x_1}{2|a_1|} + \dfrac{x_2}{2|a_2|} + \ldots + \dfrac{x_n}{2|a_n|}$. *Arătaţi că* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 2n$. *Când se atinge egalitatea?*

Cecilia Deaconescu, Piteşti

Soluţie. Observăm că $\sqrt{x_k - a_k^2} \leq \dfrac{x_k}{2|a_k|}$ (această inegalitate revine, după calcule, la $(x_k - 2a_k^2)^2 \geq 0$), cu egalitate dacă şi numai dacă $x_k = 2a_k^2$. Ţinând cont de egalitatea din enunţ, decucem că $x_1 = 2a_1^2$, $x_2 = 2a_2^2$, $\ldots, x_n = 2a_n^2$ şi atunci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \leq 2(1 + 1 + \ldots + 1) = 2n$. Avem egalitate dacă şi numai dacă $a_k \in \{-1, 1\}$ şi $x_k = 2$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

VIII.191. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia* $13x^2 + 14x + 1 = 9^x$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţia 1 (**Păucă Georgiana-Sânziana**, Truşeşti (Botoşani))**.** Evident, $x = 0$ este soluţie a ecuaţiei. Căutăm soluţiile $x \in \mathbb{N}^*$. Scriind ecuaţia în forma $(x+1)(13+1) = 9^x$ sau, încă, $(x+1)[12z + (x+1)] = 9^x$, deducem că $3|x+1$, adică $x = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind în ecuaţia precedentă, obţinem ecuaţia: $k(13k - 4) = 9^{3k-2}$. Cum $k = 1$ este o soluţie, rezultă că ecuaţia iniţială are soluţia $x = 2$. Arătăm acum că ecuaţia în k nu are soluţii $k \neq 1$. Într-adevăr, dacă ar exista un astfel de k, am avea $k|9^{3k-2}$ şi $13k - 4|9^{3k-2}$. De aici, ţinând seama şi de faptul că $13k - 4 \neq 1$, rezultă că $3|k$ şi $3|13k - 4$. Dar $13k - 4 = (12k - 3) + (k - 1)$, deci $3|k - 1$, în contradicţie cu $3|k$. În concluzie, ecuaţia dată are soluţiile 0 şi 2.

Soluţia 2 (a autorilor)**.** Se obervă că $x = 0$ este soluţie. Ecuaţia nu admite soluţii negative, deoarece membrul stâng ar fi număr întreg, în timp ce $9^x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_-^*$. Dacă $x \in \mathbb{N}$, ecuaţia se scrie sub forma $(x+1)(13x+1) = 3^{2x}$; rezultă că $x + 1 = 3^a$, $13x+1 = 3^b$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a+b = 2x$, $a < b$. Deducem că $12x = 3^b - 3^a = 3^a(3^{b-a} - 1)$ şi, cum $x = 3^a - 1 \not\vdots\, 3$, obţinem că $a = 1$, de unde $x = 2$. În concluzie, soluţiile ecuaţiei date sunt $x \in \{0, 2\}$.

Soluţia 3 (**Hălăucă Andrei**, elev, Truşeşti (Botoşani))**.** Se constată direct că $x = 0$ şi $x = 2$ sunt soluţii ale ecuaţiei. Acestea sunt singurele soluţii, căci parabola $f(x) = 13x^2 + 14x + 1$ şi exponenţiala $g(x) = 9^x$, $x \in \mathbb{R}$, nu pot avea mai mult de două puncte de intersecţie.

VIII.192. *Dacă n este număr natural nenul, arătaţi că* $A = 2^{n-1}(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)$ *nu poate fi cub perfect.*

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

Soluţia 1 (**Hălăucă Andrei**, elev, Truşeşti (Botoşani))**.** Vom arăta că $(2^n - 1)^3 < A < (2^n)^3$, de unde va rezulta afirmaţia cerută. Într-adevăr, avem $A < 2^{n-1} \cdot 2^n \cdot 2^{n+1} = 2^{3n} = (2^n)^3$, iar faptul că $A > (2^n - 1)^3$, adică $2^{n-1}(2^n - 1)(2^{n+1} - 1) > (2^n - 1)^3$, se verifică prin calcul direct.

Soluţia 2 (a autorilor)**.** Pentru $n = 1$, obţinem $A = 3$, care nu este cub perfect. Fie $n \geq 2$ şi presupunem, prin absurd, că A este cub perfect; cum 2^{n-1} este par şi 2^{n-1}, $2^{n+1} - 1$ sunt impare, rezultă că $n = 3k + 1$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Se observă că $2^n - 1$ şi $2^{n+1} - 1$ sunt prime între ele, deci vom avea $2^n - 1 = m^3$ şi $2^{n+1} - 1 = p^3$. Atunci $m^3 + 1 = 2^n$, deci $(m+1)(m^2 - m + 1) = 2^n$; însă $m^2 - m + 1$ este număr impar şi se impune ca $m^2 - m + 1 = 1$, de unde $m = 1$, adică $n = 1$, contradicţie.

Clasa a IX-a

IX.156. *Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, se consideră ecuaţia $x^2 + ax + b = 0$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{a}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{ax + 2b}{2x + a}$. Ştiind că ecuaţia are soluţiile reale distincte x_1 şi x_2, arătaţi că, pentru orice $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{a}{2}, x_1, x_2\right\}$, între t şi $f(t)$ se află exact una dintre soluţiile ecuaţiei.*

Mihai Dicu, Craiova

Soluţie. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + ax + b$. Prin calcul, se arată că $g(f(t)) = -\frac{\Delta \cdot g(t)}{(2t + a)^2}$; cum $\Delta > 0$, rezultă că $g(t)$ şi $g(f(t))$ au semne contrare şi, de aici, concluzia problemei.

IX.157. *Fie a, b şi c numere reale astfel încât $a + b + c = abc$. Demonstraţi că $\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}} \geq 2\sqrt{3}$.*

Andrei Nicolaescu şi Cristian Pătraşcu, elevi, Craiova

Soluţia 1 (a autorilor). Cum $a + b + c = abc$, există un triunghi ABC astfel încât $a = \operatorname{tg} A$, $b = \operatorname{tg} B$ şi $C = \operatorname{tg} C$. Inegalitatea din enunţ revine la $\sum \frac{1}{\sin A} \geq 2\sqrt{3}$. Folosind inegalitatea lui Bergström şi binecunoscuta $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, obţinem că $\sum \frac{1}{\sin A} \geq \frac{(1 + 1 + 1)^2}{\sum \sin A} \geq \frac{9 \cdot 2}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ şi, astfel, soluţia este completă.

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**). Observăm că $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(ab + bc + ca)}{abc} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + 2 = 3$. Folosind definiţia modulului unui număr complex şi inegalitatea triunghiului, avem:

$$\sum \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = \sum \left|1 + \frac{1}{a} i\right| \geq \left|3 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) i\right| =$$
$$= \sqrt{9 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \geq \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}.$$

IX.158. *Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) \geq 60^\circ$. Arătaţi că $\frac{2\sqrt{3}}{3} a \geq \max\{b, c\}$.*

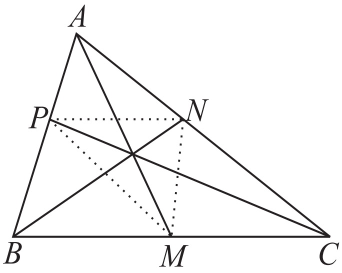
Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Cum $m(\widehat{A}) \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$, avem $\cos A \in \left(-1, \frac{1}{2}\right]$, deci $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leq \frac{1}{2}$, aşadar $b^2 + c^2 - bc \leq a^2$. Dar $b^2 + c^2 - bc = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2$, prin urmare $a^2 \geq \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2$, adică $\frac{2\sqrt{3}}{3} a \geq c$. Analog se arată că $\frac{2\sqrt{3}}{3} a \geq b$.

IX.159. *Pe laturile AB, BC şi CA ale triunghiului ABC se consideră punctele P, M, respectiv N astfel încât $3AP = 2BP$, iar cevienele AM, BN şi CP să fie* *concurente. Dacă raportul ariilor triunghiurilor MNP şi ABC este $\frac{6}{25}$, arătaţi că una dintre cevienele AM şi BN este mediană.*

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

Soluţie. Dacă $\frac{BM}{MC} = k$, din teorema lui Ceva obţinem că $\frac{CN}{NA} = \frac{3}{2k}$.



Avem: $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{APN}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AN}{NC} - \frac{BP}{BA} \cdot \frac{BM}{BC} - \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CN}{CA} = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{2k}{2k+3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{k}{k+1} - \frac{3}{2k+3} \cdot \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{10k^2 + 13k + 15}{2k^2 + 5k + 3}$. Egalând $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$ cu $\frac{6}{25}$ şi efectuând calculele, obţinem ecuaţia $2k^2 - 5k + 3 = 0$, cu soluţiile $k_1 = 1$ şi $k_2 = \frac{3}{2}$. În primul caz, $BM = MC$, în cel de-al doilea, $CN = NA$.

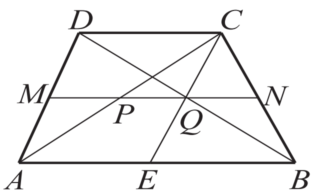
IX.160. *Fie AB baza mare a trapezului $ABCD$, iar M, N, P şi Q mijloacele segmentelor AD, BC, AC, respectiv BD.*

a) *Demonstraţi că $ABCD$ este patrulater circumscriptibil dacă şi numai dacă $\frac{PQ}{MN} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A + \sin B}$.*

b) *Arătaţi că $ABCD$ este trapez isoscel circumscriptibil dacă şi numai dacă $\frac{PQ}{MN} = \cos A$.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. a) Ducem $CE \| AD$, cu $E \in AB$; din $\triangle BCE$, folosind teorema sinusurilor, obţinem că $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CE}{sinB} = \frac{BE}{\sin \widehat{BCE}}$.



Însă $CE = AD$, $BE = AB - CD$ şi $\sin \widehat{BCE} = \sin(\pi - (\widehat{A} + \widehat{B})) = \sin(\widehat{A} + \widehat{B})$, deci $BC = (AB - CD) \cdot \frac{\sin A}{\sin(A+B)}$ şi $AD = (AB - CD) \cdot \frac{\sin B}{\sin(A+B)}$. Astfel, $ABCD$ este circumscriptibil $\Leftrightarrow AB + CD = BC + AD \Leftrightarrow AB + CD = (AB - CD) \cdot \frac{\sin A + \sin B}{\sin(A+B)} \Leftrightarrow 2MN = 2PQ \cdot \frac{\sin A + \sin B}{\sin(A+B)} \Leftrightarrow \frac{PQ}{MN} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin(A+B)}$.

b) Avem $\frac{\sin(A+B)}{\sin A + \sin B} = \cos A \Leftrightarrow \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin A \cos A + \sin B \cos A \Leftrightarrow \sin A(\cos B - \cos A) = 0 \Leftrightarrow \cos A = \cos B \Leftrightarrow A = B$, de unde cerinţa problemei.

Clasa a X-a

X.156. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuatia* $\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x} + \frac{\sqrt{x - \sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Din condiţiile de existenţă pentru radicali găsim că $x \in [1,\infty)$. Notăm $\sqrt{x}=t$, deci $x=t^2$, $t\in[1,\infty)$; ecuaţia devine $\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t^2-t}=t\sqrt{t^2+t}$, sau $\sqrt{t^2+t}(t-1)=\sqrt{t^2-t}$, adică $t(t+1)(t-1)^2=t(t-1)$. Obţinem că $t\in\{1,\sqrt{2}\}$, de unde $x\in\{1,2\}$.

X.157. *Fie $a,b\in(0,1)\cup(1,\infty)$, cu $ab\neq 1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $a^x\log_{ab}a+b^x\log_{ab}b=a^xb^x$.*

Mihai Dicu, Craiova

Soluţie. Împărţind în ambii membri prin a^xb^x, ecuaţia se scrie sub forma $f(x)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=\left(\frac{1}{b}\right)^x\log_{ab}a+\left(\frac{1}{a}\right)^x\log_{ab}b$. Considerând cazurile: (i) $a>1$, $b>1$; (ii) $a<1, b<1$; (iii) $a<1<b$ (sau $b<1<a$) şi $ab<1$; (iv) $a<1<b$ (sau $b<1<a$) şi $ab>1$, se arată că f este, de fiecare dată, funcţie strict monotonă, deci injectivă. Astfel, ecuaţia $f(x)=1$ are cel mult o soluţie. Cum $f(0)=1$, rezultă că $x=0$ este unica soluţie a ecuaţiei.

X.158. *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $z^3+az+b=0$ să aibă trei soluţii complexe distincte şi cu acelaşi modul. Arătaţi că aceste soluţii sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţia 1 (**Hălăucă Andrei**, elev, Truşeşti (Botoşani))**.** Fie punctele $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$. Ele sunt trei puncte distincte pe cercul $\mathcal{C}(O,R)$, unde $R=|z_1|=|z_2|=|z_3|$. Centrul de greutate al triunghiului ABC are afixul $z_0=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)=0$, conform uneia dintre relaţiile Viète relativ la ecuaţia $z^3+az+b=0$. Aşadar, pentru triunghiul ABC originea este atât centrul cercului circumscris cât şi centrul său de greutate, deci el este echilateral.

Soluţia 2 (a autorilor)**.** Dacă z_1,z_2 şi z_3 sunt soluţiile ecuaţiei din enunţ, atunci $z_1+z_2+z_3=0$, $z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=a$ şi $z_1z_2z_3=-b$. Dacă $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r$, atunci: $\overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3=0\Rightarrow\frac{r^2}{z_1}+\frac{r^2}{z_2}+\frac{r^2}{z_3}=0\Rightarrow\frac{r^2(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)}{z_1z_2z_3}=0\Rightarrow a=0\Rightarrow z_1,z_2,z_3$ sunt rădăcinile cubice complexe ale lui $-b$. Astfel, este adevărată cerinţa problemei.

X.159. *Dacă a,b,c,d şi e sunt numere reale pozitive, arătaţi că $\sum\frac{a^5}{bcde}\geq\sum a$.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţia 1. Din inegalitatea mediilor, obţinem că $\frac{a^5}{bcde}+b+c+d+e\geq 5\sqrt[5]{\frac{a^5}{bcde}\cdot bcde}=5a$ şi încă patru relaţii similare. Adunând membru cu membru, rezultă că $\sum\frac{a^5}{bcde}+4\sum a\geq 5\sum a$, de unde inegalitatea dorită.

