

Anul XVI, Nr. 2

Iulie – Decembrie 2014

RECREAȚII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

$$e^{i\pi} = -1$$

Asociația „Recreații Matematice”
IAȘI – 2014

Semnificația formulei de pe copertă. Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fundamentale ale matematicii: *ARITMETICA* - reprezentată de 1; *GEOMETRIA* – reprezentată de π ; *ALGEBRA* – reprezentată de i ; *ANALIZA MATEMATICĂ* – reprezentată de e .

Membri onorifici :

Acad. Constantin CORDUNEANU
Prof.univ. Vasile OPROIU

Acad. Radu MIRON
Cercet.pr. Dan TIBA

Redactor șef : Temistocle BÎRSAN

Redactori principali : Gabriel POPA, Gheorghe IUREA,
Petru ASAFTEI, Maria RACU

Comitetul de redacție :

Alexandru CĂRĂUȘU
Constantin CHIRILĂ
Eugenia COHAL
Adrian CORDUNEANU
Mihai CRĂCIUN (Pașcani)

Paraschiva GALIA
Paul GEORGESCU
Dan POPESCU (Suceava)
Neculai ROMAN (Mірcești)
Ioan ȘERDEAN (Orăștie)

Marian TETIVA (Bârlad)
Lucian TUȚESCU (Craiova)
Adrian ZANOSCHI
Titu ZVONARU (Comănești)

Materialele vor fi trimise la una dintre adresele: t-birsan@yahoo.com , profpopa@yahoo.co.uk

COPYRIGHT © 2008, ASOCIAȚIA “RECREAȚII MATEMATICE”

Toate drepturile aparțin Asociației “Recreații Matematice”. Reproducerea integrală sau parțială a textului sau a ilustrațiilor din această revistă este posibilă numai cu acordul prealabil scris al acesteia.

TIPĂRITĂ LA BLUE SIM&Co IAȘI

Bd. Carol I, nr. 3-5

Tel. 0332 111021, 0721 571705; e-mail: simonaslf@yahoo.com

ISSN 1582 – 1765

Anul XVI, Nr. 2

Iulie – Decembrie 2014

RECREAȚII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

$$e^{i\pi} = -1$$

Revistă cu apariție semestrială

EDITURA „RECREAȚII MATEMATICE”

IAȘI - 2014

Revedere la 50 de ani de la absolvire

Aula Magna a Universității „Al. I. Cuza” a fost locul în care, la 27 mai 2014, promoția 1959-1964 a Facultății de Matematică-Mecanică a celebrat *50 de ani de la absolvire*.

Festivitatea a fost onorată de prezența în aulă a Rectorului Universității, *prof. dr. Vasile Ișan*, a Decanului Facultății de Matematică-Mecanică, *prof. dr. Cătălin Lefter*, a acad. *prof. dr. Radu Miron*, unul dintre profesorii noștri, și din partea Facultății de Fizică a *prof. dr. Margareta Ignat*, profesor al nostru în structura de atunci a facultății. Presa locală, prezentă și ea în aulă, a făcut cunoscut evenimentul publicului ieșean prin ample relatări însoțite de imagini.

În momentul absolvirii, Facultatea de Matematică-Mecanică era structurată în secțiile: matematică (4 grupe) și matematică-fizică (5 grupe), iar durata studiilor era de 5 ani. În anul 1959, în momentul admiterii în facultate, matematica și fizica erau reunite într-o unică facultate, numită Facultatea de Matematică și Fizică, care avea patru secții: matematică, fizică, matematică-fizică (secundar) și fizică-chimie (secundar). Din cei 173 absolvenți de atunci ai facultății, au fost prezenți la festivitate 93, un număr de 37 fiind plecați definitiv dintre noi. Nu întâmplător, la această revedere s-au alăturat și mai mulți absolvenți ai Facultății de Fizică din aceeași promoție, foști colegi din primii ani de studii. Revederile sunt pentru noi o tradiție; ne-am mai întâlnit în anii 1974, 1984, 1989 și 2010.

Datorită strădaniei noastre, dar mai ales datorită excelențelor noștri profesori ale căror cursuri și seminarii le-am urmat, seria noastră a fost numită „*Promoția de aur 1959-1964*”, ca o consecință a rezultatelor foarte bune din timpul facultății, cât și a celor ulterioare obținute pe parcursul practicării profesiei.

În cuvântul său, *prof. dr. Vasile Ișan*, rectorul Universității, felicită pe toți absolvenții promoției și ne numește „*Lorzi ai matematicii*”. Mai spune că nu a mai participat la un eveniment de acest fel atât de emoționant și adaugă: „*Universitatea trebuie să răspândească binele. Din experiența mea, am avut mereu impresia că Universitatea este ceva sublim. Ea trebuie să-și propună să caute adevărul, să cultive frumosul și să răspândească binele. De aceea se spune că este o instituție a sublimului sau a nobleței.*”

Acad. *prof. Radu Miron*, în cuvântul său, precum și în prefața la volumul *Alea jacta est* (editat de colegul *Siegmund Pluto*, Germania), justifică denumirea de *promoție de aur* ce ni s-a dat: „*Denumirea nu a fost atribuită întâmplător. Ea se justifică prin rezultatele de excepție obținute de membrii promoției în învățământ, cercetare și în societate. Un bilanț sumar arată că jumătate dintre absolvenți au fost reținuți în învățământul superior, au trecut doctoratul în științe și au ocupat succesiv toate treptele ierarhiei universitare, au condus doctorate și au ajuns în conducerea unor instituții de învățământ consacrate.*”

Cuvinte frumoase de apreciere și calde felicitări au fost adresate de decanul facultății, *prof. dr. Cătălin Lefter*, și de către *prof. dr. Margareta Ignat*, din partea Facultății de Fizică.

Apoi, un coleg de generație de la Facultatea de Fizică a ținut să exprime grațitudinea noastră față de profesorii și instituția în care ne-am format și să mărturisească

bucuria revederii cu colegii de facultate.

Dintre profesorii noștri, nume de prestigiu în matematica românească, care ne-au îndrumat și format ca viitori specialiști, amintesc doar pe câțiva: acad. *Mendel Haimovici*, acad. *Miron Radu*, acad. *Constantin Corduneanu*, *Gheorghe Gheorghiev*, *Ilie Popa*, *Adolf Haimovici*, *Tudora Luchian*, *Alexandru Climescu*, *Ion Creangă*, *Victor Nadolschi*, *Ioan Grindei*, *Dan Petrovanu*, *Neculai Gheorghiu* și mulți alții.

În volumul jubiliar *Seminarul Matematic „Alexandru Myller, 100 de ani de existență”* (coordonator *Gh. Aniculăesei*), apărut în 2010, un paragraf este dedicat promoției noastre, în care sunt menționați mai mulți colegi care au fost repartizați în Iași la Facultatea de Matematică-Mecanică a Universității, Institutul de Matematică sau la Institutul Politehnic „Gh. Asachi”. Amintim pe câțiva dintre ei: *Viorel Barbu*, *Octavian Nanu*, *Vasile Oproiu*, *Ioan Pop*, *Mirela Ștefănescu*, *Constantin Ilioi*, *Gheorghe Ciobanu*, *Brânzei Dan*, *Ioan Ibănescu* și alții. Au fost și mulți repartizați în alte orașe la universități, institute de cercetare sau centre de calcul.

Neîndoielnic, ca vârf al promoției este colegul nostru *Viorel Barbu*, membru titular al Academiei Române din 1993, membru al Academiei Europene de Științe din 2008, doctor honoris causa al Universității din Nebraska, membru de onoare al Academiei de Științe a Republicii Moldova, profesor de onoare al Universității din Wuhan (China) etc. Acad. *Viorel Barbu* este autorul unui număr impresionant de monografii și articole de specialitate, a participat la numeroase congrese și conferințe internaționale, a fost profesor vizitator în multe țări, este profesor și conducător de doctorat al multor generații de studenți și cercetători, dintre care mulți sunt acum profesori și cercetători în universități de prestigiu din Europa și America. A fost decan al Facultății de Matematică-Mecanică din Iași, în perioada 1976-1981, rector al Universității „Al. I. Cuza”, 1981-1989, vicepreședinte al Academiei Române, 1998-2002, președinte al filialei Iași a Academiei Române, 2001-2012 etc., iar în prezent este președinte al Secției de Științe Matematice din Academia Română.

Nu putem aminti aici nici măcar în treacăt contribuțiile valoroase ale altor colegi și prestigiul de care se bucură în comunitatea matematicienilor, obținute prin muncă și pasiune pentru matematică.

Mult apreciată a fost inițiativa lui *Siegmund Pluto* de a strânge date despre colegii săi „care să constituie o prezentare a tuturor absolvenților, cu realizările fiecăruia, cu fotografii din 1964 și ulterioare, activitatea profesională, povești de viață, care să fie un mijloc de readucere în memorie a unor amintiri acum poate uitate” și care s-a materializat în volumul *Alea jacta est*, oferit la revederea noastră.

După câteva momente de discuții și propuneri privind întâlnirile viitoare, într-o atmosferă de bună dispoziție generală și entuziasm, prof. *Mioara Ieșan* – colega care și-a asumat sarcina organizării acestei revederi semicentenare – a anunțat încheierea părții festive.

Profesori și discipoli au coborât apoi din Aula Magna la treptele Universității – *Alma Mater Iassiensis* – pentru a fixa printr-o fotografie de grup momentul aniversar.

Georgeta TEODORU
Univ. Tehnică „Gh. Asachi” Iași

Some Properties of the Harmonic Quadrilateral¹

Ion PĂTRAȘCU², Florentin SMARANDACHE³

Abstract. In this article, we review some properties of the harmonic quadrilateral related to triangle simedians and to Apollonius circles.

Keywords: harmonic quadrilateral, simedian, Apollonius circle.

MSC 2010: 51M04.

Definition 1. A convex quadrilateral $ABCD$ admitting a circumcircle and having the property $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ is called a *harmonic quadrilateral*.

Definition 2. A *triangle simedian* is the isogonal cevian of a triangle median.

Proposition 1. In the triangle ABC , the cevian AA_1 , $A_1 \in (BC)$, is a simedian if and only if $\frac{BA_1}{A_1C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Proposition 2. In an harmonic quadrilateral, the diagonals are simedians of the triangles determined by two consecutive sides of a quadrilateral with its diagonal.

Proof. Let $ABCD$ be an harmonic quadrilateral and $\{K\} = AC \cap BD$ (Fig. 1). We prove that BK is simedian in the triangle ABC . From the similarity of the triangles ABK and DCK , we find that

$$(1) \quad \frac{AB}{DC} = \frac{AK}{DK} = \frac{BK}{CK}.$$

From the similarity of the triangles BCK și ADK , we conclude that

$$(2) \quad \frac{BC}{AD} = \frac{CK}{DK} = \frac{BK}{AK}.$$

From the relations (1) and (2), by division, it follows that

$$(3) \quad \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AD}{DC} = \frac{AK}{CK}.$$

But $ABCD$ is an harmonic quadrilateral; consequently,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC};$$

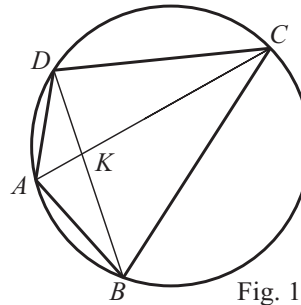


Fig. 1

¹See also **A. Reisner** - *Quadrangle harmonique et nombres complexes*, this journal, 1/2014, 35-39.

²National College „Frații Buzești”, Craiova, Romania; e-mail: patrascu_ion@yahoo.com

³University of New Mexico, USA; e-mail: fsmarandache@gmail.com

substituting this relation in (3), it follows that

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AK}{CK};$$

as shown by Proposition 1, BK is a simedian in the triangle ABC . Similarly, it can be shown that AK is a simedian in the triangle ABD , that CK is a simedian in the triangle BCD , and that DK is a simedian in the triangle ADC .

Remark 1. The converse of the Proposition 2 is proved similarly, i.e. we have:

Proposition 3. *If in a convex quadrilateral admitting a circumcircle a diagonal is a simedian in the triangle formed by the other diagonal with two consecutive sides of the quadrilateral, then the quadrilateral is an harmonic quadrilateral.*

Remark 2. From Propositions 2 and 3 above, it results a simple way to build an harmonic quadrilateral. In a circle, let a triangle ABC be considered; we construct the simedian of A , be it AK , and we denote by D the intersection of the simedian AK with the circle. The quadrilateral $ABCD$ is an harmonic quadrilateral.

Proposition 4. *In a triangle ABC , the points of the simedian of A are situated at proportional distances to the sides AB and AC .*

Proof. We have the simedian AA_1 in the triangle ABC (Fig. 2). We denote by D and E the projections of A_1 on AB , and AC respectively. We get:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\text{Area}(\Delta ABA_1)}{\text{Area}(\Delta ACA_1)} = \frac{AB \cdot A_1D}{AC \cdot A_1E}.$$

Moreover, from Proposition 1, we know that $\frac{BA_1}{A_1C} =$

$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Substituting in the previous relation, we obtain that

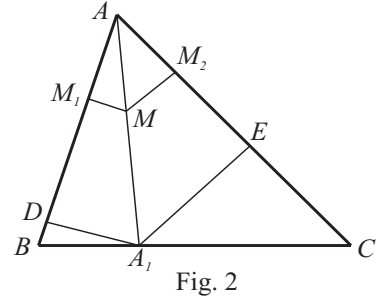
$$\frac{A_1D}{A_1E} = \frac{AB}{AC}.$$

On the other hand, $A_1D = AA_1 \cdot \sin \widehat{BAA_1}$ and $A_1E = AA_1 \cdot \sin \widehat{CAA_1}$, hence

$$(4) \quad \frac{A_1D}{A_1E} = \frac{\sin \widehat{BAA_1}}{\sin \widehat{CAA_1}} = \frac{AB}{AC}.$$

If M is a point on the simedian and MM_1 and MM_2 are its projections on AB , and AC respectively, we have: $MM_1 = AM \cdot \sin \widehat{BAA_1}$, $MM_2 = AM \cdot \sin \widehat{CAA_1}$, hence:

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{\sin \widehat{BAA_1}}{\sin \widehat{CAA_1}}.$$



Taking into account (4), we obtain that

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{AB}{AC}.$$

Remark 3. The converse of the property in the statement above is valid, meaning that, if M is a point inside a triangle, its distances to two sides are proportional to the lengths of these sides, then M the point belongs to the simedian of the triangle having the vertex joint to the two sides.

Proposition 5. In an harmonic quadrilateral, the point of intersection of the diagonals is located towards the sides of the quadrilateral to proportional distances to these sides.

The **Proof** of this statement relies on Propositions 2 and 4.

Proposition 6 (R. Tucker). The point of intersection of the diagonals of an harmonic quadrilateral minimizes the sum of squares of distances from a point inside the quadrilateral to the quadrilateral sides.

Proof. Let $ABCD$ be an harmonic quadrilateral and M any point within. We denote by x, y, z, u the distances of M to the AB, BC, CD, DA sides of lengths $a, b, c,$ and d (Fig. 3). Let S be the area of the quadrilateral $ABCD$. We have: $ax + by + cz + du = 2S$. Following Cauchy-Buniakowski-Schwarz Inequality, we get:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) (x^2 + y^2 + z^2 + u^2) \\ \geq (ax + by + cz + du)^2, \end{aligned}$$

and it is obvious that

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \geq \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

We note that the minimum sum of squared distances is $\frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = const.$ In Cauchy-Buniakowski-Schwarz Inequality, the equality occurs if

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}.$$

Since $\{K\} = AC \cap BD$ is the only point with this property, it ensues that $M = K$, so K has the property of the minimum in the statement.

Definition 3. We call *external simedian* of ABC triangle a cevian AA'_1 corresponding to the vertex A , where A' is the harmonic conjugate of the point A_1 – simedian's foot from A relative to points B and C .

Remark 4. In Fig. 4, the cevian AA_1 is an internal simedian, and AA'_1 is an

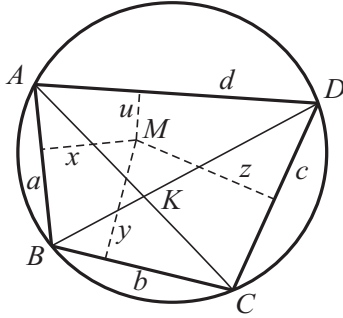


Fig. 3

external simedian.

We have $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'_1B}{A'_1C}$. In view of Proposition 1, we get that

$$\frac{A'_1B}{A'_1C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

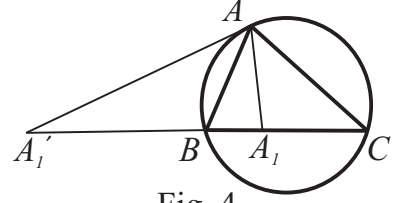


Fig. 4

Proposition 7. *The tangents taken to the extremes of a diagonal of a circle circumscribed to the harmonic quadrilateral intersect on the other diagonal.*

Proof. Let P be the intersection of a tangent taken in D to the circle circumscribed to the harmonic quadrilateral $ABCD$ with AC (Fig. 5). Since triangles PDC and PAD are alike, we conclude that:

$$(5) \quad \frac{PD}{PA} = \frac{PC}{PD} = \frac{DC}{AD}.$$

From relations (5), we find that:

$$(6) \quad \frac{PA}{PC} = \left(\frac{AD}{DC}\right)^2.$$

This relationship indicates that P is the harmonic conjugate of K with respect to A and C , so DP is an external simedian from D of the triangle ADC .

Similarly, if we denote by P' the intersection of the tangent taken in B to the circle circumscribed with AC , we get:

$$(7) \quad \frac{P'A}{P'C} = \left(\frac{BA}{BC}\right)^2.$$

From (6) and (7), as well as from the properties of the harmonic quadrilateral, we know that $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, which means that $\frac{PA}{PC} = \frac{P'A}{P'C}$, hence $P = P'$.

Similarly, it is shown that the tangents taken to A and C intersect at point Q located on the diagonal BD .

Remark 5. 1) The points P and Q are the diagonal poles of BD and AC in relation to the circle circumscribed to the quadrilateral.

2) From the previous proposition, it follows that in a triangle the internal simedian of an angle is consecutive to the external simedians of the other two angles.

Proposition 8. *Let $ABCD$ be an harmonic quadrilateral inscribed in the circle of center O and let P and Q be the intersections of the tangents taken in B and D , respectively in A and C to the circle circumscribed to the quadrilateral. If $\{K\} = AC \cap BD$, then the orthocenter of triangle PKQ is O .*

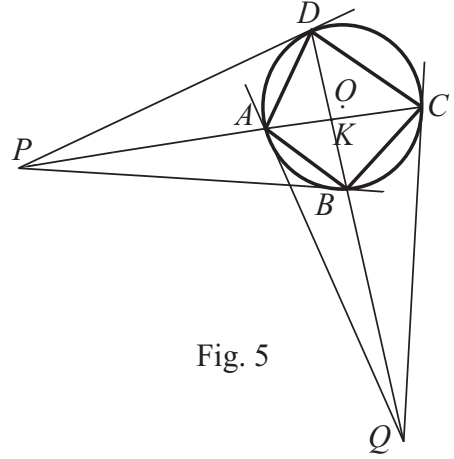


Fig. 5

Proof. From the properties of tangents taken from a point to a circle, we conclude that $PO \perp BD$ and $QO \perp AC$. These relations show that in the triangle PKQ , PO and QO are heights, so O is the orthocenter of this triangle.

Definition 4. The *Apollonius circle* related to the vertex A of the triangle ABC is the circle built on the segment $[DE]$ in diameter, where D and E are the feet of the internal, respectively, external bisectors taken from A to the triangle ABC .

If the triangle ABC is isosceles with $AB = AC$, the Apollonius circle corresponding to vertex A is not defined.

Proposition 9. *The Apollonius circle relative to the vertex A of the triangle ABC has as center the feet of the external simedian taken from A .*

Proof. Let O_a be the intersection of the external simedian of the triangle ABC with BC (Fig. 6). Assuming that $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$, we find that $m(\widehat{EAB}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})]$. O_aA being a tangent, we find that $m(\widehat{O_aAB}) = m(\widehat{C})$. From, $m(\widehat{EAO_a}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})]$ and $m(\widehat{AEO_a}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})]$ it results that $O_aE = O_aA$; onward, EAD being a right angled triangle, we obtain $O_aA = O_aD$, hence O_a is the center of Apollonius circle corresponding to the vertex A .

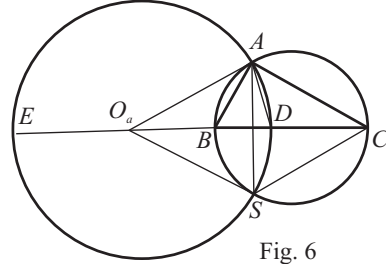


Fig. 6

Proposition 10. *Apollonius circle relative to the vertex A of the triangle ABC cuts the circle circumscribed to the triangle following the internal simedian taken from A .*

Proof. Let S be the second point of intersection of Apollonius circles relative to vertex A and the circle circumscribed to the triangle ABC . Because O_aA is tangent in A to the circle circumscribed, it results, for reasons of symmetry, that O_aS will be tangent in S to the circumscribed circle.

For triangle ACS , O_aA and O_aS are external simedians; it results that CO_a is an internal simedian in the triangle ACS , furthermore, it results that the quadrilateral $ABSC$ is a harmonic quadrilateral. Consequently, AS is the internal simedian of the triangle ABC and the property is proven.

Remark 6. From this, in view of Fig. 5, it results that the circle of center Q passing through A and C is an Apollonius circle relative to the vertex A for the triangle ABD . This circle (of center Q and radius QC) is also an Apollonius circle relative to the vertex C of the triangle BCD .

Similarly, the Apollonius circles corresponding to vertexes B and D and to the triangles ABC , and ADC respectively, coincide.

Proposition 11. *In an harmonic quadrilateral, the Apollonius circles - associated with the vertexes of a diagonal and to the triangles determined by those vertexes to the other diagonal - coincide. Radical axis of the Apollonius circles is the right determined*

by the center of the circle circumscribed to the harmonic quadrilateral and by the intersection of its diagonals.

Proof. Referring to Fig. 5, we observe that the power of O towards the Apollonius circles relative to vertexes B and C of triangles ABC and BCU is $OB^2 = OC^2$. So O belongs to the radical axis of the circles.

We also have $KA \cdot KC = KB \cdot KD$, relatives indicating that the point K has equal powers towards the highlighted Apollonius circles.

Bibliografie

1. **R.A. Johnson** – *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, USA, 2007.
2. **F. Smarandache, I. Pătrașcu** – *The Geometry of Homological Triangles*, The Education Publisher, Inc. Columbus, Ohio, USA, 2012.
3. **F. Smarandache, I. Pătrașcu** – *Variance on Topics of plane Geometry*, The Education Publisher, Inc. Columbus, Ohio, USA, 2013.

Al doilea autor va împlini în curând 60 de ani. Redacția revistei folosește acest prilej pentru a-i ura „MULȚI ANI !”, trăiți în sănătate, cu bucurii și noi și remarcabile succese. Dintr-un material amplu primit de redacție, selectăm un număr de aspecte care să dea contur personalității sale atipice, caracterizată prin energie explozivă, creativitate, diversitatea domeniilor abordate, prolificitate.

Florentin Smarandache s-a născut la 10 decembrie 1954 în Bălcești, jud. Vâlcea. Studiile, de la clasele primare la cele superioare, le-a făcut în România. A absolvit în 1979 secția informatică a Facultății de Științe a Universității din Craiova, ca șef de promoție.

În 1988 emigrează din motive politice. Din anul 2008 ocupă o poziție de profesor universitar la University of New Mexico (Gallup). În 1997 obține titlul de doctor în matematici, în domeniul teoriei numerelor, la Universitatea de Stat din Chișinău.

Are contribuții în matematică (teoria numerelor, geometrie, logică), fizică, filozofie, literatură (poeme, nuvele, povestiri, un roman, piese de teatru, eseuri, traduceri, interviuri) și artă (experimente în desene, picturi, colaje, fotografii, artă pe calculator).

În matematică a introdus gradul de negare al unei axiome ori teoreme (vezi geometriile smarandache, care pot fi parțial euclidiene și parțial neeuclidiene), multi-structurile (vezi n-structurile smarandache, unde o structură mai slabă conține insule de structuri mai puternice) și multi-spațiile (combinații de spații heterogene). Lucrările sale de teoria numerelor s-au bucurat de o anumită popularitate, fiind preluate și dezvoltate de matematicieni români și străini din multe țări. A propus extinderea probabilităților clasice și imprecise la „probabilitate neutrosifică”, ca un vector tridimensional ale cărui componente sunt submulțimi ale intervalului ne-standard]-0,1+[. Împreună cu Jean Dezert extinde Teoria Dempster-Shafer la o nouă teorie de fuzionare a informației plauzibile și paradoxiste (numită Teoria Dezert-Smarandache).

În fizică a introdus paradoxuri cuantice și noțiunea de „nematerie”, formată din combinații de materie și antimaterie, ca o a treia formă posibilă de materie. A emis ipoteza că „nu există o barieră a vitezei în univers și se pot construi orice viteze”, pe baza căreia a propus o Teorie Absolută a relativității, care să nu producă dilatare a timpului sau contractare a spațiului.