Soluţia 2. Funcţia putere este convexă; din inegalitatea lui Jensen, $\frac{\sum a^6}{5}\geq\left(\frac{\sum a}{5}\right)^6$. Atunci $\sum\frac{a^5}{bcde}=\frac{\sum a^6}{abcde}\geq\frac{5\left(\frac{\sum a}{5}\right)^6}{abcde}=\frac{(\sum a)(\frac{\sum a}{5})^5}{abcde}\geq(\sum a)\cdot\frac{(\sqrt[5]{abcde})^5}{abcde}=\sum a$.

X.160. *Demonstraţi că, în orice triunghi ascuţitunghic, este adevărată inegalitatea* $\cos^4\dfrac{A}{2}+\cos^4\dfrac{B}{2}+\cos^4\dfrac{C}{2}\geq\dfrac{23}{16}+\dfrac{r}{2R}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţie. Avem: $\cos^4\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{8}(\cos 2A+4\cos A+3)$ şi încă două relaţii similare. Atunci $\sum\cos^4\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{8}\left(\sum\cos 2A+4\sum\cos A+9\right)=\dfrac{1}{8}\Big[(-1-4\cos A\cos B\cos C)+4\left(1+\dfrac{r}{R}\right)+9\Big]=\dfrac{1}{8}(12-4\cos A\cos B\cos C+\dfrac{4r}{R})\geq\dfrac{1}{8}\left(12-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4r}{R}\right)=\dfrac{23}{16}+\dfrac{r}{2R}$.

Clasa a XI-a

XI.156. *Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Spunem că matricele $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sunt legate dacă $AB+BA=O_n$.*

a) *Arătaţi că există două matrice legate care nu comută.*

b) *Dacă A şi B sunt legate, demonstraţi că det$(A^2+B^2)\geq 0$.*

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. a) De exemplu, luăm

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0&0\\0&0&\ldots&0&0\\\ldots&&&&\\0&0&\ldots&0&0\\0&0&\ldots&0&-1\end{pmatrix}\quad\text{şi}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0&1\\0&0&\ldots&0&0\\\ldots&&&&\\0&0&\ldots&0&0\\1&0&\ldots&0&0\end{pmatrix}.$$

b) Dacă $AB+BA=O_n$, atunci $(A+B)^2=A^2+B^2$, prin urmare $\det(A^2+B^2)=[\det(A+B)]^2\geq 0$.

XI.157. *Fie $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\leq\beta$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$ şi $x_{n+2}+x_n\geq 2x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Dacă şirul dat este convergent, arătaţi că $\alpha=\beta$.*

Răzvan Drînceanu şi Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. Din $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+2}+x_k)\geq 2\sum\limits_{k=1}^{n}x_{k+1}$ obţinem că $x_{n+2}+x_1\geq x_{n+1}+x_2$, deci $x_{n+2}-x_{n+1}\geq\beta-\alpha$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+2}-x_{n+1})\geq\beta-\alpha$, de unde $0\geq\beta-\alpha$. Însă $\beta-\alpha\geq 0$, prin urmare $\alpha=\beta$.

XI.158. *Dacă $x,y\in\mathbb{R},x\geq 1$, arătaţi că $x^{\sin^2 y}+x^{\cos^2 y}\leq x+1$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Pentru $a\in[0,1]$, definim $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^a+x^{1-a}-x-1$. Cum $f'(x)=ax^{a-1}+(1-a)x^{-a}-1$ şi $f''(x)=a(a-1)(x^{a-2}+x^{-a-1})\leq 0,\forall x\geq 1$, deducem că f' este descrescătoare, deci $f'(x)\leq f'(1)=0$. Atunci f este descrescătoare, prin urmare $f(x)\leq f(1)=0$. În concluzie, $x^a+x^{1-a}\leq x+1$, $\forall x\in[1,\infty)$, $\forall a\in[0,1]$, cu egalitate pentru $x=1$ sau $a\in\{0,1\}$. Luând $a=\sin^2 y$, obţinem cerinţa problemei.

XI.159. *Fie $a\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă în 0, cu $f(0)=0$ şi astfel încât $af(ax)+f(x)=f(a^2x)+af(a^{-1}x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Arătaţi că $f(a^kx)=a^k\cdot f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.*

Sven Cortel, Manchester, UK

Soluţie. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(ax) - f(a^{-1}x)$; relaţia din enunţ se scrie sub forma $ag(x) = g(ax)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin inducţie, se arată că $a^k \cdot g(x) = g(a^k x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

I. Dacă $a = 1$, concluzia este evidentă.

II. Dacă $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, arătăm întâi, prin inducţie, că $f(a^{2n}x) - f(x) = g(a^{2n-1}x) + g(a^{2n-3}x) + \ldots + g(ax)$. Atunci $f(a^{2n}x) - f(x) = ag(x) \cdot (1 + a^2 + \ldots + a^{2n-2}) = ag(x) \cdot \dfrac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1}$. Trecem la limită după n şi obţinem că $f(x) = \dfrac{a}{a^2 - 1} g(x) = \dfrac{1}{a^2 - 1} g(ax) = \dfrac{1}{a^2 - 1}(f(a^2x) - f(x))$, deci $a^2 f(x) = f(a^2 x)$. Trecem $x \mapsto a^{-1}x$ şi deducem că $af(a^{-1}x) = a^{-1}f(ax)$, prin urmare $af(x) + f(x) = a^2 f(x) + a^{-1} f(ax)$, de unde $(1 - a^2)f(x) = a^{-1}(1 - a^2)f(ax)$, prin urmare $af(x) = f(ax)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se arată acum uşor, prin inducţie, că are loc cerinţa problemei.

III. Dacă $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, notăm $b = a^{-1} \in (-1, 1)$ şi demonstrăm prin inducţie, că $f(x) - f(u^{2n}x) = g(u^{2n-1}x) + g(u^{2n-3}x) + \ldots + g(ux)$ şi soluţia continuă ca în cazul II.

XI.160. *Fie $(x_n), (y_n)$ şi (z_n) şiruri de numere întregi definite prin relaţiile $x_{n+1} = y_n + z_n$, $y_{n+1} = x_n + z_n$ şi $z_{n+1} = x_n + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde x_1, y_1, z_1 sunt numere întregi date. Demonstraţi că există $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{Z}$ (care se pot alege într-o infinitate de moduri esenţial distincte) pentru care*

$$ax_n^2 + by_n^2 + cz_n^2 + dx_n y_n + ex_n z_n + fy_n z_n = g, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Considerăm şirul (g_n) de termen general $g_n = ax_n^2 + by_n^2 + cz_n^2 + dx_n y_n + ex_n z_n + fy_n z_n$. Impunem condiţia $g_{n+1} = g_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; folosind relaţiile de recurenţă obţinem, identificând coeficienţii lui $x_n^2, y_n^2, \ldots, y_n z_n$, sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} &b + c + f = a, \ a + c + e = b, \ a + b + d = c, \\ &2a + d + e = 0, \ 2b + d + f = 0, \ 2c + e + f = 0. \end{aligned}$$

Cum acest sistem admite soluţia $(a, b, c, -a - b + c, -a + b - c, a - b - c)$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, concluzia rezultă; desigur, odată ce am fixat a, b, c, d, e, f, trebuie ales $g_1 = ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dx_1 y_1 + ex_1 z_1 + fy_1 z_1$.

Clasa a XII-a

XII.156. *Determinaţi funcţiile derivabile $y = y(x)$, $x \in (0, \infty)$, cu proprietatea că $x(x + 1) \cdot y'(x) + y(x) = e^x (x + 1)^2$.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Observând că $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, ecuaţia se scrie sub forma $\left(\dfrac{x}{x+1} y\right)' = e^x$. Rezultă că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x}{x+1} y = e^x + c$, prin urmare funcţile căutate sunt cele de forma $y_c(x) = \dfrac{(x+1)(e^x + c)}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

XII.157. *Calculaţi* $I = \int \frac{x^2+4x+10}{(x+2)^4}\cos x\,dx$*, unde* $x \in (-2,\infty)$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Avem:
$\int \frac{(x+2)^2+6}{(x+2)^4}\cos x\,dx = \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx + 6\int \left(\frac{(x+2)^{-3}}{-3}\right)'\cos x\,dx = \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx - \frac{2\cos x}{(x+2)^3} - 2\int (x+2)^{-3}\sin x\,dx = \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx - \frac{2\cos x}{(x+2)^3} - 2\int \left(\frac{(x+2)^{-2}}{-2}\right)'\sin x\,dx = \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx - \frac{2\cos x}{(x+2)^3} + \frac{\sin x}{(x+2)^2} - \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx = \frac{\sin x}{(x+2)^2} - \frac{2\cos x}{(x+2)^3} + \mathcal{C}$.

XII.158. *Considerăm* $a_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^{2n}x}{1+\sin^{2n}x}\cdot \operatorname{ctg} x\,dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Determinaţi limita şirului* $(a_n)_{n\geq 1}$.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Stelian Piscan, Giurgiu

Soluţie. Cu substituţia $\sin x = t$, obţinem că
$a_n = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-t^{2n}}{1+t^{2n}}\cdot\frac{dt}{t} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t^{2n-1}(1-t^{2n})}{t^{2n}(1+t^{2n})}dt = (t^{2n}=y) = \frac{1}{2n}\int_{\frac{1}{2^{2n}}}^{1}\frac{1-y}{y(1+y)}dy = \frac{1}{2n}(\ln y - 2\ln(1+y))\Big|_{\frac{1}{2^{2n}}}^{1} = \frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)+n\ln 2-\ln 2\right)$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

XII.159. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă astfel încât* $\int_0^1 f(x)dx = 0$. *Demonstraţi că* $2\cdot\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 (1-x^2)f^2(x)dx$.

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Folosind formula de integrare prin părţi,
$\int_0^1\left(\int_x^1 f(t)dt\right)dx = \int_0^1 x'\left(\int_x^1 f(t)dt\right)dx = \int_0^1 xf(x)dx$. Utilizând C-B-S (forma integrală), obţinem că $\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 = \left(-\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx\right)^2 \leq \int_0^1 1^2dx\cdot \int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2dx \leq \int_0^1\left(\int_0^x 1^2dt\cdot\int_0^x f^2(t)dt\right)dx = \int_0^1 x\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 x^2f(x)dx\right)$, de unde concluzie problemei.

XII.160. *Fie* $P_k \in \mathbb{R}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$, *cu proprietatea că* $P_k(n) = S_k(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *unde* $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. *Demonstraţi că* P_k *este polinom de grad* $k+1$, *care se divide cu* $X(X+1)$.

Ovidiu Pop, Satu-Mare

Soluţie. Avem că $(x+1)^{k+1} - x^{k+1} = C_{k+1}^1 x^k + C_{k+1}^2 x^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k x + C_{k+1}^{k+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Dând lui x valorile $1, 2, \ldots, n$ şi sumând egalităţile obţinute, deducem că

$$(n+1)^{k+1} - (n+1) = C_{k+1}^1 S_k(n) + C_{k+1}^2 S_{k-1}(n) + \ldots + C_{k+1}^k S_1(n),$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $S_k(n) = P_k(n)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ şi relaţia precedentă are loc pentru o infinitate de valori ale lui n, rezultă că

$$(X+1)^{k+1} - (X+1) = C_{k+1}^1 P_k + C_{k+1}^2 P_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k P_1, \ \ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci $P_k = \dfrac{1}{k+1}[(X+1)^{k+1} - (X+1) - (C_{k+1}^2 P_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k P_1)]$ şi, evident, $P_1 = \dfrac{1}{2}X(X+1)$. Din acest moment, cerinţele problemei se demonstrează prin inducţie matematică.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2015

A. Nivel gimnazial

G276. *Determinaţi valoarea maximă a numărului real* α *pentru care* $\dfrac{x^3}{a} + \dfrac{y^3}{b} \geq \dfrac{\alpha xy(x+y)}{a+b}$, *oricare ar fi numerele reale pozitive* x, y, a *şi* b.

Alexandru Blaga, Satu Mare

Soluţie. În soluţia problemei **IX.152** (a se vedea *RecMat 1/2015*, p.63) s-a arătat că $\dfrac{x^3}{a} + \dfrac{y^3}{b} \geq \dfrac{2xy(x+y)}{a+b}$, $\forall x, y, z, b \in (0, \infty)$, deci $\alpha_{\max} \geq 2$. Pe de altă parte, pentru $a = b$ şi $x = y$, obţinem că $\dfrac{2x^3}{a} \geq \dfrac{2\alpha x^3}{2a}$, $\forall x, a \in (0, \infty)$, prin urmare $\alpha \leq 2$. În concluzie, valoarea maximă cerută a lui α este 2.

G277. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ *(unde* $n \in \mathbb{N}^*$*) numere reale pozitive cu* $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} x_i = 2n+1$. *Arătaţi că* $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \dfrac{x_i}{nx_i^2 + n + 1} \leq 1$.

Lucian Tuţescu şi Teodora Rădulescu, Craiova

Soluţie. Din inegalitatea mediilor, $nx_1 + n + 1 \geq (2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{(x_1^2)^n \cdot 1^{n+1}}$. Atunci $\dfrac{x_1}{nx_1^2 + n + 1} \leq \dfrac{x_1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x_1^{2n}}} = \dfrac{1}{2n+1}\sqrt[2n+1]{x_1} \leq \dfrac{1}{2n+1} \cdot \dfrac{x_1 + 1 + \ldots + 1}{2n+1} = \dfrac{x_1 + 2n}{(2n+1)^2}$. Scriem încă $2n$ inegalităţi similare şi, prin sumarea lor, obţinem că $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \dfrac{x_i}{nx_i^2 + n + 1} \leq \dfrac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{2n+1}(x_i + 2n) = 1$. Se obţine egalitate pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1} = 1$.

G278. *Demonstraţi că nu există numere naturale nenule* n *pentru care numărul* $a_n = 5^n + 5^{n+1} + \ldots + 5^{2n-1}$ *să fie pătrat perfect.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că a_n ar fi pătrat perfect pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_n = 5^n(1 + 5 + \ldots + 5^{n-1})$ şi numerele 5^n şi $b = 1 + 5 + \ldots + 5^{n-1}$

sunt prime între ele, rezultă că $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, iar $b = c^2$, $c \in \mathbb{N}^*$. Dar $b = \frac{5^n - 1}{4} = \frac{5^k - 1}{2} \cdot \frac{5^k + 1}{2}$ şi, deoarece $\frac{5^k - 1}{2}$ şi $\frac{5^k + 1}{2}$ sunt numere naturale consecutive, deci relativ prime, obţinem că $5^k - 1 = 2x^2$ şi $5^k + 1 = 2y^2$. De aici, $y^2 - x^2 = 1$, aşadar $y = 1$, $x = 0$, contradicţie. Concluzia se impune.