În filozofie a introdus conceptul de „neutrosocie”, ca o generalizare a dialecticii lui Hegel, care stă la baza cercetărilor sale în matematică și economie, precum și „logica neutrosifică”, „mulțime neutrosifică”, „probabilitate neutrosifică”, „statistica neutrosifică”.

În literatură și artă a fondat în 1980 curentul de avangardă numit paradoxism, care constă în folosirea excesivă în creații a contradicțiilor, antitezelor, antinomiilor, oximoronilor, paradoxurilor. A fost nominalizat pentru premiul Nobel în literatură pe anul 2011.

O rafinare a unei inegalități a lui Z. Yun

Vasile JIGLĂU¹

Abstract. In this Note, the inequality (4) is established ; it offers a refinement of the inequalities (1) and (2).

Keywords: bicentric quadrilateral, circumcircle, incircle, Euler-like inequality.

MSC 2010: 51M04, 51M16.

Un *patrulater bicentric* $ABCD$ este un patrulater convex inscriptibil și circumscriptibil. Pentru astfel de patrulatere este binecunoscută următoarea formulă de tip Euler:

$$(1) \quad R \geq r\sqrt{2},$$

unde R, r notează razele cercurilor lor circumscris, respectiv înscris.

În [5], Zhang Yun stabilește inegalitatea

$$(2) \quad \frac{r\sqrt{2}}{R} \leq \frac{1}{2} \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2} + \sin \frac{D}{2} \sin \frac{A}{2} \right) \leq 1,$$

care reprezintă o rafinare a inegalității (1) (a se vedea și [2]).

La rândul ei, dubla inegalitate (2) poate fi rafinată. Acesta este scopul prezentei Note.

Vom începe prin a aminti câteva proprietăți ale patrulaterelor bicentrice, care vor fi utile mai jos (în mod obișnuit, $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA, e = AC, f = BD$, iar p, S —semiperimetrul, respectiv aria patrulaterului):

$$1) \quad ac + bd = ef, \quad a + c = b + d = p;$$

$$2) \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad + bc}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{cd}{ab + cd}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{ad}{ad + bc}}, \quad \sin \frac{D}{2} = \sqrt{\frac{ab}{ab + cd}};$$

$$3) \quad (ab + cd)(ad + bc) = p^2(e f - 4r^2);$$

$$4) \quad e f = 2r(\sqrt{4R^2 + r^2} + r);$$

$$5) \quad S = \sqrt{abcd} = rp.$$

pentru care se poate consulta [3], paragraful 15.

De asemenea, vom avea nevoie de inegalitățile (v. [4], p. 406):

$$(3) \quad 8r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r) \leq p^2 \leq (\sqrt{4R^2 + r^2} + r)^2.$$

Propoziție. În orice patrulater bicentric $ABCD$ au loc inegalitățile:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sqrt{\frac{r\sqrt{2}}{R}} \leq \frac{1}{2} \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2} + \sin \frac{D}{2} \sin \frac{A}{2} \right) &\leq \\ &\leq \frac{\sqrt{4R^2 + r^2} + r}{2\sqrt{2}R} \leq 1. \end{aligned}$$

¹e-mail: jiglau.vasile@yahoo.com

Avem egalitate peste tot dacă și numai dacă $ABCD$ este pătrat.

Demonstrație. Mai întâi, vom exprima suma

$$\Sigma = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2} + \sin \frac{D}{2} \sin \frac{A}{2}$$

funcție de elementele liniare ale patrulaterului. Utilizând formulele, 1)-3), avem:

$$\Sigma = \frac{p(\sqrt{ac} + \sqrt{bd})}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} = \frac{p\sqrt{(ac+bd) + 2\sqrt{abcd}}}{p\sqrt{ef-4r^2}} = \sqrt{\frac{ef+2rp}{ef-4r^2}}$$

sau, cu formula 4), obținem Σ funcție de p, R , și r :

$$\Sigma = \sqrt{\frac{p+r+\sqrt{4R^2+r^2}}{\sqrt{4R^2+r^2}-r}} = \frac{1}{2R}\sqrt{p(\sqrt{4R^2+r^2}+r) + (\sqrt{4R^2+r^2}+r)^2}.$$

Prima inegalitate din enunț este echivalentă cu

$$16\sqrt{2}Rr \leq p(\sqrt{4R^2+r^2}+r) + (\sqrt{4R^2+r^2}+r)^2$$

și va fi stabilită dacă arătăm că au loc următoarele două inegalități:

$$(5) \quad 8\sqrt{2}Rr \leq p(\sqrt{4R^2+r^2}+r),$$

$$(6) \quad 8\sqrt{2}Rr \leq (\sqrt{4R^2+r^2}+r)^2.$$

Ținând seama de (3), inegalitatea din partea stângă, pentru a dovedi (5) este suficient să verificăm că

$$\begin{aligned} 8\sqrt{2}Rr &\leq \sqrt{8r(\sqrt{4R^2+r^2}-r)} \cdot (\sqrt{4R^2+r^2}+r) \iff 4R\sqrt{r} \leq \\ &\leq 2R\sqrt{\sqrt{4R^2+r^2}+r} \iff 4r \leq \sqrt{4R^2+r^2}+r \iff r\sqrt{2} \leq R \end{aligned}$$

este adevărată. Răspuns afirmativ, căci ultima este inegalitatea lui Euler. În privința inegalității (6), avem:

$$\begin{aligned} 8\sqrt{2}Rr \leq (\sqrt{4R^2+r^2}+r)^2 &\iff 4\sqrt{2}Rr \leq 2R^2+r^2+r\sqrt{4R^2+r^2} \\ &\iff 0 \leq 2(R-r\sqrt{2})^2+r(\sqrt{4R^2+r^2}-3r) \\ &\iff 0 \leq 2(R-r\sqrt{2})^2+\frac{4r(R^2-2r^2)}{\sqrt{4R^2+r^2}+3r}, \end{aligned}$$

iar aceasta din urmă este adevărată tot datorită inegalității lui Euler. Este ușor de văzut că această primă inegalitate devine egalitate dacă și numai dacă $ABCD$ este pătrat. Demonstrarea primei inegalități din (4) este încheiată.

Să demonstrăm acum a doua inegalitate din (4). Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma \leq \frac{\sqrt{4R^2 + r^2} + r}{2\sqrt{2}R} &\iff p(\sqrt{4R^2 + r^2} + r) + (\sqrt{4R^2 + r^2} + r)^2 \leq \\ &\leq 2(\sqrt{4R^2 + r^2} + r)^2 \iff p \leq \sqrt{4R^2 + r^2} + r, \end{aligned}$$

ultima fiind a doua parte a inegalității (3). Ca urmare, în a doua inegalitate din (4) avem egalitate în condiția specificată în [4], p. 406, adică dacă și numai dacă patrulaterul $ABCD$ are cel puțin o pereche de unghiuri opuse drepte.

Cea de-a treia și ultima inegalitate din (4) este echivalentă cu

$$\begin{aligned} \sqrt{4R^2 + r^2} + r \leq 2\sqrt{2}R &\iff r^2 + r\sqrt{4R^2 + r^2} \leq 2R^2 \\ &\iff 0 \leq 2(R^2 - 2r^2) + r(3r - \sqrt{4R^2 + r^2}) \\ &\iff 0 \leq 2(R^2 - 2r^2)(3r + \sqrt{4R^2 + r^2}) + 4r(2r^2 - R^2) \\ &\iff 0 \leq 2(R^2 - 2r^2)(\sqrt{4R^2 + r^2} + r), \end{aligned}$$

evident adevărată. Aceasta devine egalitate dacă și numai dacă $ABCD$ este pătrat. Propoziția este complet demonstrată.

Observația 1. Deoarece $\frac{r\sqrt{2}}{R} \leq \sqrt{\frac{r\sqrt{2}}{R}}$, inegalitatea din Propoziție reprezintă o rafinare a inegalității (2), ca și a inegalității care constituie fondul notei matematice [1] (se va ține seama de faptul că $\Sigma \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \Sigma \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\Sigma \cos \frac{A-B}{2}$).

Prin calcule simple, constatăm că al treilea termen al inegalității (4) se exprimă prin laturi astfel:

$$(7) \quad \frac{\sqrt{4R^2 + r^2} + r}{2\sqrt{2}R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}}.$$

Într-adevăr, pe baza formulelor 1), 3) și 4), avem:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{ef}{ef-4r^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{4R^2 + r^2} + r}{\sqrt{4R^2 + r^2} - r}} = \frac{\sqrt{4R^2 + r^2} + r}{2\sqrt{2}R}.$$

Observația 2. O cunoscută formulă a lui **L. Carlitz** precizează distanța dintre centrul cercului înscris I și centrul cercului circumscris O ale patrulaterului bicentric $ABCD$:

$$(8) \quad OI^2 = R^2 - 2Rr \sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}}.$$

Din faptul că $OI^2 \geq 0$, deducem inegalitatea următoare:

$$(9) \quad \frac{R}{r\sqrt{2}} \geq \sqrt{2 \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}}.$$

Din Propoziție și ținând seama de relația (7), rezultă că

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}} \leq 1.$$

Ca urmare, (9) este întărită de următoarea inegalitate:

$$(10) \quad \frac{R}{r\sqrt{2}} \geq 2 \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}.$$

Bibliografie

1. **M. Bencze** – *O rafinare a inegalității lui Euler $R \geq r\sqrt{2}$* , *Recreații Matematice*, 11 (2009), f.1, 15-16.
 2. **M. Josefsson** – *A New Proof of Yun's Inequality for Bicentric Quadrilaterals*, *Forum Geometricorum*, 12 (2012), 79-82.
 3. **D. Mihalca** et al. – *Geometria patrulaterului* (in Romanian), Ed. Teora, 1998.
 4. **D.S. Mitrinović** et al. – *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer, 1989.
 5. **Z. Yun** – *Euler's Inequality Revisited*, *Mathematical Spectrum*, 40 (2008), 119-121.
-

Vizitați pagina web a revistei **Recreații Științifice (1883-1888)**:

<http://www.recreatiistiintifice.ro>

Vizitați pagina web a revistei **Recreații Matematice**:

<http://www.recreatiimatematice.ro>

Relații vectoriale între elementele unui triunghi

Marcel CHIRIȚĂ¹

Abstract. In this Note we establish a couple of vector identities involving the elements of a triangle. As an application, several geometric inequalities are obtained.

Keywords: median, angle-bisector, altitude, perimeter, area.

MSC 2010: 51M04.

În acest articol vom stabili câteva relații vectoriale între elementele unui triunghi, iar în final vom demonstra câteva identități vectoriale și vom da câteva aplicații.

I. Propoziție. *Să se arate că în orice triunghi au loc relațiile vectoriale:*

- 1) $\vec{m}_a \cdot \vec{i}_a = p(p-a)$ și analoagele,
- 2) $\vec{m}_a \cdot \vec{h}_a = \frac{4S^2}{a^2}$ și analoagele,
- 3) $\vec{i}_a \cdot \vec{h}_a = \frac{4S^2}{a^2}$ și analoagele,
- 4) $\vec{m}_a \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2)$ și analoagele.

Vom demonstra mai întâi următoarele rezultate:

Lema 1. *Dacă ABC este un triunghi oarecare, $M \in (BC)$ și $\frac{MB}{MC} = k$, atunci*
$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + k\vec{AC}}{1+k}.$$

Demonstrație. Din $\frac{MB}{MC} = k$ rezultă că $\vec{BM} = k\vec{MC}$, deci $\vec{BA} + \vec{AM} = k(\vec{MA} + \vec{AC})$, de unde $\vec{AM} - k\vec{MA} = -\vec{BA} + k\vec{AC}$ sau $\vec{AM} + k\vec{AM} = \vec{AB} + k\vec{AC}$ și, prin urmare, $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + k\vec{AC}}{1+k}$.

Lema 2. *În orice triunghi sunt adevărate relațiile:*

- 5) $\vec{m}_a = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$ și analoagele,
- 6) $\vec{i}_a = \frac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{b+c}$ și analoagele,
- 7) $\vec{h}_a = \frac{b \cos C \cdot \vec{AB} + c \cos B \cdot \vec{AC}}{b \cos C + c \cos B} = \frac{b \cos C \cdot \vec{AB} + c \cos B \cdot \vec{AC}}{a}$ și analoagele.

Demonstrație. Aceste relații se obțin aplicând Lema 1 și ținând seama de faptul că avem $k = 1$ pentru mediană, $k = \frac{c}{b}$ pentru bisectoare și $k = \frac{c \cos B}{b \cos C}$ pentru înălțime (evident, toate trei corespundătoare laturii a).

¹Profesor, București; e-mail: marc.chirita@yahoo.ro

Demonstrația Propoziției. 1) Ținând seama de 5) și 6), avem:

$$\begin{aligned}\vec{m}_a \cdot \vec{i}_a &= \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \cdot \frac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{b+c} = \frac{bc^2}{2(b+c)} + \frac{cb^2}{2(b+c)} + \left[\frac{c}{2(b+c)} + \frac{b}{2(b+c)} \right] \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= \frac{bc}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2) \right] = \frac{1}{4} [(b+c)^2 - a^2] = p(p-a).\end{aligned}$$

2) Cu relațiile 5) și 7) obținem:

$$\begin{aligned}\vec{m}_a \cdot \vec{h}_a &= \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \cdot \frac{b \cos C \cdot \vec{AB} + c \cos B \cdot \vec{AC}}{a} = \\ &= \frac{bc^2 \cos C + b^2 c \cos B}{2a} + \left(\frac{c \cos B + b \cos C}{2a} \right) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \\ &= \frac{bc}{2a} (c \cos C + b \cos B) + \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2) = \\ &= \frac{bc}{2a} \left(c \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + b \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right) + \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2) \\ &= \frac{2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2} = \frac{4S^2}{a^2}\end{aligned}$$

(în ultimul pas s-a folosit formula lui Heron pentru aria triunghiului în forma $16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$).

3) Procedăm la fel. Utilizând relațiile 6) și 7), avem:

$$\begin{aligned}\vec{i}_a \cdot \vec{h}_a &= \frac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{b+c} \cdot \frac{b \cos C \cdot \vec{AB} + c \cos B \cdot \vec{AC}}{a} = \\ &= \frac{1}{a(b+c)} [b^2 c^2 (\cos C + \cos B) + bc (\cos C + \cos B) \vec{AB} \cdot \vec{AC}] = \\ &= \frac{bc (\cos C + \cos B)}{2a(b+c)} (2bc + b^2 + c^2 - a^2).\end{aligned}$$

Înlocuind $\cos C$, $\cos B$ cu expresiile lor date de teorema cosinusului, după calcule de rutină obținem că

$$\vec{i}_a \cdot \vec{h}_a = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2} = \frac{16S^2}{4a^2} = \frac{4S^2}{a^2},$$

de unde rezultă relația cerută.

4) Avem:

$$\begin{aligned}\vec{m}_a \cdot \vec{a} &= m_a \cdot a \cdot \cos(\vec{m}_a, \vec{a}) = m_a \cdot a \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + m_a^2 - b^2}{m_a \cdot a} = \\ &= \frac{1}{4} (a^2 + 4m_a^2 - 4b^2) = \frac{1}{2} (b^2 + c^2).\end{aligned}$$

II. Din Propoziția stabilită, prin sumare, obținem direct următoarele identități vectoriale:

$$(1) \quad \vec{m}_a \cdot \vec{i}_a + \vec{m}_b \cdot \vec{i}_b + \vec{m}_c \cdot \vec{i}_c = p^2,$$

$$(2) \quad \vec{m}_a \cdot \vec{h}_a + \vec{m}_b \cdot \vec{h}_b + \vec{m}_c \cdot \vec{h}_c = 4S^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right),$$

$$(3) \quad \vec{i}_a \cdot \vec{h}_a + \vec{i}_b \cdot \vec{h}_b + \vec{i}_c \cdot \vec{h}_c = 4S^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right),$$

$$(4) \quad \vec{m}_a \cdot \vec{d} + \vec{m}_b \cdot \vec{b} + \vec{m}_c \cdot \vec{c} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Identitățile vectoriale precedente pot fi utilizate pentru a obține inegalități interesante relativ la triunghiuri. Astfel, pornind de la (1), prin utilizarea inegalității triunghiulare se obține:

$$p^2 = \left| \vec{m}_a \cdot \vec{i}_a + \vec{m}_b \cdot \vec{i}_b + \vec{m}_c \cdot \vec{i}_c \right| \leq \left| \vec{m}_a \cdot \vec{i}_a \right| + \left| \vec{m}_b \cdot \vec{i}_b \right| + \left| \vec{m}_c \cdot \vec{i}_c \right| \leq m_a \cdot i_a + m_b \cdot i_b + m_c \cdot i_c,$$

deci

$$(5) \quad p^2 \leq m_a \cdot i_a + m_b \cdot i_b + m_c \cdot i_c.$$

Pe de altă parte, din $\vec{m}_a \cdot \vec{i}_a = p(p - a)$ urmează că

$$p(p - a) \leq m_a \cdot i_a \leq \left(\frac{m_a + i_a}{2} \right)^2,$$

deci

$$m_a + i_a \geq 2\sqrt{p(p - a)}.$$

Sumând aceasta cu analogele ei, se obține că

$$(6) \quad m_a + i_a + m_b + i_b + m_c + i_c \geq 2 \left(\sqrt{p(p - a)} + \sqrt{p(p - b)} + \sqrt{p(p - c)} \right)$$

sau, aplicând membrului drept inegalitatea mediilor,

$$(7) \quad m_a + i_a + m_b + i_b + m_c + i_c \geq 6\sqrt[3]{pS}.$$

Bibliografie

1. **M. Chiriță, D. Gheorghiu** – *Aplicații ale calcului vectorial în matematica de liceu*, Ed. Sigma, 2003.
2. **Alric Tournier** – *Géométrie vectorielle*, Ed. Mcgraw-Hill, Montreal, 1983.
3. – *Gazeta Matematică. Colecție*, 1980-2012.

Inegalități privind derivata unei funcții

*Sorin PUȘPANĂ*¹

Abstract. In this paper, several inequalities are established regarding the extremum values of a function and its derivatives.

Keywords: differentiable function, supremum, infimum, Lagrange's theorem.

MSC 2010: 26D99.

Prezentăm în acest articol câteva inegalități privind valorile extreme ale unei funcții și ale derivatei sale.

Teorema 1. *Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, atunci au loc inegalitățile:*

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)| &\leq \frac{1}{2(b-a)} \left(\sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x) \right) \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| - \inf_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left(\sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x) \right) \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|. \end{aligned}$$

Demonstrație. Prima inegalitate din (1) este echivalentă cu

$$\inf_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq \frac{1}{b-a} \left(\sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x) \right).$$

Dacă derivata se anulează cel puțin într-un punct al intervalului $[a, b]$, atunci $\inf_{x \in [a, b]} |f'(x)| = 0$, iar inegalitatea este evidentă. În caz contrar, rezultă că f este strict crescătoare, pentru a face o alegere, caz în care inegalitatea devine $\inf_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq$

$\frac{1}{b-a} [f(b) - f(a)]$, adevărat conform teoremei lui Lagrange.

A doua inegalitate din (1) este echivalentă cu

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq 2 \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| - \inf_{x \in [a, b]} |f(x)| \right).$$

Dacă $f \leq 0$ pe $[a, b]$ sau $f \geq 0$ pe $[a, b]$, atunci inegalitatea devine $0 \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x) -$

$\inf_{x \in [a, b]} f(x)$, deci este adevărată. Dacă f ia și valori pozitive și valori negative, rezultă că f se anulează pe intervalul $[a, b]$, deci $\inf_{x \in [a, b]} |f(x)| = 0$, iar inegalitatea se scrie:

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq 2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \Leftrightarrow$$

¹Profesor, Craiova; e-mail: sorin.puspana@yahoo.com

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq 2 \max \left(- \inf_{x \in [a,b]} f(x), \sup_{x \in [a,b]} f(x) \right) \\
&\Leftrightarrow \sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x) + \left| \sup_{x \in [a,b]} f(x) + \inf_{x \in [a,b]} f(x) \right| \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \left| \sup_{x \in [a,b]} f(x) + \inf_{x \in [a,b]} f(x) \right|.
\end{aligned}$$

A treia inegalitate din (1) este echivalentă cu

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| - \inf_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Procedăm ca mai sus. Dacă $f \leq 0$ pe $[a, b]$ sau $f \geq 0$ pe $[a, b]$, atunci inegalitatea devine egalitate. În caz contrar, rezulta că se anulează pe intervalul $[a, b]$, deci $\inf_{x \in [a,b]} |f(x)| = 0$, iar inegalitatea se scrie succesiv

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x) \\
&\Leftrightarrow \max \left(- \inf_{x \in [a,b]} f(x), \sup_{x \in [a,b]} f(x) \right) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x) \\
&\Leftrightarrow \sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x) + \left| \sup_{x \in [a,b]} f(x) + \inf_{x \in [a,b]} f(x) \right| \leq 2 \left(\sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x) \right) \\
&\Leftrightarrow \left| \sup_{x \in [a,b]} f(x) + \inf_{x \in [a,b]} f(x) \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x).
\end{aligned}$$

Dacă $\sup_{x \in [a,b]} f(x) + \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq 0$, inegalitatea devine $\sup_{x \in [a,b]} f(x) \geq 0$, deci este adevărată, iar dacă $\sup_{x \in [a,b]} f(x) + \inf_{x \in [a,b]} f(x) \geq 0$, atunci inegalitatea devine $\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq 0$, deci este adevărată și de această dată.

În fine, pentru a patra inegalitate din (1) avem:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a} (\sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x)) &\leq \frac{1}{b-a} \sup_{x,y \in [a,b]} [f(x) - f(y)] \\
&\leq \frac{1}{b-a} \sup_{x,y \in [a,b]} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x,y \in [a,b]} |f'(c_{xy})| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|,
\end{aligned}$$

unde c_{xy} este valoarea intermediară din teorema lui Lagrange.

Teorema este complet demonstrată.

Teorema 2. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă și $p, q \in [0, 1]$, $p+q=1$, atunci au loc inegalitățile:

$$\begin{aligned}
\max(p, q) \inf_{x \in [a,b]} |f'(x)| &\leq \frac{1}{b-a} \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f(pa + qb)| \leq \\
(2) &\leq \max(p, q) \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|.
\end{aligned}$$

Demonstrație. Considerăm funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(pa + qb)$. și scriem inegalitatea precedentă în forma

$$(3) \quad \max(p, q) \inf_{x \in [a, b]} |g'(x)| \leq \frac{1}{b-a} \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \leq \max(p, q) \sup_{x \in [a, b]} |g'(x)|.$$

Dacă, prin absurd, prima inegalitate din (3) nu are loc, atunci avem succesiv:

$$\begin{aligned} \max(p, q) \inf_{x \in [a, b]} |g'(x)| &> \frac{1}{b-a} \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \geq \frac{1}{b-a} |g(x)| = \\ &= \frac{1}{b-a} |x - x_0| |g'(c_x)| \geq \frac{1}{b-a} |x - x_0| \cdot \inf_{x \in [a, b]} |g'(x)|, \quad \forall x \in [a, b], \end{aligned}$$

unde c_x este dat de teorema lui Lagrange, iar $x_0 = pa + qb$. De aici rezultă că

$$\max(p, q) > \frac{1}{b-a} |x - x_0|, \quad \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow \max(p, q) > \frac{1}{b-a} \sup_{x \in [a, b]} |x - x_0|.$$

Cum $\sup_{x \in [a, b]} |x - x_0| = (b-a) \max(p, q)$, obținem că $\max(p, q) > \max(p, q)$, absurd.

Pentru a doua inegalitate din (3), procedăm la fel. Presupunem că

$$\frac{1}{b-a} \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| > \max(p, q) \sup_{x \in [a, b]} |g'(x)|.$$

Obținem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \sup_{x \in [a, b]} |x - x_0| \cdot \sup_{x \in [a, b]} |g'(c_x)| &\geq \frac{1}{b-a} \sup_{x \in [a, b]} |x - x_0| |g'(c_x)| \\ &= \frac{1}{b-a} \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| > \max(p, q) \sup_{x \in [a, b]} |g'(x)| \geq \max(p, q) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |g'(c_x)|. \end{aligned}$$

Rezultă că $\sup_{x \in [a, b]} |x - x_0| > (b-a) \max(p, q)$, $\forall x \in [a, b]$, adică $(b-a) \max(p, q) > (b-a) \max(p, q)$, absurd.

Corolar. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă și $p, q \in [0, 1]$, $p + q = 1$, atunci are loc inegalitatea:

$$(4) \quad |pf(a) + qf(b) - f(pa + qb)| \leq (b-a) \max(p, q) \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Demonstrație. Folosind Teorema 2, obținem succesiv:

$$\begin{aligned} |pf(a) + qf(b) - f(pa + qb)| &= |pf(a) + qf(b) - (p+q)f(pa + qb)| \\ &\leq p|f(a) - f(pa + qb)| + q|f(b) - f(pa + qb)| \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f(pa + qb)| \\ &\leq (b-a) \max(p, q) \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|. \end{aligned}$$

Procedeu de demonstrare a unor inegalități bazat pe inegalitatea lui Schur

*Andi Gabriel BROJBEANU*¹

Abstract. A method for establishing certain inequalities is proposed and applied. It is based upon inequalities (1)-(9) that are consequences of Schur's inequality (S).

Keywords: inequality, Schur's inequality.

MSC 2010: 97H30.

În cadrul acestei Note vom prezenta un procedeu de demonstrare a unor inegalități, bazat pe inegalitatea lui Schur, care constă în utilizarea inegalităților (1)-(9) de mai jos, relativ la primele trei polinoame simetrice fundamentale. Este de precizat că acest procedeu nu-i întotdeauna optim sau cel mai elegant, dar se poate dovedi util în situații în care alte metode sau procedee de rezolvare sunt mai greu de găsit.

Începem prin a aminti următorul rezultat, de altfel punctul de plecare al Notei de față:

Inegalitatea lui Schur. *Dacă x, y, z sunt numere reale nenegative, atunci pentru orice $t \geq 0$ avem:*

$$(S) \quad x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$ sau dacă două dintre numerele x, y, z sunt egale și al treilea este nul; dacă $xyz = 0$, impunem restricția $t > 0$.

Propoziție. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive și notăm $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$, atunci au loc inegalitățile:*

- (1) $p^2 \geq 3q$,
- (2) $q^2 \geq 3pr$,
- (3) $pq \geq 9r$,
- (4) $p^3 \geq 27r$,
- (5) $q^3 \geq 27r^2$,
- (6) $p^3 + 9r \geq 4pq$,
- (7) $2p^3 + 9r \geq 7pq$,
- (8) $q^3 + 9r^2 \geq 4pqr$,
- (9) $p^4 + 4q^2 + 6pr \geq 5p^2q$,

¹Elev, cl. a XI-a, Colegiul Național „C. Carabella”, Târgoviște; e-mail: andi.bro@yahoo.com

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Demonstrație. (1) Pentru $t = 0$, (S) devine $(x - y)(x - z) + (y - x)(y - z) + (z - x)(z - y) \geq 0$, adică $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, de unde

$$p^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 3(xy + yz + zx) = 3q.$$

(2) Ținând cont de (1), obținem:

$$q^2 = (xy + yz + zx)^2 \geq 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy) = 3xyz(x + y + z) = 3pr.$$

(3) Se obține înmulțind membru cu membru inegalitățile (1) și (2).

(4) Se înmulțesc inegalitățile (1) și (3) membru cu membru.

(5) Se înmulțesc membru cu membru inegalitățile (2) și (3).

(6) Pentru $t = 1$, (S) devine $x(x - y)(x - z) + y(y - x)(y - z) + z(z - x)(z - y) \geq 0$, adică $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$.

Cum $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$, obținem:

$$\begin{aligned} p^3 + 9r &= (x + y + z)^3 + 9xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &\quad + 3xyz + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) + 6xyz \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) + \\ &\quad + 3xyz \geq xy(x + y) + xyz + yz(y + z) + xyz \\ &\quad + zx(z + x) + xyz + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) \\ &= xy(x + y + z) + yz(x + y + z) + zx(x + y + z) \\ &\quad + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) = 4pq. \end{aligned}$$

(7) Ținând cont de (1) și (6), obținem:

$$2p^3 + 9r = p \cdot p^2 + (p^3 + 9r) \geq p \cdot 3q + 4pq = 3pq + 4pq = 7pq.$$

(8) Aplicând (6) pentru numerele reale pozitive $a = xy, b = yz, c = zx$, avem:

$$q^3 + 9r^2 = (a + b + c)^3 + 9abc \geq 4(a + b + c)(ab + bc + ca) = 4pqr.$$

(9) Pentru $t = 2$, (S) devine $x^2(x - y)(x - z) + y^2(y - x)(y - z) + z^2(z - x)(z - y) \geq 0$, adică $x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$.

Cum $x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = (p^2 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2pr) = p^4 + 2q^2 + 4pr - 4p^2q$, obținem:

$$\begin{aligned} p^4 + 4q^2 + 6pr &= x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) + 4p^2q + 2q^2 + pr \\ &\geq 4p^2q + 2q^2 + pr + xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) \\ &\quad + zx(z^2 + x^2) = 4p^2q + 2q^2 + pr + (xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) - \\ &\quad - x^2yz - xy^2z - xyz^2 = 4p^2q + 2q^2 + pr - pr + q(p^2 - 2q) \\ &= 4p^2q + q(p^2 - 2q + 2q) = 5p^2q. \end{aligned}$$

În continuare, vom prezenta câteva inegalități preluate din diferite surse, care vor fi demonstrate utilizând inegalitățile din propoziția precedentă.

Problema 1. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2(xy + yz + zx)$. Arătați că $9xyz \geq x + y + z$.

Marius Stănean, forumul MathTime

Demonstrație. Folosind (6) și condiția din enunț, obținem că:

$$\begin{aligned} 9xyz = 9r &\geq 4pq - p^3 = p[4(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)] = \\ &= p[2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)] = p = x + y + z. \end{aligned}$$

Problema 2. Fie $x, y, z \geq 0$ astfel încât $xy + yz + zx = 3$. Arătați că $4xyz(x + y + z) - 3xyz \leq 9$.

Marius Stănean, forumul MathTime

Demonstrație. Dacă $xyz = 0$, inegalitatea este evidentă. Dacă $x, y, z > 0$, atunci din (5) și condiția din enunț rezultă că $27r^2 \leq q^3 = 27 \Rightarrow r^2 \leq 1 \Rightarrow r \leq 1 \Rightarrow r^2 \leq r$. Conform cu (8), avem:

$$4xyz(x + y + z) - 3xyz \leq 4pr - 3r^2 = \frac{1}{3}(4pqr - 9r^2) \leq \frac{1}{3}q^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9.$$

Problema 3. Fie x, y, z trei numere reale pozitive cu $x + y + z = 3$. Să se arate că

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq x^2 + y^2 + z^2 + 3.$$

Romeo Raicu, G.M.B. 7-8-9/2011

Demonstrație. Avem $p = x + y + z = 3$, deci

$$\begin{aligned} 2(x^3 + y^3 + z^3) - x^2 - y^2 - z^2 - 3 &= 2[3r + p(p^2 - 3q)] - (p^2 - 2q) - 3 = 6r + 2p^3 - \\ &- 6pq - \frac{1}{3}p(p^2 - 2q) - \frac{1}{9}p^3 = \frac{14}{9}p^3 + 6r - \frac{16}{3}pq = \frac{8}{9}p(p^2 - 3q) + \frac{2}{3}(p^3 + 9r - 4pq) \geq 0, \end{aligned}$$

conform cu (1) și (6), deci inegalitatea este demonstrată.

Problema 4. Fie x, y, z numere reale pozitive cu proprietatea că $xy + yz + zx = 3$. Să se arate că $3xyz(x + y + z) - 2xyz \leq 7$.

Marian Cucoaneș, G.M. 4/2013

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că $3pr \leq 7 + 2r$.

$$\begin{aligned} \text{Conform (5) și (8), rezultă } 3pr &= \frac{1}{4} \cdot 4pqr \leq \frac{1}{4}(q^3 + 9r^2) = \frac{1}{4}(27 + r^2 + 8r^2) \leq \\ \frac{1}{4}(27 + \frac{1}{27}q^3 + 8r\sqrt{\frac{1}{27}q^3}) &= \frac{1}{4}(28 + 8r) = 7 + 2r, \text{ ceea ce încheie demonstrația.} \end{aligned}$$

Problema 5. Fie $a, b, c \in (0, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $2(\tan a + \tan b + \tan c) = 3 \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c$.

a) Arătați că $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c \geq 1$.

b) Aflați valoarea minimă a expresiei $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\sin^2 b} + \frac{1}{\sin^2 c}$.

Shortlist 2013

Demonstrație. Notăm $x = \tan a, y = \tan b, z = \tan c$. Cum $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem că $x, y, z > 0$. Rezultă că $\cos^2 a = \frac{1}{1+x^2}, \cos^2 b = \frac{1}{1+y^2}, \cos^2 c = \frac{1}{1+z^2}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1 &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} - 1 = \\ &= \frac{3 + 2(x^2 + y^2 + z^2) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2} - 1 = \frac{2+x^2+y^2+z^2-x^2y^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}. \end{aligned}$$

Dar $2+x^2+y^2+z^2-x^2y^2z^2 = 2+p^2-2q-r^2 = p^2-2q+\frac{3r}{p}-\frac{4}{9}p^2 = \frac{1}{9p}(5p^3+27r-18pq) = \frac{2}{9}(p^2-3q) + \frac{1}{3p}(p^3+9r-4pq) \geq 0$, conform (1) și (6), de unde $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c \geq 1$, cu egalitate pentru $x = y = z = \sqrt{2}$.

b) Demonstrăm că $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\sin^2 b} + \frac{1}{\sin^2 c} \geq \frac{9}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\sin^2 b} + \frac{1}{\sin^2 c} - \frac{9}{2} &= \frac{1+x^2}{x^2} + \frac{1+y^2}{y^2} + \frac{1+z^2}{z^2} - \frac{9}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{3}{2} = \\ &= \frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^2y^2z^2} - \frac{3}{2} = \frac{q^2-2pr}{r^2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{q^2}{pr} - 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{q^2-3pr}{pr} \geq 0, \end{aligned}$$

conform cu (2), deci valoarea minimă este $\frac{9}{2}$ și se atinge pentru $x = y = z = \sqrt{2}$.

Problema 6. Numerele pozitive a, b, c verifică $abc = 1$. Demonstrați inegalitatea

$$\sum \frac{a+b}{c} \geq 2\left(\sum a + \sum \frac{1}{a} - 3\right)$$

Gabriel Dospinescu, Shortlist 2004

Demonstrație. Facem decondiționarea $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Avem:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}}{\frac{z}{x}} &\geq 2\left(\sum \frac{x}{y} + \sum \frac{y}{x} - 3\right) \Leftrightarrow \sum \frac{x^2}{yz} + \sum \frac{xy}{z^2} + 6 \geq 2\sum \frac{x^2+y^2}{xy} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sum x^3}{xyz} + \frac{\sum (xy)^3}{x^2y^2z^2} + 6 \geq 2 \cdot \frac{\sum x \sum x^2 - \sum x^3}{xyz} \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{3r+p^3-3pq}{r} + \frac{3r^2+q^3-3pqr}{r^2} + 6 \geq 2 \cdot \frac{p(p^2-2q)}{r} \\ &\Leftrightarrow 18r^2 + 3p^3r + q^3 - 12pqr \geq 2p^3r - 4pqr \\ &\Leftrightarrow (q^3 + 9r^2 - 4pqr) + r(p^3 + 9r - 4pq) \geq 0, \end{aligned}$$

adevărat conform cu (6) și (8).

Problema 7. *Demonstrați că în orice triunghi*

$$\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2 + \frac{9r}{4R+r} \geq 4.$$

Cosmin Pohoată, Shortlist 2007

Demonstrație. Fie r_a, r_b, r_c lungimile razelor cercurilor exînscrie corespunzătoare vârfurilor triunghiului ABC . Dacă $p_0 = r_a + r_b + r_c, q_0 = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a, r_0 = r_a r_b r_c$, cu notațiile cunoscute obținem: $p_0 = 4R + r, q_0 = p^2, r_0 = p^2 r$ (se folosesc formulele $r_a = \frac{S}{p-a}, r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}$).

Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{p_0^2}{q_0} + 9\frac{r_0}{p_0 q_0} \geq 4 \Leftrightarrow p_0^3 + 9r_0 \geq 4p_0 q_0$, adevărat conform cu (6).

Problema 8. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c = 3$. Arătați că*

$$abc + \frac{12}{ab + bc + ca} \geq 5.$$

forumul ArtofProblemSolving

Demonstrație. Dacă $p = a + b + c = 3, q = ab + bc + ca, r = abc$, atunci

$$abc + \frac{12}{a+b+c} - 5 = r + \frac{12}{q} - 5 = \frac{27r}{p^3} + \frac{4p^2}{3q} - 5 = \frac{4p^5 + 81qr - 15p^3q}{p^3q} \geq 0,$$

deoarece $4p^5 + 81qr - 15p^3q = 9q(p^3 + 9r - 4pq) + 4(p^5 - 6p^3q + 9pq^2) = 4p(p^2 - 3q)^2 + 9q(p^3 + 9r - 4pq) \geq 0$, conform cu (6).

Problema 9. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC . Să se arate că*

$$\frac{a^3}{b+c-a} + \frac{b^3}{c+a-b} + \frac{c^3}{a+b-c} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Nicolae Papacu, IMAC 2009

Demonstrație. Deconționăm: $a = y + z, b = z + x, c = x + y$. Avem:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^3}{b+c-a} &= \sum \frac{(y+z)^3}{2x} = \frac{\sum yz[y^3 + z^3 + 3yz(p-x)]}{2r} = \\ &= \frac{\sum x^3 \sum xy - xyz \sum x^2 + 3p \sum y^2 z^2 - 3r \sum yz}{2r} = \frac{3qr + p^3q - 3pq^2 -}{2r} \\ &\frac{-p^2r + 2qr + 3pq^2 - 6p^2r - 3qr}{2r} = \frac{p^3q - 7p^2r + 2qr}{2r}, \end{aligned}$$

deci inegalitatea este succesiv echivalentă cu $\frac{p^3q - 7p^2r + 2qr}{2r} \geq \sum (y+z)^2 \Leftrightarrow p^3q - 7p^2r + 2qr \geq 4r(p^2 - q) \Leftrightarrow p^3q + 6qr \geq 11p^2r \Leftrightarrow q(p^3 + 9r - 4pq) + \frac{11p}{3}(q^2 - 3pr) + \frac{q}{3}(pq - 9r) \geq 0$, adevărat conform cu (2), (3) și (6).

Problema 10. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu suma 1, atunci

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2$$

Titu Andreescu și Gabriel Dospinescu

Demonstrație. Dacă $p = a + b + c = 1, q = ab + bc + ca, r = abc$, atunci inegalitatea se scrie:

$$\begin{aligned} \sum a^2 \sum a^2b^2 - a^2b^2c^2 &\geq 8 \left(\sum a^2b^2 \right)^2 \Leftrightarrow \sum a^2b^2 \cdot \left[\left(\sum a \right)^2 \sum a^2 - 8 \sum a^2b^2 \right] \geq a^2b^2c^2 \left(\sum a \right)^2 \\ &\Leftrightarrow (q^2 - 2pr)(p^4 - 2p^2q - 8q^2 + 16pr) \geq p^2r^2 \end{aligned}$$

Dar, conform cu (2) și (9), avem $(q^2 - 2pr)(p^4 - 2p^2q - 8q^2 + 16pr) \geq pr(5p^2q - 4q^2 - 2p^2q - 8q^2 + 10pr) \geq pr[pr + 3(p^2q + 3pr - 4q^2)] \geq p^2r^2$, deoarece $p^2q + 3pr - 4q^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx) + 3xyz(x + y + z) - 2(xy + yz + zx)^2 = (x^3y + y^3x - 2x^2y^2) + (y^3z + z^3y - 2y^2z^2) + (z^3x + x^3z - 2x^2z^2) = xy(x - y)^2 + yz(y - z)^2 + zx(z - x)^2 \geq 0$. Așadar, inegalitatea este demonstrată.

Problema 11. Fie $a, b, c > 0$. Arătați că

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)}.$$

Andi Gabriel Brojbeanu

Demonstrație. Dacă $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$, atunci

$$\begin{aligned} \frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)} - \sum \frac{1}{a+b} &= \frac{3p}{2q} - \frac{\sum (a^2 + ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{3p}{2q} - \frac{p^2 + q}{pq - r} = \\ &= \frac{3p^2q - 3pr - 2p^2q - 2q^2}{2p(pq - r)} = \frac{\frac{2q}{3}(p^2 - 3q) + \frac{p}{3}(pq - 9r)}{2(pq - r)} \geq 0, \end{aligned}$$

adevărat conform cu (1) și (3).

Propunem cititorilor interesați să procedeze în același fel cu inegalitățile:

1. Fie a, b, c numere reale pozitive. Arătați că $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$. (Mircea Lascu)

2. Să se arate că $5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1$, pentru orice numere reale nenegative care satisfac relația $a + b + c = 1$.

(Mihai Piticari și Dan Popescu, Shortlist 2002)

3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c = 1$. Arătați că $\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)} \geq 8$. (forumul ArtofProblemSolving)

4. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea $\frac{3(r_a + r_b + r_c)}{2p^2} \geq \frac{1}{r_a + r_b} + \frac{1}{r_b + r_c} + \frac{1}{r_c + r_a} \geq \frac{6}{5R + 2r}$. (Andi Gabriel Brojbeanu, *Recreații Matematice 1/2014*)

5. Fie $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 1$. Să se arate că $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + 3(ab + bc + ca) \geq \frac{11}{2}$. (Gh. Ghiță, *G.M.B. 7-8-9/2009*)

6. Se consideră a, b, c trei numere reale strict pozitive. Să se arate că $\sum \frac{b+c}{a} \geq 3 + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)}{abc(a + b + c)}$. (Cezar Lupu, *Shortlist 2006*)

7. Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu proprietatea că $abc = 1$, atunci $(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3) \geq 2 \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$. (Dan Nedeianu, *Shortlist 2010*)

8. Arătați că pentru orice $a, b, c > 0$ avem $\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$. (Ngueyen le Dung)

9. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât $a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Să se arate că $a + b + c \geq \frac{3}{a + b + c} + \frac{2}{abc}$. (Cezar Lupu și Valentin Vornicu, *Shortlist 2006*)

10. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc = 1$. Arătați că $5 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1)$. (forumul ArtofProblemSolving)

11. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, atunci $\frac{1}{x^2 + xy + y^2} + \frac{1}{y^2 + yz + z^2} + \frac{1}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{9}{(x + y + z)^2}$. (Vasile Cîrtoaje, *G.M.B.*)

Bibliografie

1. T. Ceașu, A.C. Muntean, I. Stana – *Echivalența unor inegalități clasice*, Editura Mirton, Timișoara, 2007.
2. T. Andreescu, V. Cârtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu – *Old & new inequalities*, Editura Gil, Zalău, 2004.
3. B. Ioniță, T. Zvonaru – *Aplicații ale inegalității lui Schur*, Pregătirea concursului Internațional de Matematică „Arhimede” - IMAC, Clasele III-XII, Editura Nomina, 2011.
4. – *Colecția Shortlist 2002-2013*.

CORRESPONDENTE

Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{A})$. Facteurs invariants

Adrien REISNER¹

Abstract. We study the Smith form of matrices $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{A})$, where \mathbb{A} is a principal ring, and his applications, specially invariant factors for a matrix.

Keywords: diagonal matrix, Smith normal form, invariant factor.

MSC 2010: 15A21.

I. Forme de Smith d'une matrice. Soit \mathbb{A} un anneau *principal*. Deux matrices A et B de même dimensions, à coefficients dans \mathbb{A} sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe deux matrices P et Q *inversibles* telles que $A = PBQ$. On montre de suite qu'il s'agit d'une *relation d'équivalence*. On a le théorème suivant:

Théorème 1 (Smith). *Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{A})$ est équivalente à une matrice diagonale - forme de Smith de la matrice M -*

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_s, 0, 0, \dots, 0),$$

où $d_1 | d_2 | \dots | d_s$ et $s = \min(m, n)$.

Les éléments d_1, d_2, \dots, d_s s'appellent **facteurs invariants** de la matrice M .

Pour démontrer le théorème il suffit de montrer qu'on obtient D en multipliant M à droite et à gauche par des **matrices inversibles**. On rappelle les *opérations élémentaires* sur les rangées (lignes et colonnes) d'une matrice (ces opérations transforment une matrice en une matrice équivalente):

OP1. Echange de deux rangées. Postmultiplier ou prèmultiplier par la matrice $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où $t_{ii} = 1$ si $i \neq p, i \neq q$, $t_{pq} = t_{qp} = 1$, tous les autres t_{ij} sont nuls. Alors: $M \times T : \text{Col}_p \leftrightarrow \text{Col}_q$; et de même : $T \times M : \text{Lig}_p \leftrightarrow \text{Lig}_q$. La matrice T est une matrice de permutation donc inversible.

OP2. Multiplication d'une rangée par un scalaire inversible. Postmultiplier ou prèmultiplier par la matrice diagonale suivante: $E_i(u) = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1)$, où u est un élément inversible de l'anneau \mathbb{A} .

OP3. Addition à une rangée d'un multiple d'une autre. Postmultiplier ou prèmultiplier par la matrice $S_k = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où $s_{ii} = 1, \forall i$, $s_{pq} = k$, pour $p \neq q$, p et q fixés, tous les autres s_{ij} sont nuls. Alors: $M \times S_k : k \times \text{Col}_p + \text{Col}_q \rightarrow \text{Col}_q$ et $S_k \times M : k \times \text{Lig}_p + \text{Lig}_q \rightarrow \text{Lig}_q$. La matrice S_k est inversible.

OP4. Altération de deux rangées de sorte que les premiers éléments de ces rangées soient remplacés par leur p.g.c.d. et 0. Cette opération résulte du lemme suivant:

¹TELECOM ParisTech; e-mail: adrien.reisner@yahoo.fr

Lemme. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{A})$. Il existe une matrice $Q \in GL_2(\mathbb{A})$ telle que $Q \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ où $d = 0$, ou bien $d = p.g.c.d.(a, b)$.

Démonstration. Si $a = b = 0$ il n'y a rien à prouver. Sinon, soit $d = p.g.c.d.(a, b)$: il existe $a', b', s, t \in \mathbb{A}$ tels que $a = a'd$, $b = b'd$, et $sa - tb = d$. Alors $d \neq 0$ et $d(sa' - tb') = d$ donne $sa' - tb' = 1$. En particulier, la matrice $Q' = \begin{pmatrix} a' & t \\ b' & s \end{pmatrix}$

est inversible dont l'inverse $Q'^{-1} = Q = \begin{pmatrix} s & -t \\ -b' & a' \end{pmatrix}$ vérifie:

$$Q \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -t \\ -b' & a' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration du théorème. On échange les rangées - lignes et colonnes - pour que le coefficient m_{11} soit non nul - opération OP1. On applique OP4 afin de remplacer m_{11} et m_{21} par leur p.g.c.d. et 0. On applique OP4 successivement à m_{11} et m_{i1} , $3 \leq i \leq n$, jusqu'à ce que la première colonne n'ait que des zéros au-dessous du premier coefficient m_{11} . Dans le cas où $m_{11} | m_{i1}$ on peut utiliser OP3 au lieu de OP4.

De même, plusieurs opérations OP4 font apparaître le vecteur $(m_{11}, 0, \dots, 0)$ sur la première ligne et finalement M est équivalente à une matrice de la forme - matrice bloc - : $\begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$. On recommence les mêmes opérations sur la matrice M_1 .

Remarque. Dans le cas où l'anneau \mathbb{A} est principal (par exemple: \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}[i]$ ou $\mathbb{K}[X]$, \mathbb{K} étant un corps) on n'a pas besoin de l'opération OP4 (on utilise la division euclidienne dans l'anneau euclidien \mathbb{A}). Dans la suite, l'anneau principal \mathbb{A} sera soit \mathbb{Z} soit $\mathbb{K}[X]$, où \mathbb{K} est un corps.

Exemple 1. Trouver la forme de Smith de la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1) $a = m_{11} = 6$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = M_1$: on fait apparaître 3 (reste de la division de 9 par 6) en m_{21} ;

2) $a = 3$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = M_2$: on fait apparaître $a = 3$ en m_{11} ;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = M_3$: on fait apparaître 0 en m_{21} ;

4) $M_3 \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = M_4$: on recommence sur les lignes et on fait apparaître 1 (reste de la division de 7 par 3) en m_{12} ;

5) $a = 1$. $M_4 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = M_5$: on fait apparaître $a = 1$ en m_{11} ;

$$6) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \times M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = M_6 : \text{on fait apparaître } 0 \text{ en } m_{21};$$

$$7) M_6 \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = M_7 : \text{on fait apparaître } 0 \text{ en } m_{12};$$

M_7 est la forme de Smith de la matrice $M : M_7 = PMQ$ avec:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -30 & 4 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. Trouver la forme de Smith de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -6 & -9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \in$

$\mathcal{M}_{32}(\mathbb{Z})$.

$$1) a = 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 0 & 21 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = M_1 : \text{on fait apparaître } 0 \text{ en } m_{21} \text{ et}$$

m_{31} ;

$$2) M_1 \times \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 21 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = M_2 : \text{on fait apparaître } 0 \text{ en } m_{12} : \text{on recommence avec la matrice colonne } \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 21 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_3.$$

M_3 est la forme de Smith de la matrice $M : M_3 = PMQ$ avec:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Application: systèmes linéaire diophantien. On se propose de trouver les solutions entières du système de m équations linéaires à n inconnues: $MX = B$, où $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{Z})$ et $B \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{Z})$.

Soit $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_s, 0, 0, \dots, 0)$, où $s = \min(m, n)$, la forme de Smith de la matrice M : il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $QMP = D$. Alors, $Q^{-1}DP^{-1} = M$ et le système précédent devient: $(Q^{-1}DP^{-1})X = B$. On en déduit: $D(P^{-1}X) = QB$ soit en posant: $Y = P^{-1}X = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_n)$ et $C = QB = {}^t(c_1, c_2, \dots, c_m)$: $DY = C$. Ce dernier système s'écrit sous la forme suivante:

$$d_1 y_1 = c_1, \quad d_2 y_2 = c_2, \dots, d_s y_s = c_s, \quad 0 = c_{s+1}, \dots, 0 = c_m.$$

La solution de ce dernier système existe si et seulement si pour tout i tel que $1 \leq i \leq s$ on a $d_i \mid c_i$ et pour tout i tel que $s < i \leq n$ on a $c_i = 0$. Connaissant les y_i on obtient les x_i en remplaçant la valeur obtenue dans $X = PY$.