G279. *Determinaţi cel mai mare număr natural n cu proprietatea că există numere naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 5(n-1)$ şi $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 2$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Cum $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$, rezultă că $10(n-1) \geq n^2$, de unde $(n-5)^2 \leq 15$. Deducem că $n \leq 8$ şi valoarea maximă căutată a lui n este chiar 8, deoarece putem considera $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = 4$, $a_4 = \ldots = a_8 = 5$.

G280. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n cu proprietatea că $n!$ se divide cu $n^3 + n^2 - 36$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Vom arăta că toate numerele de forma $n = m^2 - 1$, $m \geq 6$, m divizibil cu 3, au proprietatea dorită. Într-adevăr, observăm că $n^3 + n^2 = n^2(n+1) = (nm)^2 = (m^3 - m)^2$, deci $n^3 + n^2 - 36 = (m^3 - m - 6)(m^3 - m + 6) = (m-2)(m+2)(m^2 - 2m + 3)(m^2 + 2m + 3)$. În plus, $3 < m - 2 < m + 2 < \frac{m^2 + 2m + 3}{3} < m^2 - 2m + 3 < m^2 - 1$, oricare ar fi $m \geq 6$, m divizibil cu 3, prin urmare $n!$ se divide cu $n^3 + n^2 - 36$ pentru o infinitate de valori ale lui n.

G281. *Dreptunghiul $A_1A_2A_3A_4$ are lungimea $A_1A_2 = L$ şi lăţimea $A_2A_3 = l$, unde $L, l \in \mathbb{N}^*, L > l$ şi L nu se divide cu l. Se construiesc dreptunghiurile $A_3A_4A_5A_6, A_5A_6A_7A_8, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}$, având aceleaşi dimensiuni cu dreptunghiul iniţial, unde $nl > L$. Notăm cu N_1 şi P_1 numărul, respectiv suma perimetrelor dreptunghiurilor de lungime L din figura obţinută şi cu N_2 şi P_2 numărul, respectiv suma perimetrelor dreptunghiurilor de lăţime L.*

a) *Există $n \geq 4$ pentru care $N_1 = N_2$?*

b) *Demonstraţi că $P_1 + P_2 < \frac{n(n+1)(n+5)}{6}(L + l)$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. a) Notăm $x = \left[\frac{L}{l}\right]$. În figură apar n dreptunghiuri $L \times l$, $n-1$ dreptunghiuri $L \times 2l, \ldots, 1$ dreptunghi $L \times nl$, deci un total de $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dreptunghiuri; rezultă că $N_1 + N_2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Numărul dreptunghiurilor de lungime L va fi $N_1 = n + (n-1) + \ldots + (n - x + 1) = \frac{x(2n - x + 1)}{2}$. Avem $N_1 = N_2$ dacă şi numai dacă $\frac{x(2n - x + 1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$, deci când $2x^2 - 2(2n+1)x + n^2 + n = 0$.

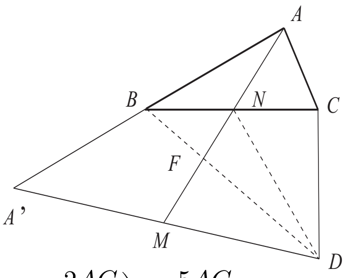
Această ecuaţie are discriminantul $\Delta = 4(2n^2 + 2n + 1)$ şi Δ este pătrat perfect pentru, de exemplu, $n = 20$ (se arată că $n = 20$ este minim astfel încât Δ sa fie pătrat perfect); pentru acest n, ecuaţia admite soluţia convenabilă $x = 6$ şi $N_1 = N_2 = 105$.

b) Avem: $P_1 = \sum\limits_{i=1}^{x}(n-i+1)(2L+2li)$, $P_2 = \sum\limits_{i=x+1}^{n}(n-i+1)(2L+2Li)$, deci $P_1 + P_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(n-i+1)(2L+2li) = \dfrac{n(n+1)}{3}(3L+2l+nl)$. Pentru a demonstra cerinţa problemei, ar fi destul să arătăm că $3L+2l+nl < \dfrac{n+5}{2}(L+l)$; după calcule, această inegalitate revine la $(n-1)(L-l) > 0$, adevărat.

G282. *Triunghiul ABC are $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ şi $m(\widehat{B}) = 30^\circ$. Simetricul lui A faţă de B este A', punctul D este astfel încât $CD \perp BC$, $CD = AB$, iar A şi D sunt separate de BC, N este mijlocul lui BC şi $\{M\} = AN \cap A'D$. Demonstraţi că $2AM = 5AC$.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

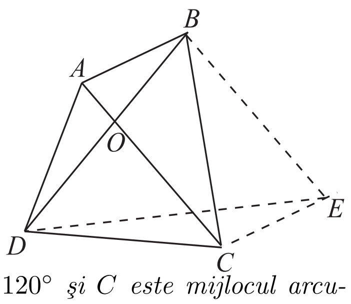
Soluţie. Cum $AC = CN$, $AB = CD$, rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle CDN$ (C.C.), prin urmare $m(\widehat{CND}) = 60^\circ = m(\widehat{CNA})$. Deducem că $m(\widehat{DNM}) = 60^\circ$ şi $m(\widehat{BNM}) = m(\widehat{ANC}) = 60^\circ$, aşadar NF este bisectoarea unghiului $\widehat{BND}$. Din teorema bisectoarei, $\dfrac{BF}{FD} = \dfrac{BN}{ND} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{2}$; în plus, $NF = \dfrac{2 \cdot NB \cdot ND}{NB + ND} \cdot \cos\dfrac{120^\circ}{2} = \dfrac{2 \cdot AC \cdot 2AC}{AC + 2AC} \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{4AC}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2AC}{3}$. Punctul F este centrul de greutate al triunghiului $AA'D$, deoarece se află pe mediana BD şi $DF = 2BF$; atunci $AF = 2FM$, prin urmare $AM = \dfrac{3}{2}(AN + NF) = \dfrac{3}{2}\left(AC + \dfrac{2AC}{3}\right) = \dfrac{5AC}{2}$, de unde conlcuzia problemei.



G283. *În patrulaterul convex $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, se ştie că $m(\widehat{COD}) = 60^\circ$, $m(\widehat{DAB}) = 110^\circ$ şi $AB + CD = AC = BD$. Determinaţi măsurile unghiurilor patrulaterului.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Construim paralelogramul $ABEC$; atunci $BE = AC = BD$, iar $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DOC}) = 60^\circ$, prin urmare $\triangle BDE$ este echilateral. Deducem că $DE = BD = DC + AB = DC + CE$, de unde rezultă că punctele C, D, E sunt coliniare. Apoi, $m(\widehat{OCD}) = m(\widehat{BED}) = 60^\circ$, deci $\triangle COD$ este echilateral, aşadar $OC = CD$. Se arată acum uşor că $ABCD$ este trapez isoscel, cu măsurile unghiurilor de 110°, $110^\circ, 70^\circ$ şi 70°.

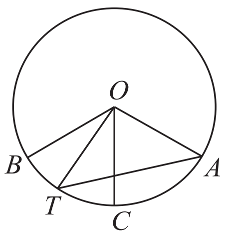


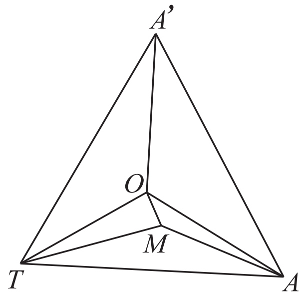
G284. *Pe circumferinţa unui cerc de centru O considerăm punctele A, B, C astfel încât $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$ şi C este mijlocul arcului mic $\widehat{AB}$. Pentru un punct T situat pe arcul $\widehat{BC}$ care nu conţine punctul A, fie M un punct în interiorul triunghiului TOA cu proprietatea că $m(\widehat{MAT}) = 30^\circ$ şi*

$\widehat{OTM} = 2 \cdot \widehat{OAM}$. *Să se determine locul geometric al punctului* M*, ştiind că punctul* T *este variabil pe arcul* $\overset{\frown}{BC}$.

Vasile Pravăţ şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece $\measuredangle AOB = 120°$ şi $\measuredangle AOC = 60°$, avem $60° < \measuredangle AOT < 120°$ ceea ce implică faptul că $\measuredangle OAT = \measuredangle OTA \in (30°, 60°)$. Fie $\measuredangle OAT = \alpha$. Construim triunghiul echilateral $AA'T$. Triunghiurile OAT şi $A'AT$ sunt isoscele, deci OA' este mediatoarea segmentului AT, adică şi bisectoarea $\measuredangle AA'T$.





Avem: $\measuredangle MAT = 30° = \measuredangle OA'T$; $AT = A'T$; $\measuredangle MTA = \measuredangle OTA - \measuredangle OTM = \alpha - 2 \cdot \measuredangle OAM = \alpha - 2(\alpha - 30°) = 60° - \alpha = \measuredangle A'TO$ şi rezultă că $\triangle MAT \equiv \triangle OA'T$, prin urmare $MT = OT$. Din faptul că triunghiul OMT este isoscel, obţinem: $\measuredangle TOM = \dfrac{1}{2}(180° - \measuredangle OTM) = \dfrac{1}{2}(180° - 2(\alpha - 30°)) = 120° - \alpha$; $\measuredangle MOA = \measuredangle TOA - \measuredangle TOM = 180° - 2\alpha - 120° + \alpha = 60° - \alpha$ şi $\measuredangle OMA = 180° - \measuredangle MOA - \measuredangle OAM = 180° - 60° + \alpha - (\alpha - 30°) = 150°$, adică locul geometric căutat este un arc de cerc capabil de unghiul dat de $150°$. Reciproc, orice punct al arcului mic mărginit de punctele O şi A aparţine locului, fapt care se demonstrează uşor.

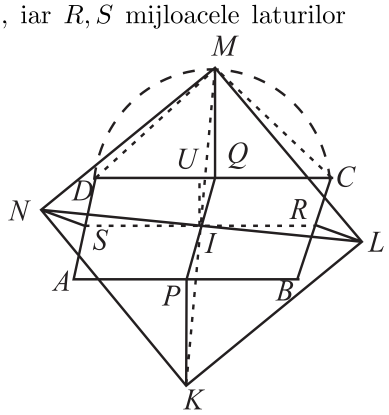
G285. *Pe laturile* AB, BC, CD, DA *ale paralelogramului* $ABCD$ *se construiesc în exterior semicercuri şi se notează cu* K, L, M*, respectiv* N *mijloacele acestor semicercuri. Arătaţi că:*

a) *patrulaterul* $KLMN$ *este pătrat;*

b) *vârfurile* A, B, C, D *sunt pe laturile pătratului dacă şi numai dacă* $ABCD$ *este dreptunghi.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. a) Fie P, Q mijloacele laturilor AB, CD, iar R, S mijloacele laturilor BC, DA. Fie a şi b lungimile laturilor AB şi BC. Evident, $PK = QM = \dfrac{a}{2}$ şi $PK \| QM$. Ca urmare, KM trece prin mijlocul I al segmentului PQ, adică prin punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului. Analog, LN trece prin I, care este şi mijlocul său. Aşadar diagonalele KM şi LN ale patrulaterului $KLMN$ se înjumătăţesc în I, deci $KLMN$ este paralelogram.



Din faptul că $\triangle IMQ \equiv \triangle INS$ ($QM = IS = \dfrac{a}{2}$, $IQ = SN = \dfrac{b}{2}$, $m(\widehat{MQI}) = m(\widehat{ISN}) = 90° + m(\widehat{A})$)

rezultă că $IM = IN$, deci paralelogramul $KLMN$ are diagonalele egale şi este dreptunghi. Perpendiculara în I pe SR (sau DC) intersectează DC în U. Din congruenţa unghiurilor marcate pe figură, deducem că $\widehat{NIM} \equiv \widehat{SIU}$ şi, deci, $\widehat{NIM}$ este unghi drept. În consecinţă, dreptunghiul $KLMN$ este pătrat.

b) Notăm cu l şi d lungimile laturii şi diagonalei pătratului $KLMN$. Avem $l = \sqrt{2} \cdot \dfrac{d}{2}$, iar cu teorema cosinusului aplicată în $\triangle IMQ$ obţinem: $\dfrac{d^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - 2\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{b}{2} \cdot \cos(90^\circ + m(\widehat{A}))$ sau $d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\sin A$.

Fie l_1 şi l_2 lungimile segmentelor DM şi DN. Condiţia ca A, B, C, D să fie pe laturile pătratului $KLMN$ revine la egalitatea $l = l_1 + l_2$. Avem:

$$\begin{aligned} l = l_1 + l_2 \Leftrightarrow l = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b \Leftrightarrow 2l^2 = (a+b)^2 \Leftrightarrow d^2 = (a+b)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab\sin A = (a+b)^2 \Leftrightarrow \sin A = 1 \Leftrightarrow A = 90^\circ \\ \Leftrightarrow ABCD \text{ este dreptunghi.} \end{aligned}$$

B. Nivel liceal

Notă. După încheierea numărului 1/2015, am primit o soluţie corectă a problemei **L268** din partea elevului **Edis Memiş**, Constanţa.

L276. *Fie ABC un triunghi, I centrul cercului înscris în el şi A' punctul în care dreapta AI retaie cercul circumscris triunghiului. Să se arate că punctele de contact ale tangentelor din A şi A' la cercul înscris sunt vârfurile unui dreptunghi dacă şi numai dacă $2a = b + c$.*

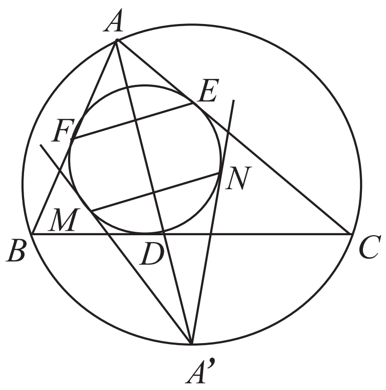
Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţia 1 (**Adrian Păunescu**, elev, Constanţa)**.** Fie D piciorul bisectoarei din A, iar E, F, M, N sunt punctele de contact cu cercul înscris ale tangentelor din A şi A'. Presupunem că $EFMN$ este dreptunghi, înscris în cercul de centru I; atunci I va fi mijlocul lui ME, iar unghiurile $\widehat{IMA'}$ şi $\widehat{IEA}$ sunt drepte. Rezultă că triunghiurile AIE şi $A'IM$ sunt congruente (C.U.), prin urmare $AI = IA'$. Din puterea punctului D faţă de cercul circumscris, avem: $BD \cdot DC = AD \cdot DA' \Leftrightarrow BD \cdot DC = AD(2AI - AD) \Leftrightarrow BD \cdot DC + AD^2 = 2AD \cdot AI \Leftrightarrow \dfrac{ac}{b+c} \cdot \dfrac{ab}{b+c} + \dfrac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{8b^2c^2}{(b+c)(a+b+c)}\cos^2\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{4p(p-a)}{b+c} = \dfrac{8p(p-a)}{a+b+c} \Leftrightarrow 2a = b + c$.