Exemple 3. Soit à résoudre le système diophantien : $MX = B$, où la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et la matrice } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (où } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{)}.$$

On constate que la forme de Smith de la matrice M est : $D=QMP=diag(1, 1, 2, 0)$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $Y = P^{-1}X$ et $C = QB = {}^t(1, 1, -4, 0)$. Alors $DY = C$ soit les quatre équations diophantiennes suivantes : $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $2y_3 = -4$ et $0y_4 = 0$. Le système est résoluble et on a : $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -2$ et $y_4 = k$, où k est arbitraire dans \mathbb{Z} . Le système original admet donc pour solution: $X = PY = {}^t(5, -1 + k, -2 + 2k, k)$. Par contre, si $B = {}^t(1, 1, 3, -1)$, le système n'est pas résoluble.

III. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée. \mathbb{K} étant un corps commutatif, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Considérant alors l'anneau principal $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$, le théorème de Smith conduit à une décomposition particulière de χ_M , *polynôme caractéristique* de la matrice carrée M . Soit en effet la matrice polynomiale (à coefficients dans l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$) définie par $N = XI_n - M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. D'abord une définition.

Définition 1. On appelle *facteurs invariants de similitude* de la matrice M , les polynômes obtenus en normalisant les facteurs invariants de la matrice polynomiale $N = XI_n - M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. Dans ce cas la *norme d'un polynôme* est son degré.

Exemple 4. Trouver les facteurs invariants de similitude de la matrice réelle $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Dans ce but on se propose de trouver la forme de Smith de la matrice polynomiale $N = XI_3 - M$ soit de la matrice $N = (n_{ij}) = \begin{pmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 2 & X & 1 \\ -6 & -3 & X-4 \end{pmatrix}$.

1) $a = d^o(1) = 0$. $N \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X+1 & 1 \\ X & 2 & 1 \\ -3 & -6 & X-4 \end{pmatrix} = N_1$: on échange les colonnes 1 et 2 afin d'obtenir $n_{11} = 1$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -X & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times N_1 = \begin{pmatrix} 1 & X+1 & 1 \\ 0 & -X^2 - X + 2 & 1 - X \\ 0 & 3X - 3 & X - 1 \end{pmatrix} = N_2$: on obtient des 0 en n_{21} et n_{31} ;

3) $N_2 \times \begin{pmatrix} 1 & -X - 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X^2 - X + 2 & 1 - X \\ 0 & 3X - 3 & X - 1 \end{pmatrix} = N_3$: on obtient des 0 en n_{12} et n_{13} ;

4) on recommence avec la matrice (2×2) suivante: $\begin{pmatrix} -X^2 - X + 2 & 1 - X \\ 3X - 3 & X - 1 \end{pmatrix}$;

5) $a = d^o(1 - X) = 1$. $N_3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - X & 2 - X - X^2 \\ 0 & X - 1 & 3X - 3 \end{pmatrix} = N_4$;

on échange les colonnes 2 et 3 afin d'obtenir $a = 1 - X$ en position n_{22} ;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - X & 2 - X - X^2 \\ 0 & 0 & -1 + 2X - X^2 \end{pmatrix} = N_5$: on fait apparaître 0 en position n_{32} ;

7) $N_5 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 - X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - X & 0 \\ 0 & 0 & -1 + 2X - X^2 \end{pmatrix} = N_6$: on fait apparaître 0 en position n_{23} .

N_6 est la forme de Smith de la matrice polynomiale N . On obtient les facteurs invariants de similitude de la matrice M en normalisant les polynômes diagonaux de N_6 : $(X - 1)^2$ et $X - 1$.

Exercice. Trouver les facteurs de similitude de la matrice réelle

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse: La matrice M admet un seul facteur invariant de similitude, à savoir le polynôme normalisé $P = (X^2 + 1)(X - 1)$.

Remarque. Si $(P_1 | P_2 | \dots | P_s)$ désigne la suite des facteurs invariants de la matrice M , on a : $P_s = m_M$ polynôme minimal de M et $\prod P_i = \chi_M$ polynôme caractéristique de M (- voir définition 1 -).

Références

1. I.D. Ion, N. Radu – *Algebra*, Editura didactică și pedagogică, București, 1991.

An inductive proof of the Cayley-Hamilton theorem

*N. ANGHEL*¹

Abstract. In this note we investigate a computational proof of the Cayley-Hamilton theorem, based on induction.

Keywords: matrix, Cayley-Hamilton theorem, characteristic polynomial, induction.

MSC 2010: 15A24, 15A18, 11C08, 11C20.

In a recent issue of *Recreații Matematice* [2] M. Tetiva explored the possibility of providing a computational proof for the Cayley-Hamilton theorem. This elegant result in Matrix Theory states that for any $n \times n$ complex matrix A one has

$$(5) \quad A^n - s_1 A^{n-1} + s_2 A^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} A + (-1)^n s_n I_n = O_n,$$

where s_1, s_2, \dots, s_n are the (un-signed) coefficients of the characteristic polynomial $p_A(\lambda)$ of A , given by

$$(6) \quad p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - s_1 \lambda^{n-1} + s_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} \lambda + (-1)^n s_n.$$

As pointed out in [2] there are many proofs for this theorem. Perhaps the most recognizable one [1] starts by addressing first the case of diagonalizable matrices, for which the theorem is a tautology. Typically, these proofs fail to capture the dynamic interplay between the entries of the various powers of A and the coefficients of the characteristic polynomial of A . In other words, while we know how to multiply matrices, on one hand, and we know that, equivalently, the characteristic coefficient s_i , $i = 1, \dots, n$, equals the sum of the $\binom{n}{i}$ diagonal minors of A (i.e., the determinants of the sub-blocks of A obtained by eliminating the same $n - i$ rows and columns of A), on the other hand, we do not know the subtle assembling of them that makes up (5). Only a computational proof of (5), which amounts to the verification of n^2 polynomial identities involving the entries of A , would provide that.

The above points are taken up in [2] for the first non-trivial case, $n = 3$, by reducing the problem to invertible matrices A , when (5) becomes equivalent to

$$(7) \quad A^2 - s_1 A + s_2 I_3 - s_3 A^{-1} = O_3.$$

The ease of computing A^2 and the usual expressions for the entries of A^{-1} make the verification of (7) simple. Although not mentioned in [2], the case $n = 4$ can be handled similarly, by showing that

$$(8) \quad A^2 - s_1 A + s_2 I_4 - s_3 A^{-1} + s_4 (A^{-1})^2 = O_4.$$

It is worth saying that originally Cayley verified (5) in the case $n = 3$ by brute-force calculation [1]. It is also apparent that a verification of (5) by the above methods becomes untenable for $n \geq 5$.

¹Department of Mathematics, University of North Texas, Denton; e-mail: angel@unt.edu

The purpose of this note is to provide a proof for the Cayley-Hamilton theorem for arbitrary n that certainly captures some of the computational flavour sought after above. The proof is done by induction on n . It is very unlikely that this proof is new, however we do not have a reference for it. The proof is also very elementary. It uses only standard facts about matrices, such that: *a*) any complex square matrix admits an eigenvalue, *b*) The coefficients of the characteristic polynomial $p_A(\lambda)$ are left invariant by transposition or similarity changes of A . Consequently, the Cayley-Hamilton equation (5) holds for A if and only if it holds for A^T , or for $M^{-1}AM$, M invertible matrix.

To get the inductive step under way, assume now that (5) holds for any matrix A of size n , for some fixed integer n . We want to show that then it also holds for matrices B of size $n + 1$. To this end, let $\mu \in \mathbb{C}$ be an eigenvalue for B^T with corresponding eigenvector $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{n+1}$, written as a column vector. By extending the vector \mathbf{b} to a basis in \mathbb{C}^{n+1} and then representing B^T in this new basis, we conclude that B is similar to a matrix $B_0 := \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix}$, for some vector $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ and some complex $n \times n$ matrix A . Therefore, it suffices to prove (5) for the particular conjugate B_0 of B .

Suppose first that μ is not an eigenvalue of A . It is then easily seen that for any positive integer k ,

$$(9) \quad B_0^k = \begin{bmatrix} \mu^k & 0 \\ \sum_{i=0}^{k-1} \mu^i A^{k-1-i} \mathbf{a} & A^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^k & 0 \\ (A - \mu I_n)^{-1} (A^k - \mu^k I_n) \mathbf{a} & A^k \end{bmatrix}.$$

Also, by using the characterization of s_i one can see that

$$(10) \quad s_i(B_0) = \mu s_{i-1}(A) + s_i(A), \quad i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

where we convene that $s_0(A) = 1$ and $s_{n+1}(A) = 0$.

In view of (9), the verification of the Cayley-Hamilton equation for B_0 is equivalent with checking that

$$(7) \quad \mu^{n+1} - s_1(B_0)\mu^n + s_2(B_0)\mu^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n(B_0)\mu + (-1)^{n+1} s_{n+1}(B_0) = 0,$$

and that

$$(8) \quad A^{n+1} - s_1(B_0)A^n + s_2(B_0)A^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n(B_0)A + (-1)^{n+1} s_{n+1}(B_0)I_n = O_n.$$

Both checks are straightforward, by making use of the contents of (10) and of the inductive hypothesis on A .

If μ does happen to be an eigenvalue for A one can replace A by $A - zI_n$ in B_0 , which for values of $z \in \mathbb{C}$ close to 0 does not have μ as an eigenvalue, and then reach the desired conclusion for the original B_0 via a limiting argument.

References

1. **J.H. Hubbard, B.B. Hubbard** – *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms – A Unified Approach*, 4th Edition, Matrix Editions, Ithaca, 2009.
2. **M. Tetiva** – *Se poate demonstra teorema Cayley-Hamilton prin calcul direct? (in Romanian)*, *Recreații Matematice (Iași-Romania)*, XVI (2014), nr. 1, 42-43.

Un procedeu de abordare a unor probleme de extrem geometric

Daniel VĂCARU¹

Abstract. In this methodical Note, a procedure for solving geometrical problems of various types is presented and applied.

Keywords: right-angled triangle, decreasing function, extreme value.

MSC 2010: 97D40.

În această Notă, indicăm un procedeu de rezolvare a unor probleme de geometrie în care se cere determinarea unei valori de extrem sau unei condiții de realizare a unui extrem.

Esența procedurii este cuprinsă în următoarele leme:

Lema 1. Dacă funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ satisface condiția $f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = f(t)$, $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, și este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, atunci $f(t) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, cu egalitate dacă și numai dacă $t = \frac{\pi}{4}$.

Demonstrație. În condițiile din enunț, dreapta $x = \frac{\pi}{4}$ este axă de simetrie a graficului funcției f și afirmațiile dorite rezultă imediat.

Lema 2. Dacă funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ satisface condiția $f(t) + f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 0$, $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, și este strict crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, atunci ecuația $f(x) + f(y) = 0$, $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, are ca soluții perechile $\left(t, \frac{\pi}{2} - t\right)$, $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Demonstrație. Afirmația rezultă din faptul că punctul $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ este centru de simetrie al graficului funcției f .

Problema 1 [5]. În orice triunghi dreptunghic are loc inegalitatea

$$\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq 2\sqrt{2},$$

cu egalitate dacă și numai dacă triunghiul dreptunghic este isocel.

Soluție. Deoarece în cazul triunghiurilor dreptunghice $R = \frac{a}{2}$ și $r = \frac{b+c-a}{2}$, avem

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} + \frac{r}{R} &= \frac{a}{b+c-a} + \frac{b+c-a}{a} = \frac{1}{\sin B + \sin C - 1} + \sin B + \sin C - 1 = \\ &= \frac{1}{\sin B + \cos B - 1} + \sin B + \cos B - 1. \end{aligned}$$

¹Profesor, Colegiul Economic „Maria Teiuleanu”, Pitești; e-mail: danvaccag@gmail.com

Considerăm funcția f dată de

$$f(t) = \frac{1}{\sin t + \cos t - 1} + \sin t + \cos t - 1, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Evident, $f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = f(t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Putem scrie f în forma $f = h \circ g$, unde

$$g(t) = \sin t + \cos t - 1, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

și

$$h(x) = \frac{1}{x} + x, \quad x \in (0, 1).$$

Cum $g(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) - 1$, deducem că g este strict crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Tot pe cale elementară (de exemplu, apelând la definiție), se stabilește că h este strict descrescătoare pe $(0, 1)$. Ca urmare, $f = h \circ g$ este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Conform Lemei 1, obținem că $f(t) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică $\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}$, cu egalitate dacă și numai dacă $B = \frac{\pi}{4}$.

Observație. Într-un triunghi oarecare are loc $\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq \frac{5}{2}$, iar semnul de egalitate apare numai pentru triunghiuri echilaterale [1].

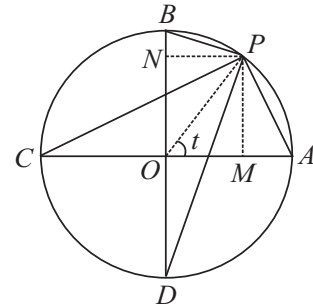
Problema 2 [4]. Fie $ABCD$ un pătrat înscris într-un cerc și P un punct pe arcul (mic) \widehat{AB} . Determinați minimumul expresiei $\frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PB}$.

Soluție. Notăm cu O centrul cercului și considerăm raza lui egală cu 1. Fie $t = m(\widehat{AOP}) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $M = pr_{AC}P$, $N = pr_{BD}P$. Evident, $OM = NP = \cos t$ și $ON = MP = \sin t$. Cu teorema lui Pitagora, obținem:

$$\begin{aligned} PC^2 &= (1 + \cos t)^2 + \sin^2 t, \text{ deci } PC = 2 \cos \frac{t}{2}; \\ PD^2 &= (1 + \sin t)^2 + \cos^2 t, \text{ deci } PD = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right); \\ PA^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t, \text{ deci } PA = 2 \sin \frac{t}{2}; \\ PB^2 &= (1 - \sin t)^2 + \cos^2 t, \text{ deci } PB = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Pentru raportul din enunțul problemei obținem:

$$f(t) = \frac{\cos \frac{t}{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}{\sin \frac{t}{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{t}{2}}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$



Punând f în forma $f(t) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})}$, deducem ușor că $f(\frac{\pi}{2} - t) = f(t)$, $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Pentru a arăta că f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \frac{\pi}{4}]$, punem f în forma $f = h \circ g$, unde

$$g(t) = \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad t \in (0, \frac{\pi}{4}],$$

$$h(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (0, \sqrt{2}-1];$$

într-adevăr, g este strict crescătoare pe $(0, \frac{\pi}{4}]$ și ia valori în $(0, \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}) \equiv (0, \sqrt{2}-1]$, pe când h este strict descrescătoare pe $(0, \sqrt{2}-1]$ (fapt ce se stabilește cu sau fără utilizarea derivatei).

Conform Lemei 1, avem $f(t) \geq f(\frac{\pi}{4})$, cu semnul egal numai pentru $t = \frac{\pi}{4}$. Deci,

$$\frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PB} \geq \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8})} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} = 3 + 2\sqrt{2},$$

iar valoarea $3 + 2\sqrt{2}$ este luată de raport dacă și numai dacă punctul P este mijlocul arcului \widehat{AB} .

Problema 3. Fie ABC un triunghi oarecare și punctul $M \in (BC)$. Determinați poziția lui M pentru care funcția

$$F(M) = \frac{AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2}{BC^2 \cdot MA^2}$$

are valoare extremă.

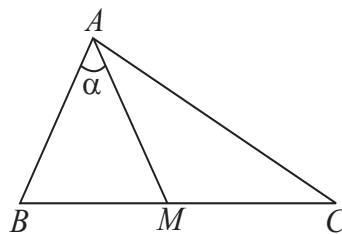
Soluție. Punctul M are poziția precizată de $\alpha = m(\widehat{MAB})$. Cu teorema

sinusurilor, avem: $MA = \frac{c \sin B}{\sin M}$, $MB = \frac{c \sin \alpha}{\sin M}$ și

$MC = \frac{b \sin(A - \alpha)}{\sin M}$. Ca urmare, obținem:

$$F(\alpha) = \frac{b^2 c^2 \sin^2(A - \alpha) + b^2 c^2 \sin^2 \alpha}{a^2 c^2 \sin^2 B} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 A} [\sin^2 \alpha + \sin^2(A - \alpha)]$$



și apoi, utilizând formula $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, vom avea:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sin^2 A} [1 - \cos A \cdot \cos(A - 2\alpha)], \quad \alpha \in (0, A).$$

Se arată ușor că $F(A - \alpha) = F(\alpha)$, $\alpha \in (0, A)$. În privința monotoniei funcției F pe intervalul $(0, \frac{A}{2}]$ distingem cazurile:

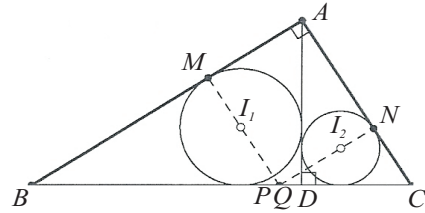
Dacă $A < \frac{\pi}{2}$, atunci $\cos A > 0$ și deducem că F este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{A}{2}\right]$. Aplicând Lema 1 adaptată la intervalul $\left(0, \frac{A}{2}\right]$, rezultă că $F(\alpha) \geq F\left(\frac{A}{2}\right)$, $\alpha \in (0, A)$. Prin urmare, dacă unghiul A este ascuțit, atunci funcția F are un minim când M este piciorul bisectoarei unghiului A și valoarea acestuia este $\frac{1}{1 + \cos A}$.

Dacă $A > \frac{\pi}{2}$, funcția F este strict crescătoare pe $\left(0, \frac{A}{2}\right]$ și vom avea $F(\alpha) \leq F\left(\frac{A}{2}\right)$, $\alpha \in (0, A)$. Deci, dacă triunghiul este obtuzunghic în A , funcția F are un maxim egal cu $\frac{1}{1 + \cos A}$ în piciorul bisectoarei din A și numai în acest punct.

Dacă $A = \frac{\pi}{2}$, se constată direct că $F(\alpha) = 1$, $\alpha \in (0, A)$, adică F este o funcție constantă. Așadar, dacă un triunghi ABC este dreptunghic în A , atunci pentru orice $M \in (BC)$ are loc relația $AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 = BC^2 \cdot MA^2$ (teorema lui Van Aubel) ([2], p. 51).

Problema 4 ([3], p.30). Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și D piciorul înălțimii din vârful A . Notăm cu I_1 și I_2 incentrele triunghiurilor ADB , respectiv ADC și cu M, N proiecțiile lor pe AB , respectiv AC . Dacă I_1M și I_2N se intersectează pe BC , atunci triunghiul ABC este dreptunghic în A .

Soluție. Notăm cu P, Q intersecțiile dreptelor I_1M , respectiv I_2N cu BC . Din $I_1M \perp AB$ și $I_2N \perp AC$ rezultă că



$$BP = \frac{BM}{\cos B} = \frac{AB + BD - AD}{2 \cos B} = \frac{c(1 + \cos B - \sin B)}{2 \cos B},$$

$$CQ = \frac{CN}{\cos C} = \frac{AC + CD - AD}{2 \cos C} = \frac{b(1 + \cos C - \sin C)}{2 \cos C}.$$

Condiția din enunțul problemei revine la $BP + CQ = a$ și se scrie

$$\frac{\sin C(1 + \cos B - \sin B)}{2 \cos B} + \frac{\sin B(1 + \cos C - \sin C)}{2 \cos C} = \sin A$$

sau, ținând seama de relația $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$,

$$\sin C \left(\frac{1 + \cos B - \sin B}{2 \cos B} - \cos B \right) + \sin B \left(\frac{1 + \cos C - \sin C}{2 \cos C} - \cos C \right) = 0.$$

sau, în final,

$$\frac{\cos B - \sin B - \cos 2B}{2 \sin B \cos B} + \frac{\cos C - \sin C - \cos 2C}{2 \sin C \cos C} = 0.$$

Această condiție se scrie sub forma

$$(*) \quad f(B) + f(C) = 0, \quad B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

unde $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin

$$f(t) = \frac{\cos t - \sin t - \cos 2t}{2 \sin t \cos t}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Observăm că $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ și că $f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -f(t)$ sau $f(t) + f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 0$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică punctul $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ este centru de simetrie pentru graficul funcției f . Dacă scriem f sub forma

$$f(t) = \frac{1}{2 \cos t} \left(\frac{\sin \frac{3t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} - 1 \right), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

și observăm că ambii factori sunt funcții strict crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, deducem că f este strict crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Conform Lemei 2, ecuația (*) admite numai soluțiile $B = t$, $C = \frac{\pi}{2} - t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică B și C sunt complementare și, deci, triunghiul ABC este dreptunghic în A .

Observație. Soluțiile date pe baza procedurii propusă diferă de cele aflate în sursele indicate în bibliografie.

Sugerăm cititorilor să rezolve cu acest procedeu problemele următoare:

1. Arătați că într-un triunghi dreptunghic, cu $A = \frac{\pi}{2}$, au loc inegalitățile:

(i) $\frac{R}{p} + \frac{p}{R} \leq 2\sqrt{2}$;

(ii) $\frac{r_a}{r} + \frac{r}{r_a} \geq 6$.

În ce condiții aceste relații devin egalități?

2. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct pe latura BC . Să se determine valorile extreme ale funcției

$$F(M) = \frac{AB \cdot MC + AC \cdot MB}{BC \cdot MA}, \quad M \in (BC).$$

Bibliografie

1. **L. Bankoff** – *Problema Q417*, Math. Mag., 40 (1967), 289; **D.S. Mitrinović** et al – *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publisher, 1988, 165.
2. **D. Brânzei** et al. – *Geometrie. Clasa a IX-a*, ed. a III-a, Paralela 45, Pitești, 1998.
3. **A.G. Brojbeanu** – *Câteva proprietăți remarcabile ale triunghiului dreptunghic*, *Recreații Matematice*, 1/2014, 30-34.
4. **P. Ligouras** – *Problem J286*, *Mathematical Reflections*, 6/2013.
5. **D. Milošević** – *Problem 3767*, *Crux Mathematicorum*, 7/2012.

CUM CONCEPEM ... CUM REZOLVĂM

De la o problemă de pe forum la conjectura funcțiilor continue care comută

Valeriu BRAȘOVEANU, Marian TETIVA ¹

Abstract. The article provides a mathematical story about how one can get from a simple problem to more and more complicated and deeper issues, concerning fixed points of continuous and monotonic functions. We lead the reader from well-known results as Knaster's or Brouwer's theorems to less known and more subtle results as the conjecture of commuting continuous functions.

Keywords: fixed point, continuous function, monotonic function, commuting functions, Knaster's theorem.

MSC 2010: 47H10, 54H25.

1. Preliminarii. *Teorema de punct fix a lui Brouwer* ([5], dar se poate consulta cu succes și Wikipedia) ne spune că *orice funcție continuă definită pe o bilă închisă din spațiul euclidian \mathbb{R}^n cu valori în aceeași bilă are (măcar) un punct fix*. Cazul particular al acestei teoreme în dimensiunea 1 ne este tuturor bine cunoscut (aici și mai departe a și b sunt numere reale cu $a < b$; se poate și $a = b$, dar nu e foarte interesant):

Propoziția 1. *Dacă $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ este o funcție continuă, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$.*

Demonstrație. Aplicând proprietatea lui Darboux funcției continue h definită prin $h(x) = f(x) - x$, $\forall x \in [a, b]$, pentru care avem $h(a) \geq 0$ și $h(b) \leq 0$, rezultă existența unui $c \in [a, b]$ cu proprietatea $h(c) = 0$, adică rezultă existența unui punct fix pentru f .

Se mai poate ușor observa că, de fapt, nu e nevoie ca funcția să ia valori în intervalul $[a, b]$: e suficient să avem $f(a) \geq a$ și $f(b) \leq b$ - și se poate și invers -, astfel că e valabil următorul enunț:

Propoziția 1'. *Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pentru care $f(a) \geq a$ și $f(b) \leq b$, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$. De asemenea, dacă $f(a) \leq a$ și $f(b) \geq b$, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$.*

O întrebare naturală se pune: există oare o teoremă de acest tip și pentru alte clase de funcții? Și tot în mod natural ne îndreptăm gândul către funcțiile monotone. Exemplul funcției

$$f(x) = \begin{cases} a + b - x, & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ a, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$$

ne descurajează imediat în privința funcțiilor descrescătoare (f ia valori în $[a, b]$, este descrescătoare și nu are nici un punct fix; o ușoară modificare a lui f poate furniza

¹Profesori, Colegiul Național „Gheorghe Roșca Codreanu”, Bârlad

și un exemplu de asemenea funcție *strict* descrescătoare). Totuși, avem următorul rezultat (poate mai puțin cunoscut decât Propoziția 1, dar suficient de cunoscut):

Propoziția 2. *Dacă $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ este o funcție monoton crescătoare, atunci f are (măcar) un punct fix.*

Demonstrație. Fie M mulțimea acelor x din $[a, b]$ pentru care $x \leq f(x)$. Avem $a \in M$, deci M este nevidă și, desigur, ea este și mărginită, fiind inclusă în intervalul compact $[a, b]$. Dacă $s = \sup M$, rezultă în mod clar că $s \in [a, b]$. De asemenea, se vede ușor că $x \in M$ implică $f(x) \in M$ (datorită monotoniei funcției f , $x \leq f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(f(x))$). Cum $x \leq s$ pentru orice $x \in M$, avem și $x \leq f(x) \leq f(s)$, pentru orice $x \in M$, deci $s \leq f(s)$ ($f(s)$ fiind cel puțin egal cu orice element din M trebuie să fie cel puțin egal și cu marginea superioară a acestei mulțimi). Asta ne arată că s este el însuși un element al mulțimii M , deci $f(s) \in M$ și atunci $f(s) \leq \sup M = s$. Dar $s \leq f(s)$ și $f(s) \leq s$ înseamnă că $f(s) = s$, deci s este punct fix pentru f , încheind demonstrația.

Exercițiu. Demonstrați în mod analog că infimumul mulțimii $N = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq x\}$ este punct fix pentru f . (Ceea ce - atenție! - nu înseamnă că ar fi asigurată existența a două puncte fixe pentru f în condițiile enunțului, ci doar că avem două variante de demonstrație.)

Observație. Putem numi Propoziția 2 teorema lui Knaster, deși ea nu reprezintă decât un caz particular al acestei teoreme. De fapt, în cazul general, ea se numește *teorema Knaster-Tarski* și se enunță în termeni de teoria laticelor: *dacă L este o latice completă și $f : L \rightarrow L$ este o funcție care păstrează ordinea (putem să o numim tot funcție crescătoare), atunci mulțimea punctelor fixe ale lui f formează, de asemenea, o latice completă.* În particular, rezultă că această mulțime este nevidă, deci că f admite puncte fixe. Nu intrăm în aceste amănunte (pentru cei interesați articolul de pe Wikipedia e destul de riguros și detaliat), dar vă propunem următorul

Exercițiu. Fie E o mulțime nevidă, $P(E)$ mulțimea părților lui E și $f : E \rightarrow E$ o funcție crescătoare, adică o funcție cu proprietatea că $f(X) \subseteq f(Y)$, pentru orice $X, Y \in P(E)$ cu $X \subseteq Y$. Există atunci $C \in P(E)$ astfel încât $f(C) = C$.

Se pare că aceasta a fost forma în care Knaster a demonstrat inițial teorema în 1928 (forma generală fiind publicată abia în 1955). În zilele noastre ea a apărut (și probabil va mai apărea o vreme) pe la diverse concursuri de matematică pentru elevi.

O frumoasă legătură între propozițiile enunțate anterior a făcut **Sebastian Anița** [2], anume:

Propoziția 3. *Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu $g(a) \leq g(b)$ și $f : [a, b] \rightarrow [g(a), g(b)]$ o funcție crescătoare. Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = g(c)$.*

Demonstrație. În spiritul demonstrației Propoziției 2 (care se obține din Propoziția 3 pentru $g(x) = x$; iar pentru $f(x) = x$ obținem partea a doua a Propoziției 1'), să considerăm mulțimea

$$M = \{x \in [a, b] \mid g(x) \leq f(x)\}$$

și $s = \sup M$. (Observați că, totuși, demonstrația de mai sus a Propoziției 2 nu funcționează prin analogie și pentru Propoziția 3. Ipoteza continuității funcției g , coroborată cu - doar - monotonia lui f solicită utilizarea unui instrument care să funcționeze pentru amândouă; e vorba despre trecerea la limită.) Mulțimea M este nevidă ($a \in M$) și există un șir (s_n) de elemente din M care are limita s ; pentru fiecare $s_n \in M$ avem, desigur, $g(s_n) \leq f(s_n)$, deci prin trecere la limită obținem

$$g(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = \lim_{x \rightarrow s, x < s} f(x) \leq f(s)$$

(funcția f fiind crescătoare are limite laterale în s , limita la stânga fiind cel mult egală cu valoarea funcției acolo). Dacă $s = b$ demonstrația este încheiată, căci am obținut $g(b) \leq f(b)$, iar enunțul ne spune că $f(b) \leq g(b)$, așadar se poate considera $c = b$. Altminteri avem $g(x) > f(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, $x > s$ (un asemenea x nu aparține mulțimii M), deci, iarăși prin trecere la limită, avem

$$g(s) = \lim_{x \rightarrow s, x > s} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow s, x > s} f(x) \geq f(s).$$

Se obține deci și în acest caz că $g(s) \leq f(s)$ și $f(s) \leq g(s)$, adică $f(s) = g(s)$ și putem lua $c = s$.

O demonstrație elegantă, care utilizează lema intervalelor închise incluse, poate fi găsită în [8], la paginile 228-230.

Exercițiu. Arătați că există $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ crescătoare, cu $f(a) < g(a)$ și $f(b) > g(b)$, astfel încât $f(x) \neq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Dacă dorim, putem impune și condiții asupra codomeniului lui g , și tot vom putea găsi destul de ușor asemenea exemple. În schimb nu mai e necesară condiția în privința ordinii între $g(a)$ și $g(b)$.

2. Care este, de fapt, problema? Problema ni s-a arătat pe un forum de discuții matematice (TheMathForum@Drexel, 12 august 2008), iar în această notă intenționăm să explicăm cam cum am gândit pornind de la ea, în speranța că le va fi de folos și altora. Ea suna cam așa:

Exercițiu. Fie f și g două funcții continue pe $[0, 1]$ astfel încât $f([0, 1]) = g([0, 1]) = [0, 1]$, f și g comută (adică $f(g(x)) = g(f(x))$, $\forall x \in [0, 1]$), iar f este strict crescătoare. Să se arate că există un $x_0 \in [0, 1]$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

De la bun început se pare că sunt prea multe condiții. Având în minte toate rezultatele din preliminarii, ne dăm repede seama că se poate renunța la unele dintre ele. De exemplu, știm că f are un punct fix, să-l numim c . Condiția de comutativitate ne spune că $f(g(c)) = g(f(c))$, adică $f(g(c)) = g(c)$ (pentru că $f(c) = c$), cu alte cuvinte ne spune că și $g(c)$ este punct fix pentru f . Astfel am obținut fără mare efort următorul rezultat a cărui demonstrație cititorul o va completa cu ușurință:

Propoziția 4. Fie $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ o funcție continuă care are un singur punct fix în intervalul $[a, b]$ și $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ o funcție care comută cu f . Atunci f și g au un punct fix comun.

Se prea poate ca propunătorul problemei de pe forum să fi avut în vedere și un asemenea enunț. Se vede că am renunțat la multe dintre condițiile date inițial, dar

cu prețul adăugării unei alte condiții suficient de restrictive pentru f . Chiar și așa, bănuiala că în problema originală ipoteza este supraaglomerată rămâne. Rafinând puțin raționamentul de mai sus, vedem că putem arăta (ceva mai elaborat) și

Propoziția 5. *Fie $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ funcții continue care comută și astfel încât una dintre ele este crescătoare. Atunci f și g au un punct fix comun.*

Demonstrație. Să presupunem că g este funcția despre care știm că e crescătoare. Există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$ (conform Propoziției 1), iar folosind condiția $g \circ f = f \circ g$ obținem (ca mai sus) că $g(c)$ este de asemenea punct fix pentru f . Analog obținem că $g^{[n]}(c)$ este punct fix pentru f oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, unde $g^{[n]} = g \circ \dots \circ g$ este a n -a iterată a lui g .

Să presupunem, de exemplu, că avem $c \leq g(c)$. Folosind monotonia funcției g , rezultă $c \leq g(c) \leq g^{[2]}(c) \leq \dots$, adică rezultă că șirul $(g^{[n]}(c))_{n \geq 1}$ este crescător. De asemenea, acest șir este și mărginit (toți termenii săi sunt în intervalul $[a, b]$), deci el are o limită $l \in [a, b]$. Prin trecere la limită în relația $g(g^{[n]}(c)) = g^{[n+1]}(c)$ rezultă că $g(l) = l$, iar prin trecere la limită în $f(g^{[n]}(c)) = g^{[n]}(c)$ rezultă $f(l) = l$ (desigur, continuitatea funcțiilor f și g este esențială în aceste treceri la limită). Prin urmare limita l a șirului $(g^{[n]}(c))_{n \geq 1}$ este un punct fix comun pentru f și g . Demonstrația se încheie dacă mai observăm că în cazul $g(c) \leq c$ se poate proceda absolut analog.

Dacă ați încercat să rezolvați problema originală se poate să fi fost conduși pe o pistă falsă de condițiile (vedem acum că inutile) $f([0, 1]) = g([0, 1]) = [0, 1]$. (Noi bănuim că autorul a vrut să spună doar că f și g au valori în $[0, 1]$.) De asemenea, faptul că monotonia unei funcții este strictă nu pare a fi important. Astfel că, ajunși aici, simțind cumva că am reperat o mică victorie, am trăit o vreme cu impresia că vom putea modifica (nu prea mult, credeam noi) raționamentul astfel încât să putem obține concluzia și fără ipoteza monotoniei uneia dintre funcții. Totuși, asta s-a dovedit o fundătură; deși avem în continuare șirul $(g^{[n]}(c))_{n \geq 1}$ de puncte fixe ale funcției f , și putem deduce că el are un subșir convergent (fiind mărginit), asupra acestui subșir nu mai avem nici un control. Putem arăta și acum că limita acestui subșir este punct fix pentru f , dar nu avem nici o șansă să obținem rezultatul similar pentru g . Nu putem nici măcar să arătăm că această limită este ceea ce se numește un *punct periodic* pentru g , adică un punct fix al unei anumite funcții $g^{[k]}$, $k \in \mathbb{N}^*$. E drept că repetând cumva raționamentul din Propoziția 2, putem demonstra

Propoziția 5'. *Fie $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ două funcții care comută astfel încât g este crescătoare și mulțimea F a punctelor fixe ale lui f are proprietatea că supremumul oricărei submulțimi a lui F aparține, de asemenea, lui F . Atunci f și g au un punct fix comun.*

În esență este vorba de argumentul din demonstrația Propoziției 2 (cazul particular al teoremei Knaster-Tarski), aplicat funcției g definită pe mulțimea punctelor fixe ale lui f . Pare să fie un enunț foarte general (și este) dar e greu să obții de aici prea multe cazuri particulare interesante.

Ne aflăm într-un impas: părea că ne scapă nouă ceva, și chiar așa era - dar nu în sensul în care credeam noi.

A fost momentul în care am descoperit câteva articole [1,3,4,6,7] (toate se găsesc pe Internet la îndemâna oricui) în care era vorba despre *conjectura funcțiilor continue care comută*, formulată de către **Eldon Dyer** în 1954, **A. J. Shields** în 1955 și **Lester Dubins** în 1956. Aceasta postula că *două funcții* $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ *continue și care comută au un punct fix comun*. Se știa încă de pe la 1920 că rezultatul este adevărat pentru funcții polinomiale (**J. F. Ritt**), iar **A. J. Schwartz** reușise să demonstreze [6] că două asemenea funcții dintre care una este derivabilă cu derivata continuă au cu siguranță un punct periodic comun (mai precis, dacă f este derivabilă cu derivata continuă, există un $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $x_0 = f(x_0) = g^{[m]}(x_0)$ pentru un anumit număr natural $m \geq 1$). Totuși, în 1969, **William M. Boyce** [3] și **John Hunecke** [4] au reușit să construiască exemple de funcții continue care comută și nu au puncte fixe comune, infirmând definitiv conjectura. De asemenea, în cel mai recent articol [7] (din 1999) pe care l-am găsit pe această temă se spune că e mai degrabă plauzibil să *nu* fie asigurată (în general, pentru funcții doar continue) nici măcar existența punctelor periodice comune, dar un contraexemplu nu era cunoscut atunci.

Toate demonstrațiile (și exemplele ce contrazic conjectura) sunt cu mult peste nivelul acestei expuneri, iată deci că nu aveam nici o șansă de a rezolva problema fără a citi despre ea. Așa că ne-am gândit la alte sensuri în care problema ar mai putea fi studiată, de exemplu pentru alte clase de funcții. Cel mai natural este să ne întrebăm ce se întâmplă pentru funcțiile monotone.

Exercițiu. Arătați că există funcții $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ care sunt monotone și care comută, dar nu au puncte fixe comune.

Gândiți-vă să alegeți cel puțin una dintre funcții descrescătoare, pentru că altminteri avem

Propoziția 6. *Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sunt funcții crescătoare care comută, atunci ele au cel puțin un punct fix comun.*

Demonstrație. Revenim la ideea din demonstrația Propoziției 2 (sau din demonstrația teoremei generale Knaster-Tarski). Anume, să considerăm mulțimea

$$M = \{x \in [a, b] \mid x \leq f(x) \text{ și } x \leq g(x)\},$$

care este nevidă ($a \in M$) și mărginită. Fie $s = \sup M$; desigur, $s \in [a, b]$.

Observăm că, dacă $x \in M$, avem $f(x) \in M$ și $g(x) \in M$. De exemplu, $x \leq f(x) \Rightarrow g(x) \leq g(f(x)) = f(g(x))$ și $x \leq g(x) \Rightarrow g(x) \leq g(g(x))$, astfel că $g(x) \in M$.

Apoi avem $x \leq f(x) \leq f(s)$ pentru orice $x \in M$ și, analog, $x \leq g(x) \leq g(s)$ pentru orice $x \in M$, ceea ce implică $s \leq f(s)$ și $s \leq g(s)$. Cu alte cuvinte, $s \in M$ și atunci, pe baza primei observații, $f(s) \in M$ și $g(s) \in M$. Dar asta înseamnă că $f(s) \leq s$ și $g(s) \leq s$, adică, finalmente, $f(s) = g(s) = s$ - punctul s este un punct fix comun pentru f și g - și demonstrația este încheiată.

3. Concluzii și teme. Nu ne-am propus în această notă să demonstrăm ceva nou, sau să găsim o demonstrație neașteptată pentru vreun rezultat mai vechi. Ne-am propus, în schimb, să trecem în revistă câteva teoreme (zicem noi) elegante de punct fix, așa cum ne-au venit în minte pe parcursul încercărilor de a rezolva o problemă - de fapt, nu numai de a o rezolva, dar și de a gândi pe marginea ei, de a o

generaliza, extinde, sau măcar de a vedea la ce rezultate asemănătoare ar mai putea ea să conducă. Cititorul poate observa că, lucrând la această problemă - în sensul menționat -, ne-am amintit lucruri pe care le știam și, de asemenea, am aflat lucruri despre care nu auziserăm mai înainte. Așa se întâmplă de fiecare dată când ascultăm cu atenție întrebările altora - acestea vor conduce la propriile noastre întrebări, iar unele dintre aceste întrebări vor primi răspunsuri, altele vor rămâne misterioase - cel puțin deocamdată și, negreșit, altele nu vor fi prea interesante și nu vor duce nicăieri (totuși e nevoie și de acestea).

Încheiem cu încă vreo câteva întrebări pentru cititorii interesați.

Exercițiu. Unde se folosește, în Propoziția 2, sau în Propoziția 6, faptul că funcțiile au valori tot în intervalul $[a, b]$? (Nu e greu să ne dăm seama că lipsa acestei condiții din ipoteză afectează validitatea concluziei.)

Exercițiu. Demonstrați Propoziția 5' și formulați cazuri particulare interesante.

Exercițiu. Puteți extinde Propoziția 6 la un număr oarecare de funcții? Cum? Dar pentru o infinitate de funcții?

Exercițiu. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ două funcții continue cu proprietatea că $(f(x) - x)(g(x) - x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Să se arate că f și g au un punct fix comun. Mai rămâne valabilă concluzia dacă (păstrând ipoteza de continuitate) presupunem că $(f(x) - x)(g(x) - x) \leq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$?

Exercițiu. Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sunt două funcții crescătoare care comută și $f^{[n]} = g^{[n]}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $f = g$.

Exercițiu. Un foarte frumos rezultat despre punctele periodice ale unei funcții continue (și o splendidă realizare a analizei reale de la finele secolului al XX-lea) este teorema lui Șarkovski. Citiți despre această teoremă!

Ultimele două exerciții par să nu aibă legătură cu textul; dar, nu se poate spune la prima vedere dacă două rezultate au sau nu legătură. Surprize apar mereu.

Bibliografie

1. **A. Alikhani-Koopaei** – *On common fixed and periodic points of commuting functions*, Internat. J. Math. & Math. Sci., 21(1998),2, 269-276.
2. **S. Anița** – *Problema C:286*, GM 2/1983, p. 95.
3. **W.M. Boyce** – *Commuting Functions with no Common Fixed Point*, Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969), 77-92.
4. **J.P. Huneke** – *On Common Fixed Points of Commuting Continuous Functions on an Interval*, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 371-381.
5. **M. Rădulescu, S. Rădulescu** – *Teoreme și probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
6. **A.J. Schwartz** – *Common periodic points of commuting functions*, Michigan Math. J., 12(1965), 353-355.
7. **T.H. Steele** – *A note on periodic points and commuting functions*, Real Analysis Exchange, vol. 24(2), 1998/9, pp 781-790.
8. **N. Teodorescu & al** – *Probleme din Gazeta Matematică*, Editura Tehnică, București, 1984.

DIN ISTORIA MATEMATICII

Gazeta Matematică în anii Primului Război Mondial

Evenimentele din primul război mondial au fost puternic resimțite de **Societatea „Gazeta Matematică”** și membrii ei au făcut mari eforturi pentru a continua cea mai îndrăgită publicație românească de matematică.

În perioada de neutralitate a României (aug. 1914 - aug. 1916), tipărirea revistei **Gazeta Matematică** și toate activitățile Societății au decurs în mod normal. Numerele de revistă aveau în mod constant 40 de pagini, apăreau cu regularitate în fiecare lună la data de 15 și cuprindeau rubricile: articole, note matematice, chestiuni de examen, probleme rezolvate, exerciții și probleme propuse ș.a. Volumele sunt alcătuite din 12 numere și corespund unui an de studiu din învățământul public (15 sept.-15 aug.). Încep cu *Lista membrilor Societății* și se încheie cu o amplă *Tablă de materii* ce ordonează materialul publicat în anul respectiv, cu o grijă aparte pentru listele de probleme propuse, rezolvate și rezolvatori.

Manuscrisele se primeau acasă la ing. *Mihail A. Saligny* (fiul lui Anghel Saligny) în strada Occident nr. 10, București, iar pentru schimburile de reviste, alte chestiuni, se folosea adresa ing. *I. Ionescu*, str. Călușei nr. 23, București. De remarcat că aceste schimburi și contacte internaționale includeau, de-a lungul timpului, revistele *Educational Times*, *The Mathematical Gazette* (Londra), *Mathésis* (Belgia), *Supplemento al Periodico di Matematica* (Livorno), *Revista Societății Fizico-Matematice* (Sofia), *Bulletin de la Section Scientifique de l'Academie Roumaine*, *Gazeta Matematică* (Rusia), *Bulletin of the American Mathematical Society*. Un colaborator asiduu al Gazetei Matematice, cu multe note publicate (în franceză), era *N. Agromof* din Revel (azi Tallinn), Rusia. Tipografia Curtii Regale, F. Göbl Fii, str. Regală, nr.19, a fost utilizată până în decembrie 1915, apoi s-a folosit tipografia „Cooperativa”, str. Belvedere nr.6.

În fiecare număr de revistă, problemele rezolvate ocupă un spațiu larg; după prezentarea soluțiilor se indică numele rezolvitorilor și se dau adesea mai multe soluții. Printre rezolvitori, propunători de probleme și autori de note matematice găsim numele unor viitori iluștri matematicieni români: *Al. Pantazi*, *O. Mayer*, *P. Sergescu*, *M. Ghermănescu* ș.a.

Pe lângă rubricile amintite, revista își deschidea paginile și pentru a semnală cititorilor activitățile desfășurate de Societate sau unele evenimente importante. Astfel, *Concursurile Gazetei Matematice* din anii 1915 și 1916 sunt relatate pe larg, cu toate etapele de desfășurare: probele scrise și oralul, rezultatele și premiații (raportor *Gh. Țițeica*), banchetul tradițional. În aceeași ordine de idei, menționăm: constituirea *Fondului „Anghel Saligny”* destinat tipării de cărți cu caracter tehnic, acordarea *Premiilor „H. Capriel”* etc.

În numărul din octombrie 1914 (nr.2, An XX) este anunțată moartea *Regelui Carol I.* Societatea „Gazeta Matematică”, care s-a bucurat pe parcursul anilor de

atenția Regelui, se alătură prin membrii și colaboratorii săi la doliul național. (La expoziția din 1903, *Gazeta Matematică* a fost distinsă cu Medalia de Aur, iar Regele Carol I s-a interesat de revistă și a primit în audiență pe Gh. Țițeica, care i-a prezentat toate volumele apărute de *Gazetă*.)

Se publică numeroase texte privind istoria matematicii românești. Un articol remarcabil din ianuarie 1916 (nr.5, An XXI), este cel închinat de *Traian Lalescu* memoriei lui *N. Culiianu*, matematician, fost rector al Universității din Iași, junimist, participant activ pe o perioadă de aproape cinci decenii la viața culturală, la modernizarea societății din capitala moldavă. În același număr, sub semnătura lui *I. Ionescu*, apare articolul *Matematica în Regulamentul Organic*.

Începând cu primul număr al Anului XXI, după modelul revistei engleze *The Mathematical Gazette* se introduce mini-rubrica *Cereri*, animată de *I. Ionescu*. Aici se pun întrebări sau se solicită informații relativ la istoricul, studiul sau învățământul matematicilor în general, dar mai ales din țara noastră, cu un conținut foarte divers: date privind unele cărți vechi de matematică, echivalentul unor unități de măsură care apar în documente vechi, priorități etc.

Se publică de asemenea suplimente cu *Recreațiuni*, de exemplu, în februarie 1916, tema este matematica și literatura, cu numeroase citate din *V. Alecsandri* legate și de matematică.

Ultimul număr înainte de refugiu (nr.3, An XXII) a apărut în noiembrie 1916 la tipografia „Universală” din str. Covaci nr.14, dar membrii societății, aflați deja la Iași, nu au știut de asta multă vreme, conform mențiunii de pe coperta nr. 10-12, An XXII referitoare la necunoașterea cuprinsului acestui număr.

Din inițiativa lui *Ion Ionescu* și *Traian Lalescu* și cu sprijinul lui *Vasile Teodoreanu* (profesor la Liceul Național și Liceul Militar din Iași) și altor membri din redacție aflați în refugiu, *Gazeta Matematică* și-a reluat apariția la Iași. Societatea „*Gazeta Matematică*” a obținut dreptul de a trimite colaboratorilor aflați pe front numerele revistei. Manuscrisele trebuiau trimise la prof. univ. *Traian Lalescu* la Cenzura Militară Telegrafică Iași, iar pentru abonamente și orice alte chestiuni adresa era prof. *Gh. Nichifor* la Cenzura Militară Poștală Iași. Organizarea progresa: în nr.7 (martie 1917) adresa pentru manuscrise era prof. *Vasile Teodoreanu*, str. Săulescu nr.8., iar din februarie 1918, pentru abonamente și alte chestiuni, adresa era prof. *Gh. Nichifor*, str. Vulpei nr. 5, apoi ing. *C. Orășanu*, str. Cuza Vodă 71 (din mai 1918). Primul număr publicat în Iași a fost nr.4, An XXII, numărul pentru luna decembrie 1916, dar care a apărut doar în aprilie din anul următor și numai în 24 de pagini, la tipografia *H. Goldner*, str. *Gh. Mărzescu*. Aceasta întârziere și numerele duble sau triple se propagă până în 1920, mult după revenirea la București. Să notăm stabilitatea prețului (7,5 lei abonamentul anual), până la vol. XXIV, când devine 15 lei pe an, apoi 20 lei pe an la vol. XXVI, în 1920.

Pe prima pagină a nr.4, primul scos în condiții de refugiu, se află un emoționant *Cuvânt înainte*, redactat de *Traian Lalescu*, pe care-l redăm (în ortografia originală) mai jos:

In momentele grele pe cari le trăește astăzi poporul românesc, Gazeta Matematică împărtășește soarta țării sale: împiedicată de a apărea în București din cauza ocupării provizorii a primei noastre capitale, Societatea și-a putut reface aci organizarea nece-

sară pentru a publica mai departe *Gazeta Matematică* pe tot timpul cât va dura ad-versitatea noastră.

Avem mulțumirea să spunem că revista noastră își datorează apariția sa în Iași, în primul rând solicitării și zelului colaboratorilor noștri. Căldura cu care câți-va dintre cei mai buni corespondenți ai Gazetei – aflători astăzi în rândurile oștirii – au oferit serviciile lor, a fost pentru redacțiunea Gazetei Matematice, o răsplată și o adâncă mângăere sufletească. Ea ne-a arătat că activitatea educativă a Societății noastre, a trecut mai departe de ținta sa profesională; ea a isbutit să-și creeze din fiecare colaborator un prieten care se simte fericit să contribuie cu munca sa desinteresată la prosperitatea Gazetei.

Din cauza greutăților de tipărire, numerele de exil ale Gazetei vor avea un coprins mai redus, fără ca prin aceasta să fim obligați a renunța la vreuna din rubricile noastre obișnuite.