Reciproc, presupunem că $2a = b + c$. Urmărind raţionamentul precedent în sens invers, obţinem că $AI = AI'$. Rezultă congruenţa triunghiurilor AIE şi $A'IM$ (conform I.U.), de unde $\widehat{AIE} \equiv \widehat{A'IM}$ şi atunci punctele E, I şi M vor fi coliniare. Analog, se arată că punctele F, I şi N sunt coliniare, deci $EFMN$ este dretunghi.

Soluţia 2 (a autorului)**.** Avem $EF \| MN$, deoarece EF şi MN sunt perpendiculare pe AA'. Condiţia ca patrulaterul $EFMN$ să fie dreptunghi revine la $MN = EF$.

În $\triangle AEF$ avem: $EF = 2AF\sin\frac{A}{2} = 2r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$, deci $EF = 2r\cos\frac{A}{2}$ $(*)$.



Pe de altă parte, utilizând teorema lui Ptolemeu în patrulaterul $A'MIN$, avem că $MN \cdot A'I = 2r \cdot A'M$ $(**)$. Cum $A'M = \sqrt{A'I - r^2}$ şi $A'I = 2R\sin\frac{A}{2}$ (T. Lalescu, 16.7, sau $A'I = A'B$ ($\triangle BA'I$ fiind isoscel) $= \frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ (proiectând pe BC)$=\frac{2R\sin A}{2\cos\frac{A}{2}} = 2R\sin\frac{A}{2}$), prin înlocuire în $(**)$ obţinem:

$$(***) \qquad MN \cdot 2R\sin\frac{A}{2} = 2r\sqrt{4R^2\sin^2\frac{A}{2} - r^2}.$$

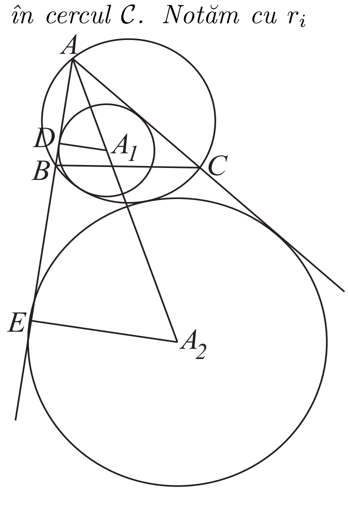
Ţinând seama de $(*)$ şi $(***)$, vom avea: $MN = EF \Leftrightarrow MN \cdot 2R\sin\frac{A}{2} = EF \cdot 2R\sin\frac{A}{2} \overset{(*),(***)}{\Longleftrightarrow} 2r\sqrt{4R^2\sin^2\frac{A}{2} - r^2} = 2r\cos\frac{A}{2}\cdot 2R\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \sqrt{4R^2\sin^2\frac{A}{2} - r^2} = R\sin A \Leftrightarrow 4R^2\sin^2\frac{A}{2} - r^2 = R^2\sin^2 A \Leftrightarrow 4R^2\sin^2\frac{A}{2}(1-\cos^2\frac{A}{2}) = r^2 \Leftrightarrow 4\sin^4\frac{A}{2} = \frac{r^2}{R^2} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = 4\frac{(p-a)(p-c)}{ac}\cdot\frac{(p-a)(p-b)}{ab} \Leftrightarrow a^2 = 4(p-a)^2 \Leftrightarrow a = 2(p-a) \Leftrightarrow a = -a+b+c \Leftrightarrow 2a = b+c$.

Notă. Soluţii corecte am primit din partea d-lor **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Roman**, Mirceşti, Iaşi.

L277. *Fie poligonul $A_0A_1A_2\ldots A_{n+1}$, $n \geq 1$, înscris în cercul $\mathcal{C}$. Notăm cu r_i razele cercurilor tangente interior cercului $\mathcal{C}$ şi segmentelor A_0A_i, A_0A_{i+1}, $i = \overline{1,n}$ şi cu ρ_i razele cercurilor tangente exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $(A_0A_i, (A_0A_{i+1}$, $i = \overline{1,n}$. Mai notăm cu r raza cercului tangent interior cercului $\mathcal{C}$ şi segmentelor A_0A_1, A_0A_{n+1} şi cu ρ raza cercului tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $(A_0A_1$, $(A_0A_{n+1}$.*

Să se arate că $\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_1}\cdot\ldots\cdot\frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi



Soluţie. Demonstrăm mai întâi următoarea.

Lemă. Fie triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}$, r raza cercului tangent interior cercului $\mathcal{C}$ şi segmentelor AB, AC şi ρ raza cercului tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $(AB$, $(AC$.

Atunci $\frac{r}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Demonstraţie. Notăm $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A_1, r)$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(A_2, \rho)$, $D \in AB \cap \mathcal{C}_1$, $E \in AB \cap \mathcal{C}_2$. Din $\triangle AA_1D \sim \triangle AA_2E$ rezultă:

$$\frac{A_1D}{A_2E} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow \frac{r}{\rho} = \frac{AD}{AE} \tag{1}$$

Aplicăm teorema lui Casey cercurilor $A, B, \mathcal{C}_1, C (A, B, C$ degenerate): $AB \cdot (AC - AD) + AC \cdot (AB - AD) = AD \cdot BC \Leftrightarrow AD(AB + AC + BC) = 2AB \cdot AC \Leftrightarrow$

$$AD = \frac{bc}{p} \tag{2}$$

Aplicăm teorema lui Casey cercurilor $A, B, \mathcal{C}_2, C$ (A, B, C degenerate) şi obţinem:

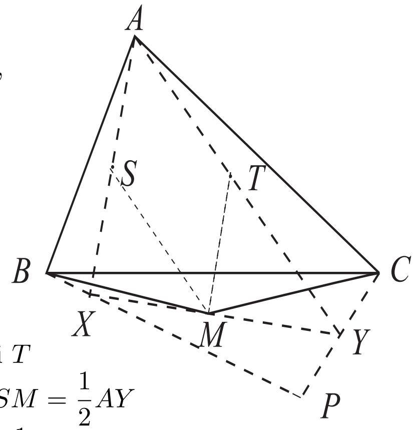
$$AB \cdot (AE - AC) + AC \cdot (AE - AB) = AE \cdot BC \Leftrightarrow AE(AB + AC - BC) =$$
$$= 2AB \cdot AC \Leftrightarrow AE = \frac{bc}{p-a}. \tag{3}$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3) rezultă:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{p-a}{p} \Leftrightarrow \frac{r}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Soluţia problemei. Ţinând seama de lema demonstrată şi de faptul că perechile de unghiuri $\left(\widehat{A_0A_1A_2}, \widehat{A_0A_3A_2}\right)$, $\left(\widehat{A_0A_2A_3}, \widehat{A_0A_4A_3}\right)$, $\ldots$, $\left(\widehat{A_0A_{n-1}A_n}, \widehat{A_0A_{n+1}A_n}\right)$ sunt suplementare obţinem:

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_1A_2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_2A_1}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_2A_3}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_3A_2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_3A_4}}{2} \cdot$$
$$\ldots \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_nA_{n+1}}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_{n+1}A_n}}{2} \Leftrightarrow \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_2A_1}}{2} \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_nA_{n+1}}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$



Notă. A rezolvat problema d-l **Titu Zvonaru**, Comăneşti.

L278. *Fie ABC un triunghi. Perpendiculara în B pe AB intersectează perpendiculara în C pe AC în punctul P. Două izogonale duse din vârful A taie dreptele BP şi CP în punctele X, respectiv Y. Dacă M este mijlocul segmentului XY, arătaţi că triunghiul MBC este isoscel.*

T. Zvonaru, Comăneşti şi **N. Stanciu**, Buzău

Soluţia 1 (Ştefan Obadă, elev, Iaşi**).** Fie S şi T mijloacele segmentelor AX, respectiv AY. Avem: $SM = \frac{1}{2}AY$ (deoarece SM este linie mijlocie în $\triangle AXY$), $CT = \frac{1}{2}AY$ (deoarece CT este mediana ipotenuzei în $\triangle ACY$), deci $SM = CT$. Analog se arată că $MT = BS$. Apoi,

$\widehat{BSX}$ este unghi exterior triunghiului isoscel ABS, deci $m(\widehat{BSX}) = 2m(\widehat{BAX})$; la fel se obţine că $m(\widehat{CTY}) = 2m(\widehat{CAY})$, prin urmare $\widehat{BSX} \equiv \widehat{CTY}$ şi atunci $\widehat{BSM} \equiv \widehat{CTM}$. Rezultă că $\triangle SMB \equiv \triangle TCM$ (L.U.L.), de unde $MB = MC$.

Soluţia 2 (**Neculai Roman**, Mirceşti, Iaşi)**.** Teorema medianei aplicată în triunghiul BXY arată că $4MB^2 = 2(BX^2 + BY^2) - XY^2$. Notând cu α măsura unghiului $\widehat{BAX}$ şi folosind teorema lui Pitagora în $\triangle ABX$ şi teorema cosinusului în $\triangle ABY$, avem că $BX^2 + BY^2 = AX^2 - AB^2 + AB^2 + AY^2 - 2AB \cdot AY \cos(A - \alpha)$, prin urmare $4MB^2 = 2(AX^2 + AY^2 - 2 \cdot AB \cdot AY \cos(A - \alpha)) - XY^2$. În mod analog se arată că $4MC^2 = 2(AX^2 + AY^2 - 2AC \cdot AX \cdot \cos(A - \alpha)) - XY^2$. Din asemănarea $\triangle ABX \sim \triangle ACY$ obţinem că $AB \cdot AY = AC \cdot AX$, aşadar $MB^2 = MC^2$, deci $\triangle MBC$ este isoscel.

L279. *Mediana AM a triunghiului ascuţitunghic ABC intersectează cercul celor nouă puncte asociat triunghiului în M şi N. Demonstraţi că $2AN < AM$.*

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

Soluţia 1 (**Călin Spiridon**, elev, Piatra Neamţ)**.** Triunghiul ABC fiind ascuţitunghic, punctul A va fi situat în exteriorul cercului celor nouă puncte. Pe de altă parte, punctul D de intersecţie dintre mediana AM şi linia mijlocie paralelă cu BC se află în interiorul cercului celor nouă puncte. Astfel, $N \in (AD)$ şi atunci $2AN < 2AD = AM$.

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş)**.** Cercul celor nouă puncte trece prin mijloacele laturilor şi prin picioarele înălţimilor. Folosind puterea punctului A faţă de acest cerc, obţinem că $AM \cdot AN = \dfrac{bc \cos A}{2}$. Astfel, $2AN < AM \Leftrightarrow \dfrac{bc \cos A}{m_a} < m_a \Leftrightarrow$ $bc \cdot \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \Leftrightarrow a^2 > 0$, de unde concluzia problemei.

L280. *Cu notaţiile uzuale într-un triunghi, arătaţi că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, sunt adevărate inegalităţile*:

a) $\sum \sqrt[n]{\dfrac{a}{-a + b + c}} \leq \dfrac{3n - 4}{n} + \dfrac{2R}{nr}$;

b) $\sum a \cdot \sqrt[n]{\dfrac{a}{-a + b + c}} \leq \dfrac{2p(R + (n - 2)r)}{nr}$.

Nicuşor Zlota, Focşani şi **Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti

Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş)**.** Cu substituţiile Ravi ($a = y + z, b = z + x, c = x + y$) avem:

$$\frac{R}{r} = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4xyz}$$

Aplicând inegalitatea mediilor obţinem:

$$(1) \qquad \sqrt[n]{\frac{y + z}{2x}} = \sqrt[n]{\frac{y + z}{2x} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1}} \leq \frac{\frac{y+z}{2x} + n - 1}{n} = \frac{y + z}{2nx} + \frac{n - 1}{n}.$$

a) Folosind inegalitatea (1) rezultă

$$\sum \sqrt[n]{\frac{a}{-a+b+c}} = \sum \sqrt[n]{\frac{y+z}{2x}} \leq \frac{1}{2n}\sum \frac{y+z}{x} + \frac{3n-3}{n} =$$
$$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2+2xyz-2xyz}{xyz} + \frac{3n-3}{n} =$$
$$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} - \frac{1}{n} + \frac{3n-3}{n} = \frac{3n-4}{n} + \frac{2R}{nr}.$$

b) Procedând ca mai sus, avem:

$$\sum a \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{-a+b+c}} = \sum (y+z) \cdot \sqrt[n]{\frac{y+z}{2x}} \leq \frac{1}{2n}\sum \frac{(y+z)^2}{x} + \frac{n-1}{n}\sum (y+z),$$

şi rămâne de arătat că

$$\frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(y+z)^2}{x} + \frac{(z+x)^2}{y} + 4(x+y+z) \leq \frac{(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz},$$

care este o identitate.

L281. *Cu notaţiile uzuale în triunghi, demonstraţi că*

$$\min\left\{\frac{m_am_b}{h_ah_b}, \frac{m_bm_c}{h_bh_c}, \frac{m_cm_a}{h_ch_a}\right\} \leq \frac{R}{2r} \leq \max\left\{\frac{m_am_b}{h_ah_b}, \frac{m_bm_c}{h_bh_c}, \frac{m_cm_a}{h_ch_a}\right\}.$$

Vasile Jiglău, Arad

Soluţie. Soluţie (**Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea). Fără a retsrânge generalitatea, vom presupune că $a \geq b \geq c$. Arătăm că $\min A = \frac{m_cm_a}{h_ch_a}$, unde $A = \left\{\frac{m_am_b}{h_ah_b}, \frac{m_bm_c}{h_bh_c}, \frac{m_cm_a}{h_ch_a}\right\}$. Într-adevăr, avem:

$$\frac{m_bm_c}{h_bh_c} \geq \frac{m_cm_a}{h_ch_a} \Leftrightarrow m_bh_a \geq m_ah_b \Leftrightarrow m_b \cdot \frac{2S}{a} \geq m_a \cdot \frac{2S}{b}$$
$$\Leftrightarrow b^2m_b^2 \geq a^2m_a^2 \Leftrightarrow b^2[2(a^2+c^2)-b^2] \geq a^2[2(b^2+c^2)-a^2] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b^2-a^2)(2c^2-a^2-b^2) \geq 0,$$

iar ultima inegalitate este, evident, adevărată. Analog se arată că $\frac{m_am_b}{h_ah_b} \geq \frac{m_cm_a}{h_ch_a}$.
În aceste condiţii, prima inegalitate din problemă devine:

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{m_cm_a}{h_ch_a} \Leftrightarrow \frac{pabc}{8S^2} \geq \frac{m_am_cac}{4S^2} \Leftrightarrow 4m_am_c \leq 2bp.$$

Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor triunghiului ABC; aplicând inegalitatea lui Ptolemeu în patrulaterul $AC_1A_1B_1$, obţinem că $AA_1 \cdot CC_1 \leq AC_1 \cdot A_1C + A_1C_1 \cdot AC \Leftrightarrow m_am_c \leq \frac{b}{2} \cdot b + \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2} \Leftrightarrow 4m_am_c \leq 2b^2 + ac$. Rămâne să demonstrăm că $2b^2 + ac \leq 2bp$; după calcule, această inegalitate revine la $(b-a)(b-c) \leq 0$, fapt adevărat.

Pentru cea de-a doua inegalitate, observăm întâi că $\max A = \dfrac{m_a m_b}{h_a h_b}$, dacă $2b^2 \geq a^2 + c^2$ şi $\max A = \dfrac{m_b m_c}{h_b m_c}$, dacă $2b^2 \leq a^2 + c^2$. Ne vom plasa în primul caz ($2b^2 \geq a^2 + c^2$), calculele fiind similare pentru cel de-al doilea. Trebuie deci să dovedim că

$$\begin{aligned}\frac{m_a m_b}{h_a h_b} \geq \frac{R}{2r} &\Leftrightarrow \frac{m_a m_b ab}{4S^2} \geq \frac{pabc}{8S^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4m_a m_b \geq p \cdot c \Leftrightarrow 16m_a^2 m_b^2 \geq c^2(a+b+c)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [2(b^2+c^2)-a^2][2(a^2+c^2)-b^2] \geq c^2(a+b+c)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (ab-c^2)^2 + (ac-c^2)^2 + (bc-c^2)^2 - 2(a^2-b^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (xy-1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 - 2(x^2-y^2) \geq 0,\end{aligned}$$

unde $x = \dfrac{a}{c}$, $y = \dfrac{b}{c}$ verifică $x \geq y \geq 1$ şi $2y^2 \geq x^2 + 1$, altfel spus $x \geq y \geq \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}} \geq 1$. Ultima inegalitate revine la

$$-2y^4 + y^2(5x^2+1) - y(2x+2) + (3 - 2x + x^2 - 2x^4) \geq 0.$$

Fixăm variabila x şi considerăm funcţia $f : \left[\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2}}, a\right] \to \mathbb{R}$, $f(y) = -2y^2 + y^2(5a^2+1) - 2y(a+1) + (3 - 2a + a^2 - 2a^4)$, unde $a \geq 1$. Avem: $f'(y) = 2[(a-y)(4y(a+y)-1) + (a^2y-1)] \geq 0$ (deoarece $a, y \geq 1$), deci f este strict crescătoare pe domeniul său de definiţie; rezultă că $f(y) \geq f\left(\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2}}\right) = 3a^2 - 2a + 3 - \sqrt{2}(a+1)\sqrt{a^2+1}$. Ar rămâne să mai arătăm că ultima cantitate este nenegativă, fapt care revine, după calcule, la $(a-1)^2(7a^2+7-2a) \geq 0$, evident adevărat. Cu aceasta, soluţia problemei este încheiată.

L282. *Să se arate că, pentru orice $x, y, z > 0$, are loc inegalitatea*

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \geq 2.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţia 1 (Gheorghe Iurea, Iaşi**).** Notăm $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$; Rezultă că a, b, c sunt laturile unui triunghi ABC. Folosind notaţiile obişnuite, deducem că $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$. Inegalitatea din enunţ revine la

$$\frac{p-a}{a} + \frac{p-b}{b} + \frac{p-c}{c} + \sqrt[3]{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}} \geq 2.$$

Cu ajutorul relaţiilor $rp = S$, $abc = 4RS$ şi $ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4Rr$, după calcule, inegalitatea devine:

$$\frac{r^2+p^2+4Rr}{4Rr} + \sqrt[3]{\frac{r}{4R}} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{r^2+p^2}{4Rr} + \sqrt[3]{\frac{r}{4R}} \geq 4.$$

Folosind inegalitatea lui Blundon:

$$p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(r-2r)},$$

este suficient să demonstrăm că

$$\frac{2R^2 + 10Rr - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}}{4Rr} + \sqrt[3]{\frac{3}{4R}} \geq 4.$$

Cu notaţia $\frac{R}{2r} = x \geq 1$, aceasta se scrie $x + \dfrac{5}{2} - (x-1)\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}} \geq 4$. Notăm $\sqrt[3]{x} = t \geq 1$ şi avem de demonstrat că $t^3 - (t^3-1)\sqrt{1 - \dfrac{1}{t^3}} + \dfrac{1}{2t} \geq \dfrac{3}{2}$, $t \geq 1 \Leftrightarrow$ $2t^4 - 3t + 1 - 2(t^3-1)\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^3+2t^2+2t-1-2(t^2+t+1)\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}}) \geq 0$. Cum $t \geq 1$, este suficient să arătăm că $2t^3 + 2t^2 + 2t - 2(t^2+t+1)\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} \geq 1 \Leftrightarrow$ $2(t^2+t+1)\left(t - \sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}}\right) \geq 1 \Leftrightarrow 2(t^2+t+1)\left(t^2 - \dfrac{t^3-1}{t}\right) \geq t + \sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} \Leftrightarrow$ $2(t^2+t+1) \geq t^2 + t\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} \Leftrightarrow t^2 + 2t + 2 \geq t\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}}$, evident adevărat, deoarece $\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} < t$ pentru $t > 1$.

Egalitatea se atinge când $t = 1$, deci când $R = 2r$, adică pentru $\triangle ABC$ echilateral. Acest lucru se petrece dacă $a = b = c$, aşadar pentru $x = y = z$.

Soluţia 2 (a autorului). Notând $a = \dfrac{x}{y+z}$, $b = \dfrac{y}{z+x}$ şi $c = \dfrac{z}{x+y}$, observăm că $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = \dfrac{y+z}{x+y+z} + \dfrac{z+x}{x+y+z} + \dfrac{x+y}{x+y+z} = 2$. După calcule, această egalitate conduce la $2abc + ab + bc + ca = 1$. Din inegalitatea mediilor, obţinem că

$$\frac{1}{4} = \frac{2abc + ab + bc + ca}{4} \geq \sqrt[4]{2abc \cdot ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt[4]{2(abc)^3},$$

de unde $abc \leq \dfrac{1}{8}$. Apoi, din inegalitatea lui Bergström,

$$2 = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{a+b+c+3} \Rightarrow a + b + c \geq \frac{3}{2}.$$

Aplicăm din nou inegalitatea lui Bergström:

$$2 = \sum \frac{1}{a+1} = \sum \frac{(b+c)^2}{(a+1)(b+c)^2} \geq \frac{4(\sum a)^2}{\sum (a+1)(b+c)^2}.$$

După calcule, ţinând seama de egalităţile $(\sum a) \cdot (\sum ab) = \sum ab^2 + \sum a^2 b + 3abc$ şi $\sum ab = 1 - 2abc$, inegalitatea precedentă revine la $a + b + c \geq \dfrac{2 - 7abc}{1 - 2abc}$. Pentru a obţine concluzia, ar fi suficient să arătăm că

$$\frac{2-7abc}{1-2abc}+\sqrt[3]{abc}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{2-7t^3}{1-2t^3}+t\geq 2,$$

unde $t=\sqrt[3]{abc}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$. Această inegalitate este echivalentă cu $t(1-2t)(t+1)^2\geq 0$, $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, care este, evident, adevărată. Egalitatea se atinge pentru $t=\dfrac{1}{2}$, deci pentru $x=y=z$, fapt care se întâmplă când $a=b=c$.

Soluţia 3 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Folosim metoda SOS. Avem:

$$\frac{1}{8}-\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\sum\frac{z(x-y)^2}{8(x+y)(y+z)(z+x)},$$

şi atunci

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-\sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}&=\frac{\frac{1}{8}-\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+t^2}=\\&=\sum\frac{z(x-y)^2}{2(x+y)(y+z)(z+x)(1+2t+4t^2)},\end{aligned}$$

unde am notat $t=\sqrt[r]{\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$.

Deoarece $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}-\dfrac{3}{2}=\sum\dfrac{(x-y)^2}{2(x+z)(y+z)}$ inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\begin{aligned}&\sum\frac{(x-y)^2}{2(x+z)(y+z)}\geq\sum\frac{z(x-y)^2}{2(x+y)(y+z)(z+x)}(1+2t+4t^2)\\&\Leftrightarrow (x-y)^2S_z+(y-z)^2S_z+(z-x)^2S_y\geq 0,\end{aligned}$$

unde $S_x=(y+z)(1+2t+4t^2)-x$, $S_y=(z+x)(1+2t+4t^2)-y$, $S_z=(x+y)(1+2t+4t^2)-z$.

Putem presupune că $x\geq y\geq z$. Rezultă că $S_y\geq 0$, $S_x+S_y\geq 0$ şi $S_y+S_z\geq 0$, deci inegalitatea dorită este adevărată.

Soluţia 4 (**Nicuşor Zlota**, Focşani). Cum $\prod(x+y)\geq\prod 2\sqrt{xy}$, rezultă că $\dfrac{xyz}{\prod(x+y)}\leq\dfrac{1}{8}$, de unde $\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{\prod(x+y)}}\geq 4\dfrac{xyz}{\prod(x+y)}$; vom demonstra deci inegalitatea $\sum\dfrac{x}{y+z}+4\dfrac{xyz}{\prod(x+y)}\geq 2$. Notând $p=x+y+z$, $q=xy+yz+zx$, $r=xyz$, inegalitatea precedentă revine la $\dfrac{p^3-2pq+2r}{pq-r}+\dfrac{4r}{pq-r}\geq 2\Leftrightarrow p^3-4pq+9r\geq 0$, care este, de fapt, inegalitatea Schur de gradul 3.

Soluţia 5 (**Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea). Din inegalitatea mediilor, avem:

$$\sqrt[3]{(x+y)(x+z)(y+z)} \le \frac{2(x+y+z)}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}} \ge \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2(x+y+z)}$$
$$\Rightarrow \sum \frac{x}{y+z} + \sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}} \ge \sum \frac{x}{y+z} + \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2(x+y+z)}.$$

Dar $\sum \frac{x}{y+z} + \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2(x+y+z)} \ge 2$, conform problemei 8.3.7 din Pham Kim Hung - *Secrets in inequalities* - vol. I, GIL, Zalău, 2007 şi de aici rezultă cerinţa problemei.

Soluţia 6 (**Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş). Vom demonstra o inegalitate ,,mai tare" decât cea dată. Arătăm că

$$\sum \frac{x}{y+z} \ge \sqrt{4 - \frac{14\prod x}{\prod(x+y)}}.$$

Notăm $a = \frac{x}{y+z}$, $b = \frac{y}{z+x}$, $c = \frac{z}{x+y}$. Ultima inegalitate se scrie

$$\sum a \ge \sqrt{4 - 14\prod a}.$$

Folosind identitatea $\sum xy(x+y) + 2\prod x = \prod(x+y)$, rezultă că $\sum ab + 2\prod a = 1$. Ridicând la pătrat, avem de demonstrat că

$$\sum a^2 + 2\sum ab \ge 4 - 14\prod a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum a^2 + 2\sum ab \ge 4(\sum ab + 2\prod a) - 14\prod a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\prod a \ge 2\sum ab - \sum a^2.$$

Din **inegalitatea Nesbitt** $\sum \frac{x}{y+z} \ge \frac{3}{2}$, obţinem că $\sum a \ge \frac{3}{2}$ şi atunci $6\prod a \ge \frac{9\prod a}{\sum a}$. Mai rămâne de demonstrat că $\frac{9\prod a}{\sum a} \ge 2\sum ab - \sum a^2$, care este o formă a inegalităţii Schur $\sum a^3 + 3\prod a \ge \sum ab(a+b)$. Pentru a demonstra afirmaţia din debutul soluţiei mai rămâne să arătăm că

$$\sqrt{4 - 14\prod a} + \sqrt[3]{\prod a} \ge 2,$$

care, după ridicare la pătrat şi reducerea termenilor, se scrie

$$14\prod a \le 2\sqrt{4 - 14\prod a}\cdot\sqrt[3]{\prod a} + \sqrt[3]{(\prod a)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\prod a}} + 2\sqrt{\frac{4}{\prod a} - 14}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{\prod a}} \ge 14,$$

care rezultă imediat, dacă ţinem seama de inegalitatea $\prod(x+y) \geq 8\prod x$, adică $\prod a \leq \frac{1}{8}$.

L283. *Arătaţi că* $\frac{1}{1-a^4b}+\frac{1}{1-b^4c}+\frac{1}{1-c^4d}+\frac{1}{1-d^4a} \geq \frac{1}{1-a^2bcd}+\frac{1}{1-ab^2cd}+\frac{1}{1-abc^2d}+\frac{1}{1-abcd^2}$, *oricare ar fi numerele reale* $a,b,c,d \in [0,1)$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

Soluţie. Pentru $x,y,z,t \geq 0$, are loc inegalitatea $x^4y+y^4z+z^4t+t^4x \geq xyzt(x+y+z+t)$. (A se vedea, de exemplu, problema 923, p. 133 din L. Panaitopol, M. Lascu, V. Băndilă - *Inegalităţi*, GIL, Zalău, 1996.) Înlocuim $x=a^i, y=b^i, z=c^i, t=d^i, i=\overline{1,n}$ şi, sumând, obţinem că

$$\sum\left(1+\sum_{i=1}^{n}(a^4b)^i\right) \geq \sum\left(1+\sum_{i=1}^{n}(a^2bcd)^i\right),\ \forall a,b,c,d \in [0,1),$$

unde sumarea se face ciclic după a,b,c,d. Trecem la limită după $n \to \infty$ şi, cum $1+\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1}{1-q}$, $q \in [0,1)$, rezultă inegalitatea din enunţ. Se atinge egalitate când $a=b=c=d$.