Dar să ne exprimăm speranța că revista noastră va urma până la urmă soarta țării sale și că, după această vremelnică comprimare, vom putea să dăm și noi Gazetei Matematice, estinderea potrivită cu noile condițiuni de viață isvorite din sacrificiile actuale ale poporului românesc.

Societatea „Gazeta Matematică” afirmă și revendică participarea, prin membrii și colaboratorii săi, la război, pe care-l consideră Războiul pentru Unitatea Națională a Românilor. Sentimentele pe care le manifestau față de armata țării aveau ca fundament „axioma”: *atâta timp cât Armata Română este în picioare, cugetarea română și dragostea pentru știință nu pot fi distruse.* Tot în acest curs al lucrurilor, în delegațiunea Societății (forul administrativ superior al ei) pentru anii XXII și XXIII a fost ales generalul *Scarlat Panaitescu*. La inițiativa acestuia, care oferă în același timp și fondurile necesare, se instituie un premiu anual de 200 lei ce urmează să se acorde autorului celui mai bun articol de matematică aplicată la științele militare. Primul Premiu „Scarlat Panaitescu” va fi acordat l-tului *Gh. Zapan* pentru lucrarea *Asupra câtorva elemente de tragere*, apărut anterior (An XXII, p. 102-107).

Articolele care tratează chestiuni de istoria și istoriografia matematicii sunt numeroase și ocupă un spațiu larg: *Viața și activitatea lui Gheorghe Lazăr* (T. Lalescu, serie de patru articole), *Un inventar al cărților de matematici* (I. Beleş, serie de trei articole), *Bibliografia românească matematică* (T. Lalescu) și *Cărți de matematici din Transilvania. Catalogul D-lui Onisifor Ghibu* (T. Lalescu). Un loc aparte printre contributori îl ocupă *C. Climescu*, care discută în mai multe articole un manuscris găsit în biblioteca *Seminarului „Veniamin Costache”* din Iași, intitulat „*Curs întreg de matematică curată*”, scris cu litere chirilice și care reprezintă o traducere după L.B. Francoeur.

Efectele negative ale războiului asupra Gazetei se manifestă nu numai în regularitatea apariției, numărului de pagini și calitatea hârtiei, ci și asupra structurii și conținutului ei. Gazeta este trimisă și așteptată pe frontul de luptă. Se primesc scrisori din primele linii; pentru combatanții aflați în mijlocul distrugerilor, Gazeta este o oază de lumină și o mângâiere. Numărul de pagini rezervate problemelor rezolvate și rezolvitorilor a descrescut drastic și chiar au existat numere în care această rubrică lipsește.

La 30 august 1917 are loc Adunarea Generală a Societății. În nr. 1-2 din sept.-

oct. 1917, de început al Anului XXIII, apare, conform cerințelor statutului Societății „Gazeta Matematică”, lista membrilor săi. În dreptul numelor lor se fac precizări ca: *rămas în teritoriul ocupat de inamic* (V. Cristescu, C. Malcoci, Gh. Țițeica, Gh. Nicolae-vici), *prizonier* (Gr. Orășanu) sau sunt indicate *gradele* (A. Ioachimescu - căpitan, I. Ionescu - maior, M. Roco - locotenent, Sc. Panaitescu - general) sau *funcțiile militare* avute (Gh. Nechifor - cenzura militară, O. Thierrin - atașat la misiunea militară franceză din Iași). Este de subliniat faptul că doi dintre „stâlpii” Gazetei au rămas în teritoriul ocupat al țării. Adunarea Generală decide ca paginile Gazetei să fie deschise problemelor de matematică aplicate în științe militare. Apar articole ca: *O știință matematică în serviciul războiului: balistica* (V. Vâlcovici, nr. 3-4, 1917), *Metodă pentru descoperirea tunurilor inamice* (lt. Gh. Zapan, ibidem), *Asupra ipotezei rigidității traectoriei* (lt. M. Ghermănescu, ibidem), *Bătăia maximă pentru terenuri înclinate* (lt. I. Linteș, ibidem), *Relațiunile dintre matematici și științele militare* (I. Ionescu, în mai multe numere) ș.a. Apar, în continuare, numeroase articole referitoare la istoria matematicii din România, bazate pe arhive din Iași.

Din când în când, Gazeta publică necrologul unui membru sau unui colaborator căzut la datorie pe câmpul de luptă: *Al. A. Roșu* (An XXII, p. 121), *C. D. Constantinescu* (An XXIII, p.15), *I. S. Teodorescu* (An XXIV, p. 65) ș.a., iar mai târziu *I. Ionescu* va evoca în cuvinte mișcătoare faptele și jertfa lor în articolul *În amintirea celor dispăruți* (An XXVI, p.14).

Anul XXIV găsește Gazeta Matematică din nou la București. Numărul 1-3, septembrie-noiembrie 1918, este tipărit la tipografia „Universală”, str. Covaci, nr.14, iar adresa de corespondență este ing. *I. Ionescu*, str. Călușei nr. 23. Fascicula respectivă a fost tipărită în 1919, de fapt, după cum rezultă dintr-o mică mențiune de pe copertă. Este publicat un articol al lui *Gh. Nechifor* intitulat „*Gazeta Matematică și Războiul pentru Unitatea Națională a Românilor*”. *Al. Myller*, viitorul academician, contribuie cu chestiuni de geometrie analitică (An XXIII, p. 241; An XXIV, p. 51) *Premiul „Vasile Conta”* pentru lucrări de filozofia matematică sau de matematică pură se acordă lui *D. V. Ionescu*, pe atunci student (An XXV, p. 81). La Strasbourg, pe 22 sept. 1920, este programat un *Congres de matematică* al națiunilor interaliate și neutre. După o întrerupere de patru ani, în aprilie 1921, se reia și *Concursul Gazetei*—primul din România întregită.

Începând cu vol. XXVI, tipografia este din nou F. Göbl Fii, str. Regală 19, iar de la nr.3 (toamna lui 1920) dispar numerele duble sau triple. Activitatea *Societății „Gazeta Matematică”* reintră în normalitate din toate punctele de vedere.

Bibliografie

1. *Gazeta Matematică*, t. XX - XXIV.
2. **F. Diac** – *Monografia Societății de Științe Matematice din România*, S.S.M.R., București, 1998.
3. **N. Mihăileanu** – *Revistele de matematici elementare*, Ed. Gil, Zalău, 1995.

Temistocle BÎRSAN
Univ. Tehnică „Gh. Asachi”, Iași

Dan TIBA
I.M.A.R., București

CONCURSURI ȘI EXAMENE

Concursul de matematică „Al. Myller”

Ediția a XII-a, Iași, 23 ianuarie 2014

Clasa a V-a

1. Se consideră numărul $N = 4^{2014} \cdot 5^{4032} + 18290$.
 - a) Determinați primele trei cifre și ultimele trei cifre ale lui N .
 - b) Arătați că numărul N este divizibil cu 2, 3, 5 și 10.
 - c) Demonstrați că N nu este pătrat perfect.
2. Demonstrați că 10^n se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte nenule, oricare ar fi numărul natural nenul n .
3. Se consideră n numere naturale consecutive astfel încât produsul tuturor resturilor nenule obținute la împărțirile celor n numere prin 5 este egal cu $3^{200} \cdot 4^{301}$. Determinați valorile posibile ale numărului n . (Marius Ghergu)

Clasa a VI-a

1. a) Se consideră mulțimea $A = \{a, a + 1, \dots, a + 9\}$, unde a este un număr natural oarecare. Găsiți trei submulțimi B, C, D , fiecare cu câte trei elemente, astfel încât $B \cup C \cup D = A$, $B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$, iar suma elementelor fiecăreia dintre mulțimile B, C și D să fie aceeași.
 - b) Împărțiți mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 2013\}$ în trei submulțimi disjuncte două câte două, fiecare având același număr de elemente și aceeași sumă a elementelor.
2. Un triunghi are lungimile laturilor numere naturale și suma acestor lungimi este egală cu 10. Demonstrați că triunghiul nu este echilateral, dar este isoscel.
3. a) Găsiți 16 numere naturale astfel încât suma oricăror nouă dintre ele nu se divide cu 9.
 - b) Dați exemplu de opt numere de tipul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c$ cu proprietatea că produsul oricăror două nu este pătrat perfect.
 - c) Demonstrați că, din 81 de numere de tipul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c$, putem alege patru astfel încât produsul lor este putere a patra a unui număr natural.

Clasa a VII-a

1. Demonstrați că nu există numere întregi distincte a, b și c pentru care $\{a, b, c\} = \{a - b, b - c, c - a\}$. (Cosmin Manea și Dragoș Petrică)
2. În interiorul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul E , astfel încât E să nu se afle pe diagonala BD . Dreapta BE intersectează dreptele AD și CD în M , respectiv în N . Dreapta DE intersectează dreptele AB și BC în P , respectiv în Q . Demonstrați că dreptele MP și NQ sunt paralele.

3. Pe latura AD a pătratului $ABCD$ se consideră punctul N astfel încât $AD = 4 \cdot AN$, iar pe latura AB se consideră un punct M . Demonstrați că M este mijlocul segmentului AB dacă și numai dacă NM este bisectoarea unghiului $\angle ANC$.

Clasa a VIII-a

1. Un șoricel vrea să mănânce un cașcaval de formă cubică, format din 1001 cubulețe de latură 1. După ce termină un cubuleț, poate trece doar la un altul care are o față comună cu cel abia terminat. Poate șoricelul să mănânce tot cașcavalul, astfel încât cubulețul din centru să-i rămână ultimul, ca desert?

(*Gabriela Zanoschi*)

2. Numerele reale pozitive x, y și z au proprietatea că produsul oricăror două este cel mult egal cu 1. Demonstrați că

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2} + \frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2} + \frac{(1+z^2)(1+x^2)}{2+z^2+x^2} \geq \frac{3+xy+yz+zx}{2}.$$

(*Ionuț Ivănescu și Lucian Tuțescu*)

3. Demonstrați că, pentru orice număr natural n și orice număr natural impar k , numărul $1 + 2 + 3 + \dots + n$ divide $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$.

Clasa a IX-a

1. Se consideră triunghiul ABC cu $AB > AC$. Pe segmentul AB se ia punctul N astfel încât $BN = \frac{AB+AC}{2}$. Dacă M este mijlocul laturii BC , demonstrați că MN este paralelă cu bisectoarea unghiului $\angle BAC$.

2. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = x \in \mathbb{R}$, $3a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 18$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că există o infinitate de valori iraționale ale lui x pentru care toți termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt numere naturale.

(*Radu Miron*)

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația pozitivă r și primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinați partea întreagă a numărului

$$S_n = \sqrt{1 + \frac{r}{a_1 a_2}} + \sqrt{1 + \frac{r}{a_2 a_3}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{r}{a_n a_{n+1}}}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Clasa a X-a

1. Demonstrați că $\lg 2 > \frac{100}{333}$.

(*Gabriel Popa*)

2. Afizele vârfurilor unui triunghi echilateral sunt numerele complexe a, b și c . Considerăm numărul complex $z = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}$. Demonstrați că partea

reală a lui z este $\frac{3}{2}$.

(*Sven Cortel*)

3. Spunem că o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este „aproape identică” dacă există o funcție $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel încât $f(f(n)) + g(f(n)) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Dacă funcția f este aproape identică, arătați că funcția asociată g este definită prin $g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Dați exemplul de funcție aproape identică, alta decât funcția identică.

c) Demonstrați că singura funcție aproape identică și monotonă este funcția identică. (Claudiu Mîndrilă)

Concursul de matematică „Florica T. Câmpan”

Ediția a XIV-a, Iași, 26 aprilie 2014

Clasa I

I. 1. Descoperă regula și completează:

9; 2; 2; 5;

3; 0; 0; 3;

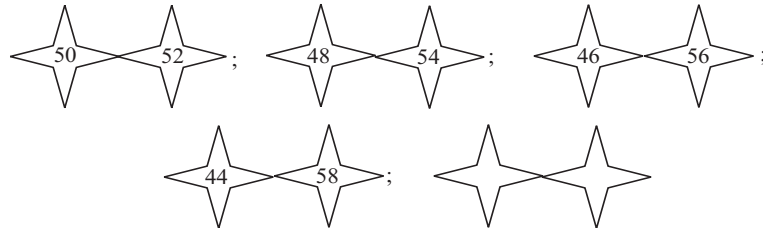
7; 3; 3; 1;

8; 4; 4; \square ;

9; 1; 1; 7;

7; 2; 2; \square .

2. Găsește regula și completează perechea de numere care lipsește din șirul:



3. Completați cu semnele „+” sau „-” astfel încât să obțineți rezultatul:

$$2\square 22\square 22\square 22\square 22 = 20$$

II. 1. George a citit 22 de pagini, depășind cu două pagini jumătatea cărții. Câte pagini are cartea?

2. Ioana are 10 ani, iar mama sa are 34 de ani. Câți ani va avea mama când Ioana va avea 25 de ani?

III. 1. Pe o cărare de munte urcă 27 de elevi în șir, unul după altul. Știind că Bogdan este al 17-lea, iar Ana încheie șirul, să se afle câți elevi îi despart.

2. Ana are un șirag cu 15 mărgelile albe și roșii. Știm că cele albe sunt de la 5 la 10. Câte mărgelile albe sunt? Câte mărgelile roșii sunt?

Clasa a II-a

I. 1. Adăugați la cel mai mic număr impar de trei cifre succesivul celui mai mare număr scris cu două cifre diferite.

2. Se dă șirul : 5, 11, 23, 47, ..., ..., ...

a) Completați șirul cu încă trei termeni .

b) Aflați suma celor șapte termeni ai șirului.

II. 1. Diana are 32 de bețișoare roșii, albastre și verzi. Știind că 25 bețișoare nu sunt roșii și 24 nu sunt verzi, să se afle:

a) câte bețișoare sunt de fiecare culoare;

b) dacă introduce bețișoarele într-un săculeț, care este cel mai mic număr de bețișoare pe care le poate extrage, fără a se uita, pentru a fi sigură că a extras un bețișor roșu.

2. În călătoria spre Tărâmul Viselor, Sophie a fost însoțită de uriașul Mup. În timp ce Mup făcea 4 pași, Sophie făcea 15. Dacă uriașul Mup a făcut în total 20 de pași, află câți pași a făcut Sophie.

III. 1. Două veverițe pornesc în sensuri diferite. Trec una pe lângă cealaltă, oprindu-se la o distanță de 3 m una de alta. Care a fost distanța dintre cele două puncte de pornire dacă prima veveriță a parcurs 30 m, iar a doua cu 10 m mai puțin?

2. Veverițele Chip și Dale locuiesc pe aceeași stradă. Numărând de la un capăt al străzii, casa lui Chip este a 27-a. Dacă numărăm din celălalt capăt al străzii, casa ei este a 13-a. Casa lui Dale se află exact la mijlocul străzii. Câte case sunt între casa lui Chip și casa lui Dale?

Clasa a III-a

I a) Ce număr lipsește?

?	12	7
6	10	14
13	8	9

b) Ce valoare are b dacă $5 + 8 \cdot b = \overline{aa}$?

c) Analizând numerele din primele două triplete, determinați numerele care lipsesc din al treilea triplet: (23, 38, 27), (15, 30, 19), (x, y, 2009).

II. Pe un platou se află de 3 ori mai multe roșii decât ardei. La masă sunt 3 persoane și fiecare ia câte un ardei și câte o roșie. Pe platou rămân de 4 ori mai multe roșii decât ardei. Câți ardei și câte roșii se aflau la început pe platou?

III. Mihai, fratele mai mare al Oanei din clasa a III-a, are pe birou mai multe cărți. Oana deschide cărțile și observă că fiecare dintre acestea are ultima pagină numerotată cu un număr de trei cifre a căror produs este 24. Care este cel mai mare număr de cărți pe care le-ar putea avea Mihai pe birou?

Clasa a IV-a

I. a) La adunarea a trei numere, Victor face din neatenție câteva greșeli: la primul număr în loc de cifra 0 de la ordinul sutelor pune 7, la al doilea număr în loc de cifra 8

de la ordinul unităților pune 0, iar la al treilea număr, la ordinul miilor în loc de cifra 9 pune 2. Făcând suma noilor numere obține 34567. Puteți spune care este suma numerelor inițiale? Justificați!

b) Doi buni prieteni, Artur și Victoraș, se întâlnesc, iar Artur constată că dacă adună o treime din timpul care a trecut din ziua respectivă cu două cincimi din timpul care a mai rămas până la sfârșitul ei se obține ora la care s-au întâlnit. Îl puteți ajuta pe Victoraș să afle care a fost ora la care s-au întâlnit?

II. Determinați câte numere de șase cifre conțin în scrierea lor secvența 102 (un exemplu de astfel de număr este 410263).

III. Pe ecranul unui calculator, într-un tabel, sunt scrise inițial numerele 2,0,1,4, iar la fiecare pas se mărește cu 5 cel mai mic număr scris la pasul anterior, ca în modelul următor:

Numere inițiale	2	0	1	4
pasul 1	2	5	1	4
pasul 2	2	5	6	4
pasul 3	7	5	6	4
pasul 4	7	5	6	9
...
pasul n				

a) Determinați n știind că la pasul n apar pe ecranul calculatorului numere care au suma egală cu 207.

b) După câți pași apare prima dată în tabel numărul 2014?

(Cătălin Budeanu și Gabriel Popa)

Clasa a V-a

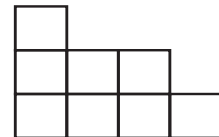
I. Două comisii, A și B , lucrează la un proiect. Prima comisie are 13 membri, iar cea de-a doua are 6 membri. Fiecare dintre cele 19 persoane primește câte 60 de lei pe zi în primele 30 de zile lucrate și câte 90 de lei pe zi începând cu cea de-a 31-a zi în care lucrează. Comisia A lucrează x zile, iar comisia B lucrează $2x$ zile. Suma totală de bani necesară pentru a plăti comisia A este egală cu suma totală necesară pentru a plăti comisia B . Determinați valorile posibile ale lui x .

(Adrian Zanoschi)

II. Toate cele 8 pătrate mici din desenul alăturat au latura de 1 cm.

a) Numărați câte dreptunghiuri cu perimetrul de 8 cm pot fi identificate în figură. (Pătratele sunt și ele dreptunghiuri!)

b) Determinați care este numărul minim de segmente cu lungimea de 1 cm care trebuie șterse din desen, astfel încât figura să nu mai conțină niciun pătrat cu latura de 1 cm.



(Petru Asaftei și Gabriel Popa)

III. Într-o clasă sunt 7 elevi care colecționează cărți rare. Nu există doi elevi care să aibă o aceeași carte și nici doi elevi care să aibă același număr de cărți.

Profesorul de matematică determină, pentru fiecare pereche de copii, care este numărul maxim de posibilități în care aceștia pot schimba între ei câte o carte și notează numerele astfel determinate într-un tabel. De exemplu, dacă Andrei ar avea 20 cărți și Sabina ar avea 17 cărți, va trece în tabel numărul 340. Profesorul observă că tabelul conține numere diferite două câte două.

a) Stabiliți câte numere se află în tabel.

b) Determinați numărul de cărți din colecția fiecărui elev, știind că media aritmetică a celor 7 numere este 17, cel mai mic număr din tabel este 143, iar cel mai mare număr din tabel este 420. (*Adrian Zanoschi*)

Clasa a VI-a

I. Un profesor de matematică tocmai explica unui elev al său că, într-o problemă cu date de naștere, o notație de forma 17.12.78 poate avea semnificația „17 decembrie 1978”. Curios ca toți copiii, elevul profită de situație și îl întrebă pe profesor care este ziua lui de naștere și ce vârstă are. Zâmbind, profesorul îi răspunde: „Acum suntem în ianuarie 2014 și, dacă te gândești la descompunerea sa în factori primi, acest număr ascunde informațiile la tot ce m-ai întrebat!”. Folosind acest răspuns, aflați:

a) care este ziua de naștere a profesorului;

b) care este vârsta profesorului (exprimată doar în ani) la data când a avut loc discuția.

II. Se consideră o foaie de hârtie de formă pătrată, care se taie în exact 2014 pătrate mai mici. Vom spune că un pătrat dintre cele 2014 este „boss” dacă niciun alt pătrat nu este mai mare ca el. La fel, vom spune că un pătrat dintre cele 2014 este „baby” dacă nici un alt pătrat nu este mai mic ca el. Arătați că:

a) este posibil un mod de tăiere prin care să se obțină exact trei pătrate „boss”;

b) este posibil un mod de tăiere prin care să se obțină exact patru pătrate „baby”;

c) este posibil un mod de tăiere prin care să se obțină exact un pătrat „boss”.

III. Într-o pauză, Lucian se joacă desenând pe o foaie diverse figuri și îndoind apoi foaia după o dreaptă, pentru ca figura desenată să se imprime pe partea cealaltă după îndoitură. El desenează un segment $[AB]$ și, după îndoire, constată că pe foaie s-a imprimat un alt segment, pe care îl notează $[A'B']$, unde A' este urma lăsată de punctul A . După aceea, observă că segmentele $[AB]$ și $[A'B']$ se intersectează într-un punct pe care îl notează M și, totodată, dreptele AB' și BA' se intersectează și ele într-un punct pe care-l notează P . Gabriel, colegul lui de bancă, îi atrage atenția spunând: „Cred că nu ai respectat ceva la îndoire, pentru că punctele M și P nu sunt pe îndoitură”. Lucian, privind cu atenție desenul, răspunde: „Ai dreptate. Mai mult, dacă aș fi îndoit corect, cred că $[PM]$ ar fi fost bisectoare pentru unghiul \widehat{APB} ”. Dovediți că observațiile celor doi copii sunt ambele adevărate.

(*Silviu Boga și Doru Buzac*)

Clasa a VII-a

- I.** Pe ecranul unui calculator este scris numărul $1 \underbrace{22 \dots 2}_{2014} \underbrace{000 \dots 0}_{2014}$. În fiecare minut, pe ecran apare câte un nou număr, prin eliminarea unei cifre de 2 și a unei cifre de 0 din numărul scris anterior, până când numărul rămas pe ecran are o singură cifră.
- Arătați că niciunul dintre numerele scrise pe ecran nu este pătrat perfect.
 - Arătați că $\underbrace{11 \dots 1}_{n+1}^2 - \underbrace{11 \dots 1}_n^2$ este divizibil cu $2 \cdot 10^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Arătați că suma tuturor numerelor scrise pe ecran este pătrat perfect.

II. O broască pleacă din originea axei numerelor și înaintează prin salturi după următoarea regulă: de fiecare dată sare pe cel mai apropiat număr natural multiplu de 3 sau pe cel mai apropiat multiplu de 13. Un traseu este o succesiune de salturi făcute după regula stabilită, între 0 și 39. Care este numărul maxim de trasee pe care le poate urma broasca?

III. Un proprietar deține un teren intravilan în formă de triunghi și un teren extravilan foarte întins.

- Dacă într-un triunghi ABC , punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor sale, calculați raportul dintre aria triunghiului MNP și aria triunghiului ABC .
- Pe terenul extravilan sunt amplasați 2014 țărushi astfel încât triunghiul determinat de oricare trei dintre aceștia are aria de cel mult 1 ha. Să se arate că se poate delimita un triunghi de arie cel mult 4 ha în care să se găsească toți țărushii.
- Proprietarul vrea să împrejmuiască terenul intravilan, având suprafața de 2 dam². Arătați că nu sunt suficienți 6 dam de gard.

Clasa a VIII-a

I. De ziua ei, mama i-a făcut Irinei un tort în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 40 cm respectiv 30 cm și înălțimea de 10 cm.

- Află câți centilitri are acest tort.
- Pentru a servi invitații, se taie tortul în bucăți având formă de prismă patrulateră regulată cu latura bazei de 5 cm și înălțimea egală cu cea a paralelipipedului. Câte felii de tort a obținut Irina?
- Mama a glazurat tortul cu un strat de frișcă, având grosimea de 1,5 cm. Câți centilitri de frișcă a folosit ea?
- Care este probabilitatea ca, luând o felie de tort, aceasta să aibă cât mai puțină frișcă?
(*Marius Farcaș și Veronica Plăeșu*)

II. Se știe că prețul unui diamant este direct proporțional cu pătratul masei lui. Întâmplător, diamantul s-a despicat în două bucăți și prețul lui total s-a micșorat cu 18%. Care este raportul maselor bucăților obținute?

III. Un corp geometric cu suprafața de 400 dm² este format din 400 pietre, fiecare cu suprafața de 400 cm². Pietrele sunt îmbinate perfect (fără goluri interioare) cu un adeziv din care se folosește 0,04 g la fiecare 400 mm². Aflați cantitatea de adeziv folosită.

**Olimpiada de Matematică a Studenților din Sud-Estul
Europei (SEEMOUS), Ediția a VIII-a, Iași, 7 martie 2014**

Universitatea Tehnică „Gh. Asachi” din Iași a fost gazdă a celei de a VIII-a ediții a competiției **SEEMOUS**. Au concurat 25 de echipe, reunind 99 studenți, din țările: *Bulgaria, Grecia, România, Rusia, Turcia, Turkmenistan și Ucraina*.

Studenții concurenți au avut de rezolvat 4 probleme în 5 ore. *Locul I pe națiuni a revenit României, locul I pe universități a fost adjudecat de Național and Kapodistrian University of Athens din Grecia, iar locul I individual absolut a fost obținut de studentul Eduard Valentin Curcă de la Universitatea „Al. I. Cuza” din Iași.*

După concurs au participat la o excursie cu obiectivele: Ruginoasa (palatul domnitorului Alexandru Ioan Cuza) și Târgu Neamț (cetatea Neamțului, mănăstirea Agapia).

Detalii pot fi găsite la adresa: <http://math.etti.tuiasi.ro/seemous>

Problem 1. Let n be a nonzero natural number and $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ be a function such that $f(2014) = 1 - f(2013)$. Let $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ be real numbers not equal to each other. If

$$\begin{vmatrix} 1 + f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots & f(x_n) \\ f(x_1) & 1 + f(x_2) & f(x_3) & \dots & f(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & 1 + f(x_3) & \dots & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots & 1 + f(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

prove that f is not continuous.

Dimitris GEORGIU, Grecia

Problem 2. Consider the sequence (x_n) given by

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 1 + \sqrt{x_n^2 + 2x_n + 5}}{2}, \quad n \geq 1.$$

Prove that the sequence $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2 - 1}$, $n \geq 1$ is convergent and find its limit.

Pirmyrat GURBANOV, Turkmenistan

Problem 3. Let $A \in M_n(\mathbb{C})$ and $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ such that $A - A^* = 2aI_n$, where $A^* = (\bar{A})^t$ and \bar{A} is the conjugate of the matrix A .

(a) Show that $|\det A| \geq |a|^n$.

(b) Show that if $|\det A| = |a|^n$, then $A = aI_n$.

Vasile POP, România

Problem 4. a) Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\arctg \frac{x}{n}}{x(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2}$.

b) Find the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n \int_0^n \frac{\arctg \frac{x}{n}}{x(x^2 + 1)} dx - \frac{\pi}{2} \right)$.

Vladimir BABEV, Bulgaria

PROBLEME ȘI SOLUȚII

Soluțiile problemelor propuse în nr. 1/2014

Clasele primare

P.283. Scrieți + sau – în fiecare pătrățel din $1\square2\square3\square4 = 17\square1\square2\square4$ astfel încât să obțineți o egalitate. Câte soluții există? Explicați!

(Clasa I)

Codruța Filip, elevă, Iași

Soluție. Expresia $1\square2\square3\square4$ are valoarea maximă 10, când în fiecare casetă scriem semnul +. Expresia $17\square1\square2\square4$ are valoarea minimă 10, când în fiecare casetă scriem semnul –. În concluzie, avem o singură soluție: $1 + 2 + 3 + 4 = 17 - 1 - 2 - 4$.

P284. Se consideră șirul de cifre: 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, ... De câte ori apare cifra 1 în primele 60 de cifre scrise?

(Clasa I)

Teodor Pătrașcu, elev, Iași

Soluție. În primele 60 de cifre scrise, gruparea 0, 1, 2, 3, 2, 1 se repetă de 10 ori. Cifra 1 apare de $\underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{\text{de 10 ori}} = 20$ ori.

P285. Considerăm șirul crescător al numerelor de două cifre cu cifra unităților 5. Cât trebuie să adăugăm la suma unităților numerelor din șir pentru a obține numărul din mijlocul lui?

(Clasa I)

Mihaela Buleandă, elevă, Iași

Soluție. Șirul crescător al numerelor de două cifre cu cifra unităților 5 este 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 și 95. Suma unităților acestor numere este 45. Pentru a obține numărul 55, la suma unităților trebuie să adăugăm 10.

P286. Refaceți adunarea $\overline{2**} + \overline{3**} = 678$, știind că este cu trecere peste ordinul unităților și al zecilor. Scrieți toate soluțiile.

(Clasa a II-a)

Teodora Pricop, elevă, Iași

Soluție. Deoarece cifra unităților sumei este 8, înseamnă că termenii sumei sunt de forma $\overline{2*9}$, $\overline{3*9}$. Soluțiile sunt: $289 + 389 = 678$, $279 + 399 = 678$, $299 + 379 = 678$.

P287. Pe un jeton sunt scrise numerele 1, 2, 3, 4, 5 într-o ordine dată, fără să se repete. Pentru fiecare două numere alăturate se face suma lor. Se adună cele patru rezultate obținute și suma lor este „codul jetonului”. Cum trebuie scrise numerele pentru a obține un jeton cu codul 25? (Este suficient un singur exemplu.)

(Clasa a II-a)

Cristina Chelaru, elevă, Iași

Soluție. O scriere poate fi 1, 3, 5, 2, 4. Într-adevăr, $1 + 3 = 4$, $3 + 5 = 8$, $5 + 2 = 7$, $2 + 4 = 6$, $4 + 8 + 7 + 6 = 25$.

P288. Câte numere de două cifre trebuie alese astfel încât să fim siguri că printre ele găsim două numere cu aceeași sumă a cifrelor.

(Clasa a II-a)

Marian Ciuperceanu, Craiova

Soluție. Sumele cifrelor numerelor de două cifre sunt: $1, 2, 3, \dots, 18$. Dacă luăm 19 numere de două cifre, atunci găsim printre ele două numere care au aceeași sumă a cifrelor, conform principiului cutiei.

P289. Pentru fiecare șapte mere pe care le culege, un băiat primește de la bunicul lui două nuci. Este posibil ca, la sfârșit, după ce a cules ultimele șapte mere și a primit două nuci, să aibă 234 fructe? Dar 431?

(Clasa a III-a)

Denisa Apetrei, elevă, Iași

Soluție. Fructele băiatului pot fi grupate câte $7 + 2 = 9$. Observăm că $9 \times 26 = 234$, $431 = 9 \times 47 + 8$. Poate să aibă 234 fructe, dar 431 nu.

P290. Un salariat are tichete valorice de 1, 3, 9 și 27 lei, cel puțin câte unul de fiecare fel. Cum poate să achite suma de 79 lei utilizând fiecare tichet cel puțin o dată?

(Clasa a III-a)

Maria Bizdîgă, elevă, Iași

Soluție. $79 = 2 \times 27 + 2 \times 9 + 2 \times 3 + 1$.

P291. Un elev trebuie să rezolve 42 de probleme în cinci zile. În fiecare zi rezolvă mai multe probleme decât în ziua precedentă, iar în ziua a patra rezolvă de cinci ori mai multe probleme decât în prima zi. Care este numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în a cincea zi?

(Clasa a III-a)

Alexandra-Mădălina Ciobanu, elevă, Iași

Soluție. Dacă în prima zi ar rezolva 3 probleme, atunci numărul total de probleme rezolvate este minim $3 + 4 + 5 + 15 + 16 = 43 > 42$, imposibil.

Rămân situațiile: a) $1 < 2 < 3 < 5 < 31$; b) $2 < 3 < 4 < 10 < 23$. În concluzie, numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în a cincea zi este 31.

P292. Un elev are 11 bile albe numerotate de la 1 la 11, 11 bile verzi numerotate de la 12 la 22 și 11 bile negre numerotate de la 23 la 33. Vom numi tripletă orice grupă de trei bile având culori diferite, cu numerele scrise pe ele în ordine crescătoare. Câte triplete cu proprietatea că suma numerelor de pe bilele componente este 51 se pot forma?

(Clasa a III-a)

Adelin Bechet, elev, Iași

Soluție. Tripletele sunt: $(1, 22, 28), (1, 21, 29), \dots, (1, 17, 33); (2, 22, 27), (2, 21, 26), \dots, (2, 16, 33); \dots; (11, 17, 23), (11, 16, 24), \dots, (11, 12, 29)$. Numărul acestor triplete este $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 91$.

P293. Știind că $\overline{xy} + \overline{mn} = 35$ și $\overline{zt} + \overline{uv} = 75$, să se afle câtul împărțirii numărului $\overline{xyzt} + \overline{mnuv}$ la 5.

(Clasa a IV-a)

Tatiana Ignat, elevă, Iași

Soluție. $\overline{xy} \times 100 + \overline{mn} \times 100 = 35 \times 100 = 3500$; $\overline{xyzt} + \overline{mnuv} = \overline{xy00} + \overline{mn00} + \overline{zt} + \overline{uv} = 3500 + 75 = 3575$; $3575 : 5 = 715$.

P294. Câte numere de trei cifre au cel puțin una dintre cifre 9?

(Clasa a IV-a)

Mariana Manoli, elevă, Iași

Soluție. Toate numerele de trei cifre sunt în număr de $999 - 100 + 1 = 900$. Toate numerele de trei cifre care nu conțin cifra 9 sunt în număr de $8 \times 9 \times 9 = 648$. Numerele de trei cifre care au cel puțin una din cifre 9 sunt în număr de $900 - 648 = 252$.

P295. Câțiva elevi au organizat o excursie de trei zile. În prima seară dorm câte patru în cameră, în a doua seară câte trei, iar în ultima seară fiecare are camera sa.

Știind că au fost închiriate 32 de camere în cele trei zile, iar în a doua seară într-o cameră au fost cazați numai doi elevi, să se afle câți elevi au participat la excursie.

(Clasa a IV-a)

Mihaela Gâlcă, elevă, Iași

Soluție. Da a este numărul elevilor, atunci $a : 4 + (a + 1) : 3 + a = 32 \Leftrightarrow 3a + 4a + 4 + 12a = 384 \Leftrightarrow a = 20$ (elevi).

P296. Pentru un număr natural n , $n \geq 1$, notăm cu $S(n)$ suma cifrelor numărului n (de exemplu $S(235) = 2 + 3 + 5 = 10$). Câte numere de forma \overline{abc} îndeplinesc condiția $S(S(\overline{abc})) = 10$?

(Clasa a IV-a)

Petru Asaftei, Iași

Soluție. Avem $S(\overline{abc}) \leq 27$. Singurul număr mai mic decât 27 care are suma cifrelor 10 este 19, deci $a + b + c = 19$. Dacă $a = 1$, atunci $b + c = 18$ și $b = c = 9$ (1 caz). Dacă $a = 2$, atunci $b + c = 17$ și ($b = 9, c = 8$ sau $b = 8, c = 9$) (2 cazuri).

Continuând astfel, ajungem la faptul că, dacă $a = 9$, atunci $b + c = 10$ și avem 9 cazuri. În concluzie, avem $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ numere de trei cifre care îndeplinesc condiția din enunț.

Clasa a V-a

V.172. Se consideră numerele naturale $x = 2013^{2013} - 3$ și $y = 2014^{2013} - 4$. Arătați că x și y au cel puțin patru divizori comuni.

Gheorghe Iacob, Pașcani

Soluție. Se constată ușor că atât x cât și y au ultima cifră 0, prin urmare 1, 2, 5 și 10 sunt divizori ai ambelor numere.

V.173. Determinați numerele naturale m și n pentru care $2^m + 2^n = 33554433$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluție. Suma $2^m + 2^n$ fiind impară, numerele 2^m și 2^n vor avea parități diferite, prin urmare unul dintre ele va fi egal cu 1, iar celălalt cu 33554432. Obținem soluțiile $(m, n) \in \{(0, 25); (25, 0)\}$.

V.174. Determinați numerele \overline{abc} cu proprietatea că $\overline{abc} = c^2(a - 1)^2$.

Nicolae Ivășchescu, Craiova

Soluție. Cum c este ultima cifră a unui pătrat perfect, rezultă că $c \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Cazurile $c = 0$ și $c = 1$ se elimină imediat. Dacă $c = 4$, obținem că $\overline{ab4} = 16(a - 1)^2$; urmărind ultima cifră, deducem că $a = 3$ sau $a = 9$, valori pentru care nu se verifică egalitatea. Procedând în aceeași manieră, nu găsim soluții pentru $c = 9$, pentru $c = 5$ obținem $a = 6, b = 2$, iar pentru $c = 6$ obținem $a = 5, b = 7$. În concluzie, $\overline{abc} \in \{576, 625\}$.

V.175. Arătați că numărul $A = 2^{2014} + 2^{2013} + 2^{2012} + 2^3$ se divide cu 15.

Iulian Oleniuc, elev, Iași

Soluție. Observăm că $A = 2^{2012} \cdot 7 + 8 = 16^{503} \cdot 7 + 8 = (15 + 1)^{503} \cdot 7 + 8 = (M_{15} + 1) \cdot 7 + 8 = M_{15} + 7 + 8 = M_{15}$, de unde cerința problemei.

V.176. Pe tablă sunt scrise numerele naturale $1, 2, 3, \dots, 41$. Andrei alege de pe tablă un număr de la 1 la 7. Apoi, Bianca alege un număr mai mare decât cel al lui Andrei, astfel încât diferența dintre numărul ales de ea și cel ales de Andrei este cel mult egală cu 7. Urmează Andrei, care alege un număr mai mare decât cel ales de

Bianca, astfel încât diferența dintre numărul ales de el și cel ales de Bianca este cel mult egală cu 7 ș.a.m.d. Elevul care este obligat să aleagă numărul 41 pierde jocul. Arătați că Bianca are strategie de câștig.

Radu Miron, elev, Iași

Soluție. Indiferent de numerele pe care le alege Andrei, Bianca poate alege, de fiecare dată când îi vine rândul, numerele 8, 16, 24, 32, 40. La al șaselea pas, Andrei va fi obligat să aleagă numărul 41, pierzând jocul.

V.177. Determinați cel mai mic număr natural n (scris în baza 10) cu proprietatea că atât n , cât și $n + 3$, au suma cifrelor numere divizibile cu 7.

Dan Popescu, Suceava

Soluție. Notăm cu $u(n)$ și $s(n)$ ultima cifră, respectiv suma cifrelor numărului natural n . Dacă $u(n) \leq 6$, atunci $s(n + 3) - s(n) = 3$, număr care nu se divide cu 7.

Dacă $u(n) = 7$ și $n = \overline{a_1 \dots a_s \underbrace{9 \dots 9}_k 7}$, $a_s \neq 9$, atunci $n + 3 = \overline{a_1 \dots (a_s + 1) \underbrace{0 \dots 0}_{k+1} 00}$, prin urmare $s(n) - s(n + 3) = 9k + 6$. Cea mai mică valoare a lui k pentru care $9k + 6$ se divide cu 7 este $k = 4$. Se observă că numărul $n = 699997$ este cel mai mic dintre cele având forma dorită și suma cifrelor divizibilă cu 7.

Dacă $u(n) = 8$ și $n = \overline{a_1 \dots a_s \underbrace{99 \dots 9}_k 8}$, $a_s \neq 9$, atunci $n + 3 = \overline{a_1 \dots (a_s + 1) \underbrace{0 \dots 0}_k 01}$, prin urmare $s(n) - s(n + 3) = 9k + 6$. Cea mai mică valoare a lui k pentru care $9k + 6$ se divide cu 7 este $k = 4$. Se observă că numărul $n = 599998$ este cel mai mic dintre cele având forma dorită și suma cifrelor divizibilă cu 7.

Dacă $u(n) = 9$ și $n = \overline{a_1 \dots a_s \underbrace{99 \dots 9}_k}$, $a_s \neq 9$, atunci $n + 3 = \overline{a_1 \dots (a_s + 1) \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 2}$, prin urmare $s(n) - s(n + 3) = 9k - 3$. Cea mai mică valoare a lui k pentru care $9k - 3$ se divide cu 7 este $k = 5$. Se observă că numărul $n = 499999$ este cel mai mic dintre cele având forma dorită și suma cifrelor divizibilă cu 7.

Dintre numerele 699997, 599998 și 499999, cel mai mic este 499999.

V.178. Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care n^3 divide $n!$ (unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

Petru Asaftei, Iași

Soluție. Vom arăta că orice număr de forma $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ are proprietatea dorită. Observăm că $2 < 3 < 2k < 3k < 6k$ și $2 \cdot 3 \cdot 2k \cdot 3k \cdot 6k = (6k)^3$, prin urmare $(6k)^3$ divide $(6k)!$. Astfel, există o infinitate de numere naturale care verifică cerința problemei.

Clasa a VI-a

VI.172. Demonstrați că nu există numere întregi distincte a, b , și c pentru care $\{a, b, c\} = \{a - b, b - c, c - a\}$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

Soluție. Presupunem, prin absurd, că există a, b, c întregi distincte pentru care $A = B$, unde $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{a - b, b - c, c - a\}$. În particular, $a + b + c = (a - b) + (b - c) + (c - a)$, prin urmare $a + b + c = 0$; putem deci considera $A = \{a, b, -a - b\}$ și $B = \{a - b, a + 2b, -2a - b\}$. Cum $a \in B$, rezultă că $a = a - b$ sau $a = a + 2b$ sau

$a = -2a - b$. Dacă $a = a - b$, atunci $b = 0$, deci $B = \{a, a, -2a\}$, imposibil. Dacă $a = a + 2b$, obținem din nou că $b = 0$, deci aceeași contradicție. Dacă $a = -2a - b$, atunci $b = -3a \neq 0$, prin urmare $A = \{a, -3a, 2a\}$, $B = \{4a, -5a, a\}$ și egalitatea $A = B$ va fi imposibilă. În concluzie, presupunerea făcută este falsă, deci $A \neq B$.

VI.173. Fie $a, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, astfel încât la împărțirea lui a cu n se obține restul $n - 1$, iar la împărțirea lui a prin $n + 1$ se obține restul n . Aflați restul împărțirii lui a prin $n(n + 1)$.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

Soluție. Din $a = nc_1 + (n - 1)$ și $a = (n + 1)c_2 + n$, deducem că $a + 1 : n$ și $a + 1 : n + 1$. Însă $(n, n + 1) = 1$, prin urmare $a + 1 : n(n + 1)$, așadar restul împărțirii lui a prin $n(n + 1)$ este $n(n + 1) - 1$.

VI.174. Demonstrați că nu există numere naturale a, b și c având proprietatea că $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

Viorica Momiță, Iași

Soluție. Presupunem, prin absurd, că ar exista $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^2 + b^2 = 8c + 6$; evident că a și b vor avea aceeași paritate. Dacă a, b sunt pare, atunci $a^2 = M_4$, $b^2 = M_4$, deci $a^2 + b^2 = M_4 \neq 8c + 6$. Dacă a, b sunt impare, atunci $a = M_8 + 1$, $b = M_8 + 1$, deci $a^2 + b^2 = M_8 + 2 \neq 8c + 6$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, prin urmare este adevărată concluzia.

VI.175. Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{71}$ și $b = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{48}$.

Gheorghe Iurea, Iași

Soluție. Dacă $d = (a, b)$, atunci d este un număr impar. Observăm că d divide $a - b = 2^{49}(1 + 2 + \dots + 2^{22})$, prin urmare d divide $n = 1 + 2 + \dots + 2^{22}$. Apoi, d divide $b - n = 2^{23}(1 + 2 + \dots + 2^{25})$, deci d divide $m = 1 + 2 + \dots + 2^{25}$. În continuare, $d | m - n$ și $m - n = 2^{23}(2^3 - 1)$, așadar $d | 7$. Pe de altă parte, $a = (1 + 2 + 2^2) + 2^3(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{69}(1 + 2 + 2^2) = 7(1 + 2^3 + \dots + 2^{69})$ și $b = (1 + 2 + 2^2) + 2^3(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{46}(1 + 2 + 2^2) = 7(1 + 2^3 + \dots + 2^{46})$, adică $7 | a$ și $7 | b$. Obținem astfel că $(a, b) = 7$.

VI.176. Determinați cel mai mic număr natural (scris în baza 10) care se termină în 2012 și se divide cu 2014.

D.M. Băținețu-Giurgiu, București, și Neculai Stanciu, Buzău

Soluție. Căutăm numărul minim $N = 10000a + 2012 = 2014c$, unde $a, c \in \mathbb{N}$. Dacă $b = c - 1$, obținem ecuația diofantică $10000a - 2014b = 2$, care are o infinitate de soluții; cea mai mică valoare a lui a se determină cu ajutorul algoritmului lui Euclid. Observăm că $(10000, 2014) = 2$, și avem relațiile: $10000 = 2014 \cdot 4 + 1944$; $2014 = 1944 \cdot 1 + 70$; $1944 = 70 \cdot 27 + 54$; $70 = 54 \cdot 1 + 16$; $54 = 16 \cdot 3 + 6$; $16 = 6 \cdot 2 + 4$; $6 = 4 \cdot 1 + 2$; $4 = 2 \cdot 2 + 0$. De aici,

$$1944 = 10000 - 4 \cdot 2014;$$

$$70 = 5 \cdot 2014 - 100000;$$

$$54 = 28 \cdot 10000 - 139 \cdot 2014;$$

$$16 = 144 \cdot 2014 - 29 \cdot 10000;$$

$$6 = 1115 \cdot 10000 - 571 \cdot 2014;$$

$$4 = 1286 \cdot 2014 - 259 \cdot 10000;$$

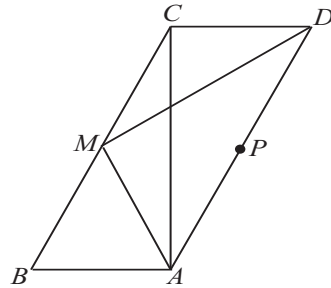
$$2 = 374 \cdot 10000 - 1857 \cdot 2014.$$

Astfel, $N = 10000 \cdot 374 + 2012 = 3742012$ este numărul căutat.

VI.177. Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{B}) = 60^\circ$. Considerăm punctul D astfel încât $CD \parallel AB$, $CD = AB$, iar B și D sunt separate de dreapta AC . Arătați că există un singur punct $M \in (BC)$ astfel încât $MA \perp MD$.

Petru Asaftei, Iași

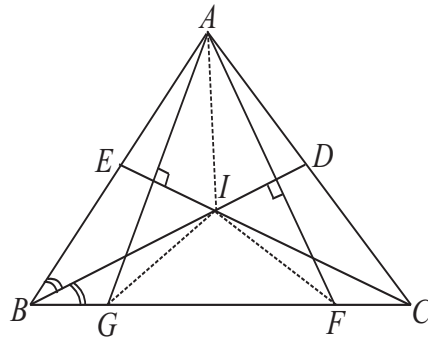
Soluție. Fie P mijlocul segmentului AD ; atunci $MA \perp MD$ dacă și numai dacă $MP = \frac{1}{2}AD$. Se observă ușor că $AD = BC$, iar $AB = \frac{1}{2}BC$, prin urmare $MA \perp MD$ dacă și numai dacă $MP = AB$, condiție echivalentă cu faptul că triunghiul CMP este echilateral (deoarece $PC = PM = \frac{1}{2}AD$, iar $m(\widehat{MCP}) = 60^\circ$). Astfel, concluzia problemei se impune: unicul punct M pentru care $MA \perp MD$ este mijlocul segmentului BC .



VI.178. Fie ABC un triunghi în care unghiul \widehat{BAC} este cel mai mare, iar BD și CE sunt bisectoarele unghiurilor \widehat{ABC} , respectiv \widehat{ACB} ($D \in AC, E \in AB$). Notăm cu I intersecția dreptelor BD și CE și cu F și G simetricile punctului A față de BD , respectiv CE . Arătați că $m(\widehat{FIG}) = 180^\circ - m(\widehat{BAC})$.

Titu Zvonaru, Comănești

Soluție. Deoarece $\triangle ABF$ este isoscel, punctul F este situat pe latura BC ; analog, G se află tot pe BC . Punctul I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, deci AI este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} . Din congruența triunghiurilor BAI și BFI (L.U.L.) obținem că $m(\widehat{BFI}) = m(\widehat{BAI}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC})$; la fel se arată că $m(\widehat{CGI}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC})$. Astfel, $m(\widehat{GIF}) = 180^\circ - (m(\widehat{BFI}) + m(\widehat{CGI})) = 180^\circ - m(\widehat{BAC})$.



Clasa a VII-a

VII.172. Determinați cel mai mic număr natural n cu proprietatea că $0,3 < \{\sqrt{n}\} < 0,3$.

Vasile Chiriac, Bacău

Soluție. Înlocuind $n = 0, 1, 2, \dots$ în relația dată, constatăm că prima valoare convenabilă este $n = 11$.

VII.173. Determinați numerele naturale n pentru care $5^n - 3^n = 544$.

Ionel Tudor, Călugăreni și Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluție. Cum $5^n - 3^n = (5 - 3)(5^{n-1} + 5^{n-2} \cdot 3 + \dots + 3^{n-1})$ și, pentru $n \geq 5$, $5^{n-1} + 5^{n-2} \cdot 3 + \dots + 3^{n-1} > 625 > 272$, rezultă că $n \leq 4$. Facem verificările și obținem că unica soluție este $n = 4$.

VII.174. Pentru a, b, c, d numere reale pozitive, considerăm numerele

$$A = \frac{1}{a+2b+c} - \frac{1}{b+2c+d} + \frac{1}{c+2d+a} - \frac{1}{d+2a+b}$$
 și $B = |b-d| - |a-c|$.
 Demonstrați că A și B au același semn.

Ovidiu Pop, Satu Mare și Traian Tămiiian, Carei

Soluție. Efectuând calculele, obținem că

$$A = \frac{2(a+b+c+d) \cdot [(b-d)^2 - (a-c)^2]}{(a+2b+c)(b+2c+d)(c+2d+a)(d+2a+b)}.$$

Cum semnul parantezei pătrate de la numărător este același cu semnul lui B , concluzia se impune.

VII.175. Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $2^m + 2^n$ este pătrat perfect.