Notă. În aceeaşi manieră a rezolvat problema d-l **Nicuşor Zlota**, Focşani.

L284. *Fie a,b numere reale pozitive. Arătaţi că sistemul de ecuaţii $x^2+y^2=a^2+b^2$, $x^3+y^3=a^3+b^3$ are şi alte soluţii reale decât soluţiile evidente (a,b) şi (b,a). Există asemenea soluţii cu ambele componente pozitive?*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie $S=x+y$ şi $P=xy$, deci $S^2-2P=a^2+b^2$ şi $S^3-3SP=a^3+b^3$. Prin eliminarea lui P între aceste două ecuaţii obţinem pentru S:

$$S^3-3S(a^2+b^2)+2(a^3+b^3)=0. \tag{1}$$

Împreună cu $P=\frac{1}{2}(S^2-(a^2+b^2))$, această ecuaţie formează un sistem echivalent cu cel din enunţ. Obţinem deci soluţii ale sistemului iniţial, de forma

$$(x,y)=\left(\frac{S\pm\sqrt{2(a^2+b^2)-S^2}}{2},\frac{S\mp\sqrt{2(a^2+b^2)-S^2}}{2}\right),$$

dacă S verifică (1). Se vede astfel că obţinem soluţii reale pentru acele valori ale lui S pentru care $S^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

Ecuaţia (1) se mai scrie sub forma $(S-(a+b))(S^2+(a+b)S-2(a^2-ab+b^2))=0$. Soluţia $S=a+b$ conduce la $P=ab$ şi, apoi, la $\{x,y\}=\{a,b\}$. Celelalte două soluţii sunt $-\frac{1}{2}(a+b\pm\sqrt{9a^2-6ab+9b^2})$ şi se vede uşor că acestea sunt reale, distincte şi diferă de soluţia $a+b$. Rămâne să arătăm că aceste valori ale lui S verifică $S^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Într-adevăr, pentru $S=-\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{9a^2-6ab+9b^2})$, avem

$S^2 = \dfrac{1}{2}(5a^2 - 2ab + 5b^2 - (a+b)\sqrt{9a^2 - 6ab + 9b^2})$, iar inegalitatea $S^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ revine, succesiv, la $a^2 - 2ab + b^2 \leq (a+b)\sqrt{9a^2 - 6ab + 9b^2} \Leftrightarrow a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \geq 0$, ceea ce este adevărat pentru a, b pozitive.

Remarcăm că, de fapt, avem chiar $S^2 < a^2 + b^2$, această inegalitate fiind echivalentă, după calcule ca cele de mai sus, cu $24a^3b + 24ab^3 > 16a^2b^2 \Leftrightarrow ab(3a^2 + 3b^2 - 2ab) > 0$, fapt adevărat. Această evaluare arată că $P < 0$, deci nu vom obţine soluţii cu ambele componente pozitive.

Notă. Soluţie similară am primit din partea d-lui **Titu Zvonaru**, Comăneşti.

L285. a) *Fie* $n \geq 2$ *un număr natural şi* p *cel mai mare divizor prim al lui* $n(n+1)$. *Fie* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *sumele simetrice fundamentale ale numerelor* $1, 2, \ldots, n$. *Să se arate că* $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-2}$ *se divid cu* p.

b) *Dacă* p *este un număr prim şi* $n \equiv -1$ *(mod* p^2*), atunci* $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-2}, \sigma_{p-1}$ *se divid cu* p.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. a) Fie $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ pentru $k \geq 1$ număr natural; arătăm în primul rând, că $S_k(n)$ se divide cu p pentru orice $1 \leq k \leq p-2$. Folosim formulele cunoscute

$$\binom{k+1}{1}S_1(n) + \binom{k+2}{2}S_2(n) + \ldots + \binom{k+1}{k}S_k(n) = (n+1)^{k+1} - (n+1)$$

şi inducţia după $k \leq p-2$ pentru a dovedi acest lucru.

Într-adevăr, $S_1(n) = n(n+1)/2$ se divide cu p (p divide $n(n+1)$, care are cel puţin un divizor prim impar pentru $n \geq 2$; cu atât mai mult cel mai mare divizor prim al său este impar). Dacă am arătat că $S_1(n), \ldots, S_{k-1}(n)$ se divid toate cu p, folosind formula anterioară şi faptul că $(n+1)^{k+1} - (n+1) = (n+1)((n+1)^k - 1)$ se divide cu $n(n+1)$ (deci cu p), obţinem că se divide cu p şi $(k+1)S_k(n)$. Pentru $k \leq p-2$ avem $k+1 \leq p-1$, deci $k+1$ este prim cu p şi concluzia $p|S_k(n)$ rezultă.

Pentru a rezolva problema mai folosim formulele lui Newton:

$$S_k(n) - \sigma_1 S_{k-1}(n) + \sigma_2 S_{k-2}(n) - \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1(n) + (-1)^k k\sigma_k = 0,$$

valabile pentru $1 \leq k \leq n$ şi o inducţie de acelaşi tip ca să deducem $p|\sigma_k$ pentru $1 \leq k \leq p-2$, ceea ce trebuie demonstrat.

b) Să observăm că inducţia făcută nu ne permite să deducem şi că p divide pe $S_{p-1}(n)$, dar dacă acest lucru ar fi adevărat, a doua inducţie ar putea fi şi ea împinsă cu un pas mai departe, pentru a deduce şi $p|\sigma_{p-1}$.

Este exact ce se întâmplă atunci când $n = sp^2 - 1$. Evident avem îndeplinite condiţiile de la punctul a) (adică σ_k se divide cu p pentru $k \leq p-2$) şi, în plus, spunem noi, în acest caz avem şi că $S_{p-1}(n)$ se divide cu p (deci şi σ_{p-1} se divide cu p). Astfel, ne mai rămâne doar să arătăm că p divide pe $S_{p-1}(n)$.

Asta are loc deoarece $S_{p-1}(n) \equiv n - [n/p] \pmod{p}$ (conform teoremei lui Fermat), iar, pentru n de forma $sp^2 - 1$, avem

$$n - [n/p] = sp^2 - 1 - (sp - 1) = sp(p-1) \equiv 0 \pmod{p},$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P325. În scrierea $1\square 3\square 5\square 7 = 26\square 8\square 2$, completaţi casetele cu unul din semnele $+$ sau $-$ astfel încât să obţineţi o egalitate. Arătaţi că există o singură soluţie.
(*Clasa I*) **Dumitriţa Grigoriu, elevă, Iaşi**

P326. Suma a şase numere nenule este 20. Ştiind că în sumă sunt exact doi termeni egali, să se scrie toate sumele ce îndeplinesc aceste condiţii.
(*Clasa I*) **Iustina Diaconu, elevă, Iaşi**

P327. Din şirul numerelor $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1$ se extrag două. Să se arate că suma numerelor rămase nu poate fi 12.
(*Clasa I*) **Ana Ionescu, elevă, Iaşi**

P328. În şirul $\boxed{1}\boxed{}$, $\boxed{2}\boxed{}$, $\boxed{3}\boxed{}$, $\ldots$, $\boxed{9}\boxed{}$, fiecare casetă liberă se completează cu o cifra nenulă utilizată o singură dată. Să se arate că suma numerelor de doua cifre obţinute este mai mică decât 496.
(*Clasa a II-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

P329. Ştiind că diferenţa dintre numerele a şi b este 5 şi că diferenţa dintre numerele c şi d este 7, să se calculeze diferenţa dintre suma numerelor a şi c şi suma numerelor b şi d.
(*Clasa a II-a*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P330. În câte moduri putem aranja formele geometrice de pătrat cerc, triunghi şi dreptunghi una după alta, astfel încât cercul să fie înaintea pătratului?
(*Clasa a II-a*) **Mădălina Baciu, elevă, Iaşi**

P331. Cu 12 pătrate de latură 1 cm construiţi dreptunghiul de perimetru minim. Care este valoarea perimetrului său?
(*Clasa a III-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

P332. Să se arate că numărul 987 nu se poate scrie ca suma a două numere răsturnate. (Exemplu: 231 şi 132 sunt numere răsturnate.)
(*Clasa a III-a*) **Georgiana Avădanei, elevă, Iaşi**

P333. Cum putem măsura 5 l de apă având la dispoziţie două vase negradate de 11 l şi 7 l?
(*Clasa a III-a*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

P334. Într-o împărţire exactă suma dintre deîmpărţit, împărţitor şi cât este 49, iar suma dintre deîmpărţit şi cât este 45. Să se afle deîmpărţitul.
(*Clasa a II-a*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**

P335. Fie trei numere naturale nenule. Se calculează diferenţele a câte două dintre ele şi se obţine: $6, 12, 18$. Arătaţi că numărul cel mai mare este cel puţin egal cu 19.
(*Clasa a IV-a*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

P336. Să se afle un număr ştiind că suma dintre acest număr, dublul lui, triplul lui şi împătritul lui este cu 19 mai mare decât jumătatea lui.
(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Vieru, elev, Iaşi**

[1]Se primesc soluţii până la data de 15 ianuarie 2016.

P337. Pe o masă sunt aşezate 16 cartonaşe cu faţa în jos având numere de la 1 la 16. Trei copii extrag câte 5 cartonaşe şi constată că sumele numerelor de pe ele sunt: 35, 41 şi 45. Arătaţi că unul dintre copii a extras cartonaşul cu numărul 16.

(*Clasa a IV-a*) **Maria Boutiuc, studentă, Iaşi**

P338. În careul alăturat, în cele nouă casete sunt scrise crescător, atât pe linii cât şi pe coloane, numere diferite şi nenule. Care este valoarea celei mai mici sume $a + c + g + i$ posibile?

a	b	c
d	e	f
g	h	i

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.193. Vom spune că un număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ este *amuzant* dacă $3a^2 + b + c = 120$. Determinaţi numerele amuzante care sunt divizibile cu 3.

Cosmin Aştefanei, elev, Iaşi

V.194. Vom spune că un număr natural de patru cifre $\overline{abcd}$ este *serios* dacă $a + 2b + 3c + 4d = 10$. Câte numere serioase există? Care este cel mai mic număr serios? Dar cel mai mare?

Gheorghe Iurea, Iaşi

V.195. Copiii din clasa a V-a B merg în excursie. Autocarul are 20 de locuri duble şi nimeni nu stă în picioare. Pe drum, profesorul de matematică observă că jumătate dintre copii stau de vorbă cu profesoara de engleză, $13,(3)\%$ dintre copii se joacă pe telefon iar cei rămaşi fac o zarvă de nedescris. Câţi copii merg în excursie?

Ioana-Maria Popa, elevă, Iaşi

V.196. Demonstraţi că nu există cifre nenule distincte a, b şi c astfel încât $\overline{abc}\cdot\overline{ba} = \overline{cba}\cdot\overline{bc}$.

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

V.197. Arătaţi că numărul $n = 653^{653}$ se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule.

Constantin Dragomir, Piteşti

V.198. Demonstraţi că numărul $A = 2014^2 + 2015^2 + 2016^2 + 2017^2 + 2018^2$ nu este pătrat perfect.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.199. Se consideră mulţimea $M = \{2, 3, 4, \ldots, 99\}$.

a) Arătaţi că oricum am alege 50 de numere din M, există două numere alese care să aibă suma 101.

b) Arătaţi că putem alege 50 de numere din M astfel încât oricare două dintre numerele alese să aibă suma diferită de 100.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.193. Fie $p \geq 2$ un număr natural cu proprietatea că numărul $n = \underbrace{\overline{11\ldots11}}_{p \text{ cifre}}$ este prim. Demonstraţi că p este număr prim.

Constantin Dragomir, Piteşti

VI.194. Determinaţi toate perechile (x, y) de numere naturale nenule pentru care $\dfrac{xy}{x+y}$ este număr prim.

Neculai Stanciu, Buzău

VI.195. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c şi d pentru care $ad = bc$, $ab + cd = 50$ şi $a \leq c \leq b$.

Ştefan Obadă, elev, Iaşi

VI.196. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $x^2 + 7x = 2016y^2 + 2015$.

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

VI.197. Demonstraţi că numărul $N = 11^{11^{2015}} + 11^{11^{2014}} + 1$ se divide cu 7.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

VI.198. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC > BC$. Pe dreapta BC se iau punctele P şi Q astfel încât $B \in (CP)$, $C \in (BQ)$, $AC = CP = BQ$. Pe laturile AB şi AC se iau punctele M, respectiv N, astfel încât $AM = BC$ şi $AN = NQ$. Demonstraţi că $PM \| BN$.

Dorel Luchian, Iaşi

VI.199. Folosind doar rigla negradată şi compasul, construiţi un triunghi dreptunghic cu unghi de $30°$, având înălţimea corespunzătoare ipotenuzei congruentă cu un segment dat.

Petru Asaftei, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.193. Dacă a, b sunt numere reale mai mari ca 1 şi n este număr natural nenul, arătaţi că $ab + \dfrac{1}{a^n b^n} > \dfrac{1}{a^{n-1}} + \dfrac{1}{b^{n-1}}$.

Alina Tigae, Craiova

VII.194. Demonstraţi că numărul $N = (7^{2015} - 6^{2015} - 1)(7^{2011} - 6^{2011} - 1)$ este divizibil cu 301.

Ionel Tudor, Călugăreni

VII.195. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB \| CD$, având lungimile laturilor $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ şi $d = AD$. Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, arătaţi că $\mathcal{A}_{AOD} \leq \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{ac} \cdot \min\{b, d\}$. În ce condiţii se atinge egalitatea?

Daniela Munteanu, Iaşi

VII.196. Fie AP mediană în triunghiul ABC şi Q un punct pe segmentul AP, diferit de centrul de greutate al triunghiului. Notăm $\{M\} = CQ \cap AB$ şi $\{N\} = BQ \cap AC$.

a) Arătaţi că PM nu este paralelă cu AC, iar PN nu este paralelă cu AB.

b) Dacă $\{D\} = PM \cap AC$ şi $\{E\} = PN \cap AB$, arătaţi că $DE \| MN$.

Elena Iurea, Iaşi

VII.197. Fie $ABCD$ un trapez cu unghiurile $\widehat{A}$ şi $\widehat{D}$ drepte, în care $AD = DC < AB$. Fie M proiecţia lui C pe AB, iar N un punct de pe latura BC astfel încât $\dfrac{MO}{ON} = \dfrac{AB}{CD}$, unde $\{O\} = MN \cap BD$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{BMN}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

VII.198. Se consideră triunghiurile echilaterale ABC şi CDE astfel încât $C \in (BE)$, $BC = 2CE$ iar A şi D nu sunt separate de dreapta BC. Dacă $\{I\} = BD \cap AE$, demonstraţi că $BI = 2IE$.

Mirela Marin, Iaşi

VII.199. Pe latura AC a triunghiului ABC cu $m(\widehat{A})$=45° şi $m(\widehat{C})$=30° se consideră punctul F astfel încât BC^2=$CF \cdot CA$. Perpendiculara în A pe AB intersectează dreapta BF în punctul D. Arătaţi că triunghiul BCD este dreptunghic isoscel.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Clasa a VIII-a

VIII.193. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile exprimate prin numere naturale. Numărul ce reprezintă pătratul diagonalei este egal cu suma numerelor ce reprezintă dimensiunile paralelipipedului. Arătaţi că paralelipipedul este cub.

Cătălin Calistru, Iaşi

VIII.194. Fie $a, m, p \in (0, \infty)$ cu $m \neq 1$. Considerăm numerele $a_1 = am + p$, $a_2 = a_1 m + p, \ldots, a_{100} = a_{99} m + p$. Dacă $a_1 = a_3$, calculaţi suma $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

VIII.195. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $x^4 - 3x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 = 54$.

Vasile Chiriac, Bacău

VIII.196. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $x^3 + 3x^2 - 3x - y^2 + 2 = 0$.

Neculai Stanciu, Buzău

VIII.197. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale nenule x şi y pentru care $\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 1$.

Roxana Vasile şi Luminiţa Mihalache, Craiova

VIII.198. Dacă a, b, c sunt numee reale pozitive, arătaţi că $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c) \leq \min\{(a^2+b^2)^2, (b^2+c^2)^2, (c^2+a^2)^2\}$.

Lucian Tuţescu şi Nicoleta Bran, Craiova

VIII.199. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB = AA' \cdot \sqrt{2}$ şi M un punct pe baza superioară $A'B'C'D'$ astfel încât unghiurile $\widehat{AMC}$ şi $\widehat{BMD}$ să fie suplementare. Demonstraţi că M este centrul pătratului $A'B'C'D'$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Clasa a IX-a

IX.161. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$, arătaţi că $\dfrac{a^m}{b^m} + \dfrac{b^m}{c^m} + \dfrac{c^m}{a^m} \leq \dfrac{a^n}{b^n} + \dfrac{b^n}{c^n} + \dfrac{c^n}{a^n}$.

Robert Antohi, elev, Iaşi

IX.162. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere reale pozitive. Pentru fiecare $n \geq 2$, definim mulţimea $A_n = \{a_i a_j | 1 \leq i < j \leq n\}$.

a) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică, arătaţi că A_n conţine exact $2n-3$ elemente, oricare ar fi $n \geq 2$.

b) Dacă A_n are $2n-3$ elemente, oricare ar fi $n \geq 2$, demonstraţi că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

Dan Popescu, Suceava

IX.163. Fie ABC un triunghi de arie S şi S_1, S_2, S_3 ariile segmentelor de disc ce formează între laturile triunghiului şi cercul circumscris acestuia. Arătaţi că $S < S_1 + S_2 + S_3$.

Andrei Nicolaescu, elev, Craiova

IX.164. Pe laturile AB şi BC ale triunghiului isoscel ABC (cu $AB = AC$) se consideră punctele N, respectiv M, astfel încât $AN = 2NB$ şi $BM = MC$. Dacă $\{P\} = MN \cap AC$, demonstraţi că $\max\{AB, BC\} < MP < \sqrt{AB^2 + BC^2}$.

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

IX.165. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Dacă $\widehat{MAC} \equiv \widehat{B}$ şi $m(\widehat{BAM}) = 105°$, determinaţi $m(\widehat{B})$.

Mircea Lascu şi Marius Stănean, Zalău

Clasa a X-a

X.161. Pentru $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$, arătaţi că $x < x^{\log_2 x} + 3^{\log_2^3 x} + 5^{\log_2^5 x}$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

X.162. Fie a, b, c, d numere complexe astfel încât $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{d}{|d|} = 0$. Arătaţi că $|z-a| + |z-b| + |z-c| + |z-d| \geq |a| + |b| + |c| + |d|$, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$.

Irina Cristali, elevă, Bucureşti

X.163. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, arătaţi că $\sin 2x < \frac{1}{2x^2 - x^4}$.

Lucian Tuţescu şi Cristian Moanţă, Craiova

X.164. Determinaţi $a, n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ cu proprietatea că numerele $\log_a(n-1)$ şi $\log_a n$ sunt raţionale.

Alexandru Blaga, Satu Mare

X.165. Determinaţi perechile (m, n) de numere întregi cu proprietatea că $m(\sin^n x + \cos^n x - 1) = n(\sin^n x + \cos^n x - 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Mihai Dicu, Craiova

Clasa a XI-a

XI.161. Se consideră parabola $\mathcal{P} : y = ax^2 + a (a > 0)$ şi cercul $\mathcal{C}$, tangent la parabolă în M şi la axa Ox în N. Scrieţi ecuaţia cercului $\mathcal{C}$, ştiind că tangenta în M la parabolă trece prin origine.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XI.162. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice cu proprietatea că $3A^4 - 14A^3 - 13A^2 + 6I_n = O_n$. Demonstraţi că $\det A > 0$.

Bogdan-Petre Posa, Bucureşti

XI.163. Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $3 \leq m < n$ şi funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin^m x}{m} + \frac{\cos^m x}{n}$. Determinaţi imaginea funcţiei f.

Ionel Tudor, Călugăreni

XI.164. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=x\in\mathbb{R}_+^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}\sqrt[n+1]{n+1}-x_n\sqrt[n]{n})$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XI.165. Există două funcţii strict convexe ale căror grafice se intersectează în exact n puncte?

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.161. Fie u, v numere reale fixate şi mulţimile

$$M=\left\{\begin{pmatrix}1 & ua & vb & c\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}|a,b,c\in\mathbb{Q}\right\},\qquad V=\{(ua,vb,c)|a,b,c\in\mathbb{Q}\}.$$

Pe mulţimea M definim operaţia de înmulţire a matricelor, iar pe mulţimea V considerăm adunarea vectorilor. Demonstraţi că $(M,\cdot)$ şi $(V,+)$ sunt grupuri comutative izomorfe.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XII.162. Let $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ be a continuous differentiable function. Prove that $\displaystyle\int_0^x (f(t)+\sin^2 t\cdot f'(t))dt\geq f(x)\cdot\sin^2 x,\ \forall x\geq 0.$

Zdravko Starc, Vrsac, Serbia

XII.163. Determinaţi funcţia derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă $f(0)=1$, $f'(0)=0$ şi $2f-f'\in\displaystyle\int f(x)dx$.

Ovidiu Pop, Satu-Mare

XII.164. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f(x)f(1-x)\geq\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx,\quad\forall x\in[0,1]$. Demonstraţi că funcţia f nu poate fi injectivă.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XII.165. Calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{(-1)^{[\sqrt{x}]}}{x^2}dx.$

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G286. Definim mulţimile $(A_n)_{n\geq 0}$ astfel: $A_0=\{1,2,\ldots,2015\}$; A_1 se obţine înlocuind fiecare element al lui A_0 cu suma tuturor celorlalte elemente ale lui A_0; A_2 se obţine înlocuind fiecare element al lui A_1 cu suma tuturor celorlate elemente ale lui A_1 ş.a.m.d. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, arătaţi că nu există elemente în A_n care să fie congruente modulo 2016.

Vlad Tuchiluş, elev, Iaşi

G287. Avem un număr nemărginit de jetoane de opt culori. Stabiliţi care este cel mai mic număr de jetoane care trebuie aşezate în rând astfel încât, pentru oricare două culori diferite, să se găsească în rând două jetoane vecine având aceste culori.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G288. Fie a, b, c numere naturale nenule astfel încât $3ab = 2c^2$. Arătaţi că numărul $a^3 + b^3 + c^3$ este compus.

Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti

G289. Fie a, b, c, x, y, z numere reale pozitive astfel încât $a+b+c = 3$. Demonstraţi că

$$36\left(\frac{x^3}{(a+b)^2} + \frac{y^3}{(b+c)^2} + \frac{z^3}{(c+a)^2}\right) \geq (x+y+z)^3.$$

Robert Antohi, elev, Iaşi

G290. Fie x, y, z, n numere reale cu $x, y, z \geq 1$ şi $n > 1$, astfel încât $x^2+y^2+z^2 = n^2 + 2$. Arătaţi că $x + y + z \geq n + 2$.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

G291. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} + \frac{ab+bc+ca}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{4}{3}.$$

Mircea Lascu şi Marius Stănean, Zalău

G292. Un triunghi ascuţitunghic ABC are proprietatea că suma distanţelor de la oricare punct din interiorul triunghiului la laturile acestuia este egală cu lungimea înălţimii din A. Demonstraţi că triunghiul este echilateral.

Petru Asaftei, Iaşi

G293. Cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ trec prin punctul M. Două drepte a şi b trec prin M şi taie a doua oară cercurile în A_1 şi A_2, respectiv în B_1 şi B_2. Dacă $MA_1 = A_1A_2$ şi $MB_1 = B_1B_2$, arătaţi că cercurile sunt tangente în M şi $r_2 = 2r_1$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

G294. Pe laturile BC şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M respectiv D şi fie $\{F\} = BD \cap AM$. Paralela prin F la BC taie AC în punctul E. Dacă $\dfrac{1}{DE} = \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{CE} + \dfrac{1}{AC}$, arătaţi că M este mijlocul lui BC.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G295. Fie triunghiul ABC şi punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ şi $C_1 \in AB$ astfel încât dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 să fie concurente. Punctele X, Y şi Z reprezintă intersecţiile dreptelor AP, BP şi CP cu segmentele (B_1C_1), (A_1C_1) respectiv (A_1B_1), unde P este un punct fixat în interiorul triunghiului ABC. Demonstraţi că dreptele A_1X, B_1Y şi C_1Z sunt concurente.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

B. Nivel liceal

L286. Fie ABC un triunghi în care unghiul $\widehat{A}$ este cel mai mare şi punctele $D_1, D_2 \in (BC)$ astfel încât $\widehat{BAD_1} \equiv \widehat{ACB}$ şi $\widehat{CAD_2} \equiv \widehat{ABC}$. Dacă r este raza cercului înscris în $\triangle ABC$ şi ρ este raza cercului circumscris $\triangle AI_1I_2$ (unde I_1, I_2 sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD_2, respectiv ACD_1), demonstraţi că $r = 2\rho \sin^2 \dfrac{A}{2}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

L287. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC. Notăm cu S' punctul lui Spieker al triunghiului $A'B'C'$. Dreptele AS', BS', CS' intersectează laturile BC, CA, AB în punctele M, N, respectiv P. Să se demonstreze că perpendicularele în punctele M, N, P pe laturile BC, CA, respectiv AB sunt concurente dacă şi numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

Nela Ciceu, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

L288. Dacă într-un triunghi neisoscel dreapta determinată de punctul lui Lemoine şi centrul cercului lui Euler este paralelă cu o latură a triunghiului, atunci triunghiul este dreptunghic.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L289. Construim şirul de triunghiuri $A_nB_nC_n$, $n \in \mathbb{N}$, astfel: $\triangle A_0B_0C_0$ este arbitrar ales; vârfurile triunghiului $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ sunt punctele în care medianele $\triangle A_kB_kC_k$ intersectează cercul circumscris acestuia, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Dacă în şirul astfel definit există două triunghiuri congruente, arătaţi că $\triangle A_0B_0C_0$ este echilateral.

Vasile Jiglău, Arad

L290. Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal care este atât inscriptibil, cât şi circumscriptibil; fie r, R raza cercului înscris, respectiv raza cercului circumscris. Dacă $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ şi $f = BD$, demonstraţi că

$$\frac{3R^2}{r^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{e}{f} + \frac{f}{e}.$$

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L291. Notăm cu a numărul fracţiilor zecimale finite care se scriu, în formă ordinară, ca fracţii de tipul $\dfrac{1}{x}$, unde x este număr natural de n cifre (în baza 10). Demonstraţi că $4n + 1 \leq a \leq 6n + 1$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

L292. Fie $(F_n)_{n\geq 0}$ şirul lui Fibonacci şi $(L_n)_{n\geq 0}$ şirul lui Lucas, definite prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, respectiv $L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $p, j \in \mathbb{N}^*$ sunt oarecare, demonstraţi că:

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{F_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{F_{2n+j}^p}; \quad b)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{L_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{L_{2n+j}^p}.$$

Nicuşor Zlota, Focşani

L293. Fie $a_1, \ldots, a_n \in (0, 1]$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - a_k)^2}{a_k} \leq \frac{(1 - \prod_{k=1}^{n} a_k)^2}{\prod_{k=1}^{n} a_k}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L294. Să se arate că, pentru orice numere pozitive a, b, c, are loc inegalitatea: $a^3 + b^3 + c^3 - \sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq \frac{1}{2}|(a-b)(b-c)(c-a)|$.

Marian Tetiva, Bârlad

L295. Determinaţi valoarea minimă a numărului real pozitiv k, încât pentru orice numere reale pozitive a, b, c să aibă loc inegalitatea:

$$\sum \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2} + k\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq k + 2.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Training problems for mathematical contests

A. Junior highscool level

G286. The sets $(A_n)_{n \geq 0}$ are defined as follows: $A_0 = \{1, 2, \ldots, 2015\}$; A_1 is obtained after replacing each element of A_0 by the sum of all the other elements of A_0; similarly, A_2 is obtained by replacing each element of A_1 by the sum of all the other elements of A_1 and so on. If $n \in \mathbb{N}^*$, show that no elements being congruent modulo 2016 exist in A_n

Vlad Tuchiluş, pupil, Iaşi

G287. We have an infinite number of counters in eight colours. Establish which is the least number of counters that have to be arranged in a row so that, for any couple of distinct colours, two neighbor counters having these two colours to be found in the row.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G288. Let a, b, c be natural numbers such that $3\,a\,b = 2\,c^2$. Show that the number $a^3 + b^3 + c^3$ is a composite number.

Lucian Tuţescu, Craiova and Marian Voinea, Bucureşti

G289. Let a, b, c, x, y, z be positive real numbers such that $a + b + c = 3$. Show that

$$36\left(\frac{x^3}{(a+b)^2} + \frac{y^3}{(b+c)^2} + \frac{z^3}{(c+a)^2}\right) \geq (x + y + z)^3.$$

Robert Antohi, pupil, Iaşi

G290. Let x, y, z, n be real numbers with $x, y, z \geq 1$ and $n > 1$, such that $x^2 + y^2 + z^2 = n^2 + 2$. Show that $x + y + z \geq n + 2$.

Titu Zvonaru, Comăneşti and Bogdan Ioniţă, Bucureşti

G291. If a, b, c are positive real numbers, show that

$$\frac{a}{2b + c} + \frac{b}{2c + a} + \frac{c}{2a + b} + \frac{ab + bc + ca}{3(a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{4}{3}.$$

Mircea Lascu and Marius Stănean, Zalău

G292. An acute-angle triangle ABC has the property that the sum of distances from any interior point of the triangle to the three sides equals the length of the altitude from A. Prove that the triangle is equilateral.

Petru Asaftei, Iaşi

G293. The circles $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ and $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ pass through the point M and cut the circles, for the second time, at the points A_1 and A_2, (respectively) at B_1 and B_2. If $MA_1 = A_1A_2$ and $MB_1 = B_1B_2$, show that the circles are tangent at M and $r_2 = 2r_1$.

Romanţa Ghiţă and Ioan Ghiţă, Blaj

G294. The points M and respectively D are considered on the sides BC and AC of the triangle ABC, and let $\{F\} = BD \cap AM$. The parallel through F to BC cuts AC at the point E. If $\dfrac{1}{DE} = \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{CE} + \dfrac{1}{AC}$, show that M is the midpoint of BC.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G295. Let us consider the triangle ABC and the points $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ and $C_1 \in AB$ so that the lines AA_1, BB_1 and CC_1 be concurrent. The points X, Y and Z represent the intersections of the lines AP, BP and CP with the segments (B_1C_1), (A_1C_1) and respectively (A_1B_1), where P is a fixed point in the interior of the triangle ABC. Show that the lines A_1X, B_1Y and C_1Z are concurrent.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

B. Highschool level

L286. Let ABC be a triangle with its largest angle $\widehat{A}$ and the points $D_1, D_2 \in (BC)$ such that $\widehat{BAD_1} \equiv \widehat{ACB}$ and $\widehat{CAD_2} \equiv \widehat{ABC}$. If r is the radius of the incircle of $\triangle ABC$ and ρ is the radius of the circumcircle of $\triangle AI_1I_2$ (where I_1, I_2 are the centres of the circles inscribed in the triangles ABD_2, respectively ACD_1), prove that $r = 2\rho \sin^2 \dfrac{A}{2}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

L287. Let A', B', C' be the midpoints of the sides of the triangle ABC. Let S' denote the Spieker point of the triangle $A'B'C'$. The lines AS', BS', CS' cut the sides BC, CA, AB at the points M, N, and respectively P. Prove that the perpendicular lines at the points M, N, P on the sides BC, CA and respectively AB are concurrent if and only if the triangle is isosceles.

Nela Ciceu, Bacău and Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

L288. If, in a non-isosceles triangle, the straight line determined by Lemoine′s point and the centre of Euler′s circle is parallel to a side of the triangle, then the triangle is right-angled.

Titu Zvonaru, Comăneşti and Neculai Stanciu, Buzău

L289. We build the sequence of triangles $A_nB_nC_n$, $n \in \mathbb{N}$, as follows: $\triangle A_0B_0C_0$ is arbitrarily chosen; the vertices of the triangle $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ are the points at which the medians of $\triangle A_kB_kC_k$ intersect the circumcircle of this triangle, for any $k \in \mathbb{N}$. If two congruent triangles exist in the sequence defined in this way, show that

$\triangle A_0B_0C_0$ is equilateral.

Vasile Jiglău, Arad

L290. Let $ABCD$ be an orthodiagonal quadrilateral which is both inscribable and circumscribable. Let r, R be the radii of the inscribed and respectively circumscribed circles. If $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ and $f = BD$, prove that

$$\frac{3R^2}{r^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{e}{f} + \frac{f}{e}.$$

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L291. Denote by a the number of finite decimal fractions that are written, in ordinary form, as fractions of type $\frac{1}{x}$ (unit fractions) where x is a natural number of n digits (in base 10). Prove that $4n + 1 \leq a \leq 6n + 1$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

L292. Let $(F_n)_{n\geq 0}$ be Fibonacci′s sequence and $(L_n)_{n\geq 0}$ be Lucas′ sequence, defined by $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, respectively $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. If p, $j \in \mathbb{N}^*$ are arbitrary, show that

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{F_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{F_{2n+j}^p};\quad b)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{L_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{L_{2n+j}^p};$$

Nicuşor Zlota, Focşani

L293. Let $a_1, \ldots, a_n \in (0, 1]$. Show that the following inequality holds:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - a_k)^2}{a_k} \leq \frac{(1 - \prod_{k=1}^{n} a_k)^2}{\prod_{k=1}^{n} a_k}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L294. Show that any positive numbers a, b, c satisfy the inequality

$$a^3 + b^3 + c^3 - \sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}|(a - b)(b - c)(c - a)|.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L295. Determine the minimum value of the positive real number k so that any positive real numbers a, b, c satisfy the inequality

$$\sum \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2} + k\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq k + 2.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Pagina rezolvitorilor

CÂMPULUNG MUSCEL

Colegiul Naţional ,,Dinicu Golescu". **Clasa a XII-a** (prof. PETRIŞOR Constantin). NECULA Emanuel: XI(156-159), XII(156-158,160).

CRAIOVA

Colegiul Naţional ,,Fraţii Buzeşti". **Clasa a X-a** (prof. TUŢESCU Lucian). GURIŢĂ Vladimir: VIII.191, IX(157,158), X(156,158,159), XI.158; JIANU Ştefania: VIII.191, X.159, XI(156-158); NICOLAESCU Eugeniu: VIII.191, IX.158, X(158,159), XI.158; PĂTRAŞCU Cristian: VIII(191,192), IX.158, X.159, XI.158, G(278,279); SPĂTARU Andrei Paul: VIII(191,192), IX.158, X.159, XI.158, G(278,279); **Clasa a XI-a** (prof. TUŢESCU Lucian). TURCU Andrei George: X(157,159), XI(156-160).

IAŞI

Şcoala nr. 3 ,,Al. Vlahuţă". **Clasa a III-a** (prof.înv.primar MAXIM Gabriela). BARGAN Giulia: P(311,314,315,317,318); OBREJA Alexia: P(311-315). **Clasa a V-a** (prof. MARIN Mirela). ANDREI Andreea: P(322,323,324), V(186,188), VI.186; CRĂCIUN Teodora: P(322,323,324), V(186,188), VI.186; MACOVEI Răzvan: P(322, 323,324), V(186,188), VI.186.

Şcoala nr. 26 ,,George Coşbuc". **Clasa a II-a** (prof.înv.primar RACU Maria). ALUCĂI Denisa: P(311-315,317); GALIA Bogdan-Andrei: P(311-317); HUŢAN Adela: P(311-316); NASTASE Adrian: P(311-315); PICHIU Alexia: P(311-315,317); POPESCU Alexandra: P(311-313,315-317); SAMSON David: P(311-316); SCOBAN Dana-Ilinca: P(311-315,317); SZTANKAI-CRISTOF Erika: P(311-317). **Clasa a II - a** (înv. ZMĂU Cecilia). CALISTRAT Robert: P(313-317); CRISTEA Robert-Andrei: P(313-317); ENCIU Delia: P(313-317); GALAN Matei: P(313-317); GOSPODARIU Astrid: P(313-317); NEAGU Alexia-Iulia: P(313-317); PUIU Andreea-Cosmina: P(313-317); TÂRZIANU Ana-Maria: P(313-317). **Clasa a II-a** (prof.înv.primar COŞUG Doina). ACATRINEI Victor: P(312-316); AFRĂSINEI Raul: P(312-316); ANTON Jasmina: P(312-316). **Clasa a VI-a** (prof. MOMIŢĂ Viorica). CIOPEICĂ Sebastian Andrei: P322, V(186,188,191), VI(186,188); DURACU Mădălina-Elena: P322, V(186,188,191), VI(186,188); MANOLE Alexandra-Georgiana: P322, V(186,188,191), VI(186,188); RĂILEANU Ana Maria: P322, V(186, 188,191), VI(186, 188); VASILE Raluca-Andreea: P322, V(186,188,191), VI(186,188).

Liceul Economic ,,Virgil Madgearu". **Clasa a IX-a** (prof. OLENIUC Claudia). ALBU Cătălina Simona: VII(186,187,189,192), VIII.187; CANSCHI Cătălina-Gabriela: VII(186,187,189), VIII(187,189); GĂINARIU Loriana: VII(186,187,189,192), VIII.187; LASCARACHI Petronela: VII(186,187,189), VIII(187,192); PAVEL Andreea: VII(186,187,189), VIII(187,192). **Clasa a X-a** (prof. OLENIUC Claudia). BABII Paula Georgiana: VIII(187,191,192), X(156,158); COSTĂCHESCU Andreea: VIII(187,191,192), X(156,158); COTEŢ Violeta: VIII(187,191,192), X(156,158); DIDILESCU Cătălina Mihaela: VIII(187,191,192), X(156,158); GĂINĂ Mădălina: VIII(187,191,192), X(156,158); IRIMIA Livia Maria: VIII(187,191,192), X(156,158);

MIRON Raluca-Elena: VIII(187,191,192), X(156,158); NEDELCU Iulia: VIII(187,191, 192), X(156,158).

Colegiul Naţional ,,Emil Racoviţă". **Clasa a VII-a** (prof. TURBATU Doru). OLENIUC Iulian: VII(186,187,189,192), VIII(187,192).

Colegiul Naţional Iaşi. **Clasa a V-a** (prof. POPA Gabriel). CIOCOIU Alexandru Boris: V(186-192), VI(186-190); **Clasa a IX-a** (prof. POPA Gabriel). ANUŞCĂ-POPA Armand: VII.192, VIII(186-192), IX(157-159); AŞTEFANEI Cosmin: VII.192, VIII(186-192), IX(157-159); OBADĂ Ştefan: VII.192, VIII(186-192), IX(157-159).

ROŞIORI (BACĂU)

Şcoala Gimnazială nr. 1. **Clasa a VI-a** (prof. CICEU Nela). PLOŞNIŢĂ Daniel-Cătălin: V(189-191), VI(188,189,192), VII.186; ROMAN Vasile: V(186,188,191), VI(187,189,192), VII.186. **Clasa a VII-a** (prof. CICEU Nela). HÎRŢESCU Ciprian: VI(189,192), VII(186-189,191), VIII(187,189).

TRUŞEŞTI (BOTOŞANI)

Grup Şcolar ,,Demostene Botez". **Clasa a IX-a** (prof. CULIDIUC Cătălin). PĂUCĂ Georgiana-Sânziana: VII.187, VIII(187,188,191), G.279. **Clasa a X-a** (prof. CULIDIUC Cătălin). HĂLĂUCĂ Andrei: VIII(188,191,192), X(156,158).

Elevi rezolvitori premiaţi

Şcoala Gimnazială nr. 1, Roşiori (Bacău)

ROMAN Vasile (cl. a VI-a): 2/2014(7p), 1/2015(6p), 2/2015(6p).

Grup Şcolar ,,Demostene Botez", Truşeşti (Botoşani)
HĂLĂUCĂ Andrei (cl. a X-a): 2/2014(6p), 1/2015(5p), 2/2015(5p).

Şcoala nr. 3 ,,Al. Vlahuţă", Iaşi
OBREJA Alexia (cl. a III-a): 2/2014(7p), 1/2015(5p), 2/2015(5p).

Şcoala nr. 26 ,,George Coşbuc", Iaşi
DURACU Mădălina-Elena (cl. a VI-a): 2/2014(6p), 1/2015(6p), 2/2015(5p).

Liceul Economic ,,Virgil Madgearu", Iaşi
BABII Paula Georgiana (cl. a X-a): 2/2014(5p), 1/2015(5p), 2/2015(5p).
COTEŢ Violeta (cl. a X-a): 2/2014(5p), 1/2015(6p), 2/2015(5p).
GĂINĂ Mădălina (cl. a X-a): 2/2014(5p), 1/2015(6p), 2/2015(5p).
NEDELCU Iulia (cl. a X-a): 2/2014(5p), 1/2015(5p), 2/2015(5p).

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co.uk** . Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după jumătate de an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.

Vizitaţi pagina web a revistei **Recreaţii Matematice**:

http://www.recreatiimatematice.ro

unde aveţi acces liber la toate numerele revistei.

Revista semestrială **RECREAŢII MATEMATICE** este editată de **ASOCIAŢIA „RECREAŢII MATEMATICE”**. Apare la datele de 1 martie şi 1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenţilor şi tuturor celor pasionaţi de matematica elementară.

În atenţia tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacţiei spre publicare (note şi articole, chestiuni de metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi concis; ele trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se recomandă ca textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie originale şi să nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.** Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie însoţite de fişierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunţ şi demonstraţie/ rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoţite de numele autorului, şcoala şi localitatea unde lucrează/învaţă.

Redacţia va decide asupra oportunităţii publicării materialelor primite.

În atenţia elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacţiei soluţii corecte la problemele din rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregătirea concursurilor** vor fi menţionate în **Pagina rezolvitorilor**. Elevii menţionaţi de trei ori vor primi o **diplomă** şi un **premiu în cărţi**. Elevii rezolvitori vor ţine seama de regulile:

1. Pot trimite soluţii la **minimum cinci probleme propuse în numărul prezent al revistei** (pe o foaie va fi redactată o singură problemă).

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluţii la problemele propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase mai mici şi imediat anterioare. Cei din clasa a **V**-a pot trimite soluţii la problemele propuse pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor **I-IV** pot trimite soluţii la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi orice clasă mai mare. Orice elev poate trimite soluţii la problemele de concurs (tip **G** şi **L**).

3. Vor fi menţionate următoarele date personale: numele şi prenumele, clasa, şcoala şi localitatea, precum şi numele profesorului cu care învaţă.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau va fi adus direct) la adresa Redacţiei:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: t_birsan@yahoo.com

CUPRINS

ARTICOLE ŞI NOTE

NOTA ELEVULUI

CORESPONDENŢE

CHESTIUNI METODICE

CUM CONCEPEM ... CUM REZOLVĂM

ŞCOLI ŞI DASCĂLI

CONCURSURI ŞI EXAMENE

PROBLEME ŞI SOLUŢII

ISSN 1582 – 1765 **10 lei**

9 771582 176513