Gheorghe Iurea, Iași

Soluție. Dacă $m = n$, atunci $2^m + 2^n = 2^{n+1}$ este pătrat perfect dacă și numai dacă $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Dacă $m > n$, atunci $2^m + 2^n = 2^n(2^{m-n} + 1)$ este pătrat perfect când $n = 2k$ și $2^{m-n} + 1 = a^2$, cu $k, a \in \mathbb{N}$. Din $(a-1)(a+1) = 2^{m-n}$ rezultă că $a-1 = 2^\alpha$, $a+1 = 2^\beta$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha < \beta$, $\alpha + \beta = m-n$. Deducem că $2^\beta - 2^\alpha = 2$, deci $2^\alpha(2^{\beta-\alpha} - 1) = 2$, de unde $\alpha = 1$, $\beta = 2$ și atunci $m-n = 3$. Analog se tratează cazul $n > m$.

În concluzie, perechile căutate sunt cele de forma $(2k+1, 2k+1)$ sau $(2k, 2k+3)$ sau $(2k+3, 2k)$, unde $k \in \mathbb{N}$.

VII.176. Demonstrați că $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} + \sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2}$, oricare ar fi numerele reale pozitive x și y .

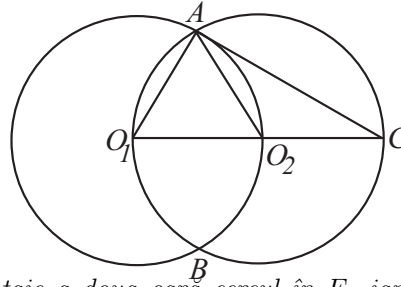
Claudiu-Ștefan Popa, Iași

Soluție. Cu substituția $y = tx$, $t > 0$, inegalitatea se rescrie sub forma $\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+1}} \leq \sqrt{2}$. Prin ridicare la pătrat, aceasta este echivalentă cu $\frac{t^2+1}{(t+1)^2} + \frac{t}{t^2+1} + \frac{2\sqrt{t}}{t+1} \leq 2$, $\forall t > 0$. Efectuând calculele, suma primilor doi termeni se dovedește a fi cel mult 1, iar $\frac{2\sqrt{t}}{t+1} \leq 1$; adunând, obținem inegalitatea dorită. Egalitate avem pentru $t = 1$, deci când $x = y$.

VII.177. Fie C_1 și C_2 două cercuri de centre O_1 , respectiv O_2 , având razale egale și astfel încât $O_1 \in C_2$. Notăm cu A și B punctele de intersecție dintre cele două cercuri și cu C punctul în care tangenta în A la C_1 taie a doua oară C_2 . Arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Dumitru Săvulescu și Marian Voinea, București

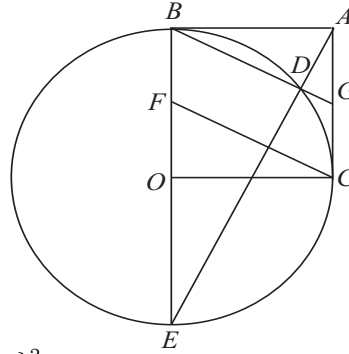
Soluție. Cum O_1A, O_1O_2 și O_2A sunt raze în cele două cercuri congruente, triunghiul AO_1O_2 va fi echilateral. Unghiul drept $\widehat{O_1AC}$ este înscris într-un semicerc al lui \mathcal{C}_2 , deci punctele O_1, O_2 și C sunt coliniare, iar arcul mic \widehat{AC} din \mathcal{C}_2 va avea măsura $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$. Evident că arcul mic \widehat{AB} din \mathcal{C}_2 are măsura 120° și, de aici, concluzia problemei.



VII.178. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și tangentele AB și AC perpendiculare, duse din punctul A exterior cercului. Paralela prin B la AC taie a doua oară cercul în E , iar AE taie a doua oară cercul în D . Demonstrați că paralela prin C la BD trece prin mijlocul segmentului OB .

Nicolae Ivășchescu, Craiova

Soluție. Fie $\{G\} = BD \cap AC$ și $CF \parallel BD, F \in BE$. Este evident că BE este diametru al cercului, $ABOC$ este pătrat, iar $BD \perp AE$. Aplicând teorema catetei în $\triangle BAE$, obținem că $\frac{AD}{DE} = \frac{AB^2}{BE^2} = \frac{1}{4}$, deci $\frac{AG}{BE} = \frac{1}{4}$ și atunci G va fi mijlocul lui AC . Pe de altă parte, $BGCF$ este paralelogram, prin urmare $BF = GC = \frac{1}{2}BO$.



Clasa a VIII-a

VIII.172. Determinați numerele reale x și y pentru care

$$\{x\}^2 + \{y\}^2 = 0,2 \text{ și } \{-x\}^2 + \{-y\}^2 = 1.$$

Bogdan Chiriac, Bacău

Soluție. Nu putem avea $\{x\} = 0$ sau $\{y\} = 0$. Cum $\{-a\} = 1 - \{a\}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, a doua relație devine $(1 - \{x\})^2 + (1 - \{y\})^2 = 1$, adică $2 - 2(\{x\} + \{y\}) + 0,2 = 1$, prin urmare $\{x\} + \{y\} = 0,6$. Înlocuind $\{y\} = 0,6 - \{x\}$ în prima relație, obținem că $\{x\}^2 - 0,6 \cdot \{x\} + 0,08 = 0$, de unde $\{x\} = 0,4$ sau $\{x\} = 0,2$. Soluțiile sistemului sunt perechile $(a + 0,4; b + 0,2)$ și $(a + 0,2; b + 0,4)$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$.

VIII.173. Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x, y, z) = x^2 + xy + xz + yz$, dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $xyz(x + y + z) = 1$.

Constantin Dragomir, Pitești

Soluție. Din $xyz(x + y + z) = 1$ obținem că $x^2 + xy + xz = \frac{1}{yz}$ și atunci $E(x, y, z) = \frac{1}{yz} + yz \geq 2$. Însă $E(\sqrt{2} - 1, 1, 1) = 2$, prin urmare $E_{\min} = 2$.

VIII.174. Determinați valoarea minimă a expresiei $E(a, b, c) = \frac{(a+b)^2}{3bc+1} + \frac{(b+c)^2}{3ca+1} + \frac{(c+a)^2}{3ab+1}$, dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu $ab + bc + ca = 3$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție. Utilizând inegalitatea lui Bergström, obținem:

$$E(a, b, c) \geq \frac{(2a + 2b + 2c)^2}{12} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 6}{3} \geq \frac{ab + bc + ca + 6}{3} = 3.$$

Cum $E(1, 1, 1) = 3$, rezultă că $E_{\min} = 3$.

VIII.175. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, demonstrați că

$$\frac{1}{(a+b)^2+9} + \frac{1}{(b+c)^2+9} + \frac{1}{(c+a)^2+9} \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Mirela Marin, Iași

Soluție. Se arată ușor că

$$\frac{1}{(a+b)^2+9} \leq \frac{1}{6(a+b)} \leq \frac{1}{24} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

cu egalitate când $a = b = \frac{3}{2}$. Scriind încă două inegalități analoge și sumând, obținem concluzia. Egalitatea se obține pentru $a = b = c = \frac{3}{2}$.

VIII.176. Fie x, y numere reale pozitive astfel încât $x^3 + y^3 = axy$, cu $a > 0$. Demonstrați că:

a) $x + y \leq a$; b) $x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{2}$.

Lucian Tuțescu și Liviu Smarandache, Craiova

Soluție. a) Înmulțind ambii membri ai inegalității $x^2 + y^2 - xy \geq xy$ cu $x + y$ și ținând seama de ipoteză, obținem că $axy \geq xy(x + y)$, de unde $a \geq x + y$. Egalitatea se atinge când $x = y$.

b) Din $C - B - S$ rezultă că $(x + y)(x^3 + y^3) \geq (x^2 + y^2)^2$. Atunci $a \cdot axy \geq (x + y)(x^3 + y^3) \geq (x^2 + y^2)^2 \geq (x^2 + y^2) \cdot 2xy$ și, de aici, concluzia. Egalitatea se atinge când $x = y$.

VIII.177. Se consideră prisma triunghiulară dreaptă $ABCDEF$ și punctul O situat în interiorul ei. Demonstrați că media aritmetică ponderată a distanțelor de la O la planele (BCE) , (ACF) , (ABE) , (ABC) și (DEF) cu ponderile a, b, c, p respectiv p , este constantă (unde a, b, c, p notează uzual elementele triunghiului ABC).

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

Soluție. Fie (MNP) planul care trece prin O și este paralel cu bazele, cu $M \in AD$, $N \in BE$ și $P \in CF$; atunci $MN = c$, $NP = a$, $MP = b$. Notăm $x = d(O, (BCD)) = d(O, NP)$, $y = d(O, (ACF)) = d(O, MP)$, $z = d(O, (ABE)) = d(O, MN)$, $u = d(O, (ABC))$, $v = h - u = d(O, (DEF))$, unde h este înălțimea prismei, iar r este raza cercului înscris în $\triangle ABC$. Cum $\mathcal{A}_{MNP} = \mathcal{A}_{ONP} + \mathcal{A}_{OPM} + \mathcal{A}_{OMN}$, obținem că $2rp = ax + by + cz$. Media ponderată dorită este

$$M = \frac{x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c + u \cdot p + v \cdot p}{a + b + c + 2p} = \frac{2r_p + h_p}{4p} = \frac{r}{2} + \frac{h}{4} = \text{constant}.$$

VIII.178. Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ și doi diametri perpendiculari AB și CD . Pe perpendicularele pe planul cercului duse în extremitățile A, B, C, D se iau punctele A', B', C' , respectiv D' astfel încât $AA' = BB' = CC' = DD' = R$, A' și B' să fie de aceeași parte a planului cercului, iar C' și D' de părți diferite ale lui. Calculați, în funcție de R , distanța dintre dreptele $A'B'$ și $C'D'$.

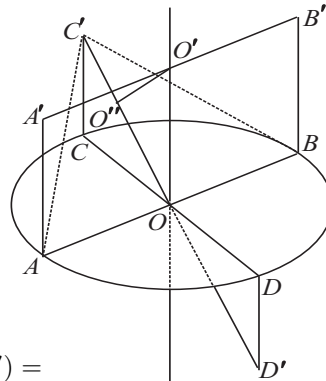
Temistocle Bîrsan, Iași

Soluție. Mai întâi, observăm că dreptunghiul $AA'BB'$ și paralelogramul $CC'DD'$ au plane perpendiculare, iar intersecția lor este dreapta Ox (perpendiculara în O pe cerc).

Deoarece $A'B' \parallel AB$, rezultă că dreapta $A'B'$ este paralelă cu planul (ABC') , plan ce conține dreapta $C'D'$. Fie O' intersecția dreptelor $A'B'$ și Ox . Avem că $d(A'B', C'D') = d(O', (ABC'))$.

Să notăm cu O'' proiecția punctului O' pe dreapta $C'D'$ și să arătăm că $O'O'' \perp (ABC')$. Într-adevăr, din faptul că $AB \perp (CC'DD')$ rezultă că $AB \perp O'O''$, deci $O'O'' \perp AB$. Cum avem și $O'O'' \perp C'D'$, deducem că $O'O'' \perp (ABC')$.

Constatăm, din cele stabilite mai sus, că $d(A'B', C'D') = O'O''$. Dar $O'O''$ este jumătate din diagonala pătratului $OO'C'C$ (cu lungimea laturii R). Deci $O'O'' = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ și $d(A'B', C'D') = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.



Clasa a IX-a

IX.146. Fie M, N, P, Q mijloacele a patru laturi consecutive ale unui poligon cu $n \geq 4$ laturi. Dacă $MNPQ$ este paralelogram, arătați că $n = 4$.

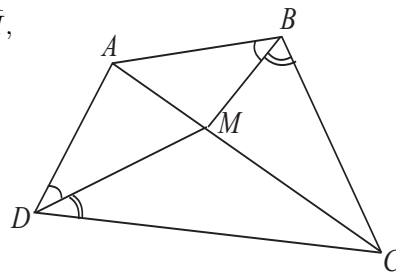
Claudiu-Ștefan Popa, Iași

Soluție. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD respectiv DE . Avem: $MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \vec{r}_M + \vec{r}_P = \vec{r}_N + \vec{r}_Q \Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D = \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E \Leftrightarrow \vec{r}_A = \vec{r}_E \Leftrightarrow A = E \Leftrightarrow n = 4$.

IX.147. Fie M un punct în interiorul patrulaterului convex $ABCD$ astfel încât unghiurile \widehat{AMB} și \widehat{CMD} sunt neascuțite, iar triunghiurile AMD și BMC sunt neobtuzunghice. Notăm cu R_1, R_2, R_3 și R_4 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM, BCM, CDM , respectiv DAM . Dacă $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$, arătați că $ABCD$ este romb.

Ovidiu Pop, Satu Mare și Nicușor Minculete, Brașov

Soluție. Cum $AM = 2R_1 \sin \widehat{ABM} = 2R_4 \sin \widehat{ADM}$, unghiurile \widehat{ABM} , \widehat{ADM} sunt ascuțite sau drepte și $R_1 = R_4$, rezultă că $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ADM}$. Analog se arată că $\widehat{CBM} \equiv \widehat{CDM}$, prin urmare $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}$. În același mod obținem că $\widehat{BAD} \equiv \widehat{BCD}$, așadar $ABCD$ este paralelogram.



Întrucât $AB = 2R_1 \sin \widehat{AMB}$, $CD = 2R_3 \sin \widehat{CMD}$, $AB = CD$, $R_1 = R_3$ și unghiurile \widehat{AMB} și \widehat{CMD} sunt ambele neascuțite, deducem că $\widehat{AMB} \equiv \widehat{CMD}$. Similar, $\widehat{AMD} \equiv \widehat{BMC}$; atunci $2m(\widehat{AMB}) + 2m(\widehat{BMC}) = 2\pi$, de unde rezultă că punctele A, M, C sunt coliniare și, analog, punctele B, M și D sunt coliniare, iar $AC \cap BD = \{M\}$. Avem că $AB = 2R_1 \sin \widehat{AMB}$, iar $BC = 2R_2 \sin(\pi - \widehat{AMB}) = 2R_2 \sin \widehat{AMB}$; cum $R_1 = R_2$, deducem că $AB = BC$ și, astfel, $ABCD$ va fi chiar romb.

IX.148. Arătați că într-un triunghi oarecare avem: $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{\sqrt{3}S}{18R^2}$.

Andi Gabriel Brojbeanu, elev, Târgoviște

Soluție. Fie D, E, F picioarele înălțimilor coborâte din A, B , respectiv C și H ortocentrul triunghiului ABC . Se obține ușor că $EF = R \sin 2A$ (de exemplu, cu teorema sinusului aplicată în $\triangle AEF$, care este înscris în cercul de diametru $AH = 2R \cos A$), $DF = R \cos 2B$ și $DE = R \cos 2C$. Pentru semiperimetrul și aria triunghiului ortic deducem: $p' = \frac{S}{R}$ și $S' = 2S \cos A \cos B \cos C$. Ca urmare, $r' = 2R \cos A \cos B \cos C$.

Aplicând inegalitatea lui Mitrinović relativ la triunghiul ortic DEF , avem că $p' \geq 3\sqrt{3}r'$, ceea ce este echivalent cu inegalitatea de demonstrat.

Avem egalitate dacă și numai dacă triunghiul dat este echilateral.

IX.149. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $a_0 = x \in \mathbb{R}$, $3a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 18$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că există o infinitate de valori iraționale ale lui x pentru care toți termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt numere naturale.

Radu Miron, elev, Iași

Soluție. Relația de recurență se poate scrie sub forma $\frac{1}{3}(a_{n+1} - 3) = (\frac{1}{3}(a_n - 3))^2$; atunci șirul $b_n = \frac{1}{3}(a_n - 3)$ are proprietatea că $b_{n+1} = b_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, prin urmare $b_n = b_0^{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $a_n = 3 \left[\frac{1}{3}(x - 3) \right]^{2^n} + 3$. Alegând $x = 3a\sqrt{3} + 3$, $a \in \mathbb{N}^*$, avem că $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $a_n = 3(a^{2^n} \cdot 3^{2^n - 1} + 1) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

IX.150. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ care au proprietatea că $f(1 + f(2)) = f(2 + f(3)) = f(3 + f(4))$.

Cristinel Mortici, Târgoviște

Soluție. Egalitatea $f(1 + f(2)) = f(2 + f(3))$ conduce la $(5a + b + 1)(3a + b + 5ab + 2ac + 13a^2) = 0$, iar din $f(2 + f(3)) = f(3 + f(4))$ se obține că $(7a + b + 1)(5a + b + 7ab + 2ac + 25a^2) = 0$. Tripletele $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ căutate sunt soluțiile sistemelor

$$\text{I. } \begin{cases} 5a + b + 1 = 0 \\ 7a + b + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} 5a + b + 1 = 0 \\ 5a + b + 7ab + 2ac + 25a^2 = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$\text{III. } \begin{cases} 7a + b + 1 = 0 \\ 3a + b + 5ab + 2ac + 13a^2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{IV. } \begin{cases} 3a + b + 5ab + 2ac + 13a^2 = 0 \\ 5a + b + 7ab + 2ac + 25a^2 = 0 \end{cases} .$$

Autorul rezolvă sistemele cu ajutorul calculatorului, obținând soluțiile $(1, -6, 9)$; $(-1, 4, -2)$; $(1 - 8, 16)$; $(-1, 6, -7)$; $(1, -7, 13)$; $(-1, 5, -5)$.

Clasa a X-a

X.146. Pe laturile triunghiului ABC ca baze, se construiesc triunghiurile isoscele asemenea MAB, NAC și PBC astfel încât M și N se află în exteriorul triunghiului ABC , iar P se află în interiorul acestuia.

a) Arătați că patrulaterul $AMPN$ este paralelogram.

b) Demonstrați că $AMPN$ este romb dacă și numai dacă $AB = AC$.

Constantin Dragomir, Pitești

Soluția 1 (Gheorghe Iurea). În raport cu un reper oarecare în planul complex, notăm cu x afixul punctului X . Fie $m(\widehat{ANC}) = m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BPC}) = t$ și $z = \cos t + i \sin t$. Din $c - n = z(a - n)$ obținem că $n = \frac{c - az}{1 - z}$; analog, $m = \frac{a - bz}{1 - z}$ și $p = \frac{c - bz}{1 - z}$. Se observă că $a + p = m + n$, prin urmare $AMPN$ este paralelogram.

Avem: $AMPN$ romb $\Leftrightarrow AM = AN \Leftrightarrow |m - a| = |n - a| \Leftrightarrow \frac{|a - b|}{|1 - z|} = \frac{|a - c|}{|1 - z|} \Leftrightarrow AB = AC$.

Soluția 2 (a autorului). Deoarece $\widehat{MBP} \equiv \widehat{ABC}$ și $\frac{MB}{AB} = \frac{BP}{BC}$, rezultă că $\triangle MBP \sim \triangle ABC$; analog se arată că $\triangle NPC \sim \triangle ABC$, așadar $\triangle MBP \sim \triangle NPC$. Însă $BP = PC$, deci $\triangle MBP \equiv \triangle NPC$. Deducem că $NP = MB = MA$ și $MP = NC = AN$, prin urmare patrulaterul $AMPN$ are laturile opuse egale, adică este paralelogram. Întrucât $\triangle MAB \sim \triangle NAC$, avem: $AMPN$ romb $\Leftrightarrow AM = AN \Leftrightarrow \frac{MA}{NA} = 1 \Leftrightarrow \triangle MAB \equiv \triangle NAC \Leftrightarrow AB = AC$.

X.147. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația

$$\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} + \frac{1}{1+5^x} = 1 + \frac{1}{1+30^x}.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești

Soluție. Cu notațiile $a = 2^x, b = 3^x, c = 5^x, a, b, c > 0$, ecuația devine succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+abc} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (bc-1) \left(\frac{a}{(1+a)(1+abc)} - \frac{1}{(1+b)(1+c)} \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (bc-1)(ab-1)(ac-1) &= 0. \end{aligned}$$

Rezultă că $6^x = 1$ sau $10^x = 1$ sau $15^x = 1$, prin urmare singura soluție este $x = 0$.

X.148. Determinați funcțiile $f : (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ cu proprietatea că $f(x^y) = (f(x))^y, \forall x \in (1, \infty), \forall y \in (0, \infty)$.

Ion Nedelcu, Ploiești și Lucian Tuțescu, Craiova

Soluție. Fie $x \in (1, \infty)$ și $y = \frac{1}{\ln x} \in (0, \infty)$; cum $x^y = e$, rezultă că $(f(x))^{\frac{1}{\ln x}} = f(e), \forall x \in (1, \infty)$, deci $f(x) = a^{\ln x}$, unde $a = f(e) > 1$. Notând $\alpha = \ln a > 1$, am obținut că $f(x) = x^{\ln a} = x^\alpha, \forall x \in (1, \infty)$, iar funcțiile de acest tip verifică ecuația funcțională din enunț.

X.149. Afizele vârfurilor unui triunghi echilateral sunt numerele complexe a, b și c . Considerăm numărul complex $z = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}$. Demonstrați că partea reală a lui z este $\frac{3}{2}$.

Sven Cortel, elev, Satu Mare

Soluție. Trebuie să arătăm că $2z - 3 \in i\mathbb{R}$, adică $\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \in i\mathbb{R}$. Fie q afixul centrului Q al triunghiului echilateral ABC din enunț, iar M, N și P sunt mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB . Cum $QM \perp BC$, obținem că $\frac{q - \frac{b+c}{2}}{b-c} \in i\mathbb{R}$. Scriem încă două relații similare și, prin sumare, rezultă că

$$q \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right) \in i\mathbb{R}.$$

Suma din prima paranteză este egală cu $\frac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. Deoarece $\triangle ABC$ este echilateral, numărătorul acestei fracții este 0, și de aici, concluzia problemei.

X.150. Spunem că o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este „aproape identică” dacă există o funcție $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel încât $f(f(n)) + g(f(n)) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Dacă funcția f este aproape identică, arătați că funcția asociată g este definită prin $g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Dați exemplu de funcție aproape identică, alta decât funcția identică.

c) Demonstrați că singura funcție aproape identică și monotonă este funcția identică.

Claudiu Mîndrilă, Târgoviște

Soluție. a) Fie f o funcție aproape identică. Dacă $f(n) = f(m)$, atunci $f(f(n)) + g(f(n)) = f(f(m)) + g(f(m))$, prin urmare $n = m$, deci f este injectivă. Notăm $h = f \circ f$; funcția h este injectivă și $h(n) = -g(f(n)) \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$. Se arată prin inducție, folosind această relație, faptul că h este funcția identică. Atunci f va fi bijectivă și, cum $g(f(n)) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, urmează că $g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) De exemplu, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n + (-1)^n$.

c) Funcția f fiind injectivă, monotonia va fi strictă. Codomeniul \mathbb{N} având un cel mai mic element, f nu poate strict descrescătoare, așadar va fi strict crescătoare. Prin inducție, se arată că $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Clasa a XI-a

XI.146. Dacă x este număr real pozitiv, arătați că

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+(x+1)^2} < \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}^2(x+1) - \operatorname{arctg}^2 x) < \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{1+x^2}.$$

Adrian Corduneanu, Iași

Soluție. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$, având derivata $f'(x) = \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$. Aplicând teorema lui Lagrange, există $\bar{x} \in (x, x+1)$ pentru care

$\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}^2(x+1) - \operatorname{arctg}^2 x) = \frac{\operatorname{arctg} \bar{x}}{1 + \bar{x}^2}$. Ținând seama de faptul că funcția arctg este strict crescătoare, se arată imediat că $\frac{\operatorname{arctg} x}{1 + (x+1)^2} < \frac{\operatorname{arctg} \bar{x}}{1 + \bar{x}^2} < \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{1 + x^2}$.

XI.147. Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin: $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că șirul este convergent și calculați limita sa.

Ovidiu Pop, Satu Mare și Gheorghe Szöllösy, Sighetu Marmatiei

Soluție. Luând $y_n = nx_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ verifică recurența $y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{n^2}{y_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $y_1 = x_1 > 0$. Se arată, prin inducție, că $y_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Folosind inegalitatea mediilor, obținem că $y_{n+1} \geq \sqrt{y_n \cdot \frac{n^2}{y_n}} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem că $y_n > n$, $\forall n \geq 2$; atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$. Pe de altă parte, $y_{n+1} - y_n = \frac{n^2 - y_n^2}{2y_n} < 0$, $\forall n \geq 2$, deci $(y_n)_{n \geq 2}$ este descrescător. Contradicția la care am ajuns arată că există $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$ pentru care $y_{n_0} \leq n_0$. Prin inducție, obținem că $y_n \leq n$, $\forall n \geq n_0$, prin urmare $n-1 \leq y_n \leq n$, $\forall n \geq n_0$. Astfel, $\frac{n-1}{n} \leq x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ceea ce arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

XI.148. Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt șiruri de numere reale, $(x_n)_{n \geq 1}$ crescător, astfel încât $nx_{n+2} - (n+1)x_{n+1} \leq y_n \leq nx_{n+1} - (n+1)x_n$, $\forall n \geq 1$, atunci șirul $\frac{y_n}{n^2}$ este convergent.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluție. Împărțind prin $n(n+1)$ relația din enunț, obținem

$$(*) \quad \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{n+1} - \frac{x_{n+1}}{n(n+1)} \leq \frac{y_n}{n(n+1)} \leq \frac{x_{n+1} - x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n(n+1)}, \quad \forall n \geq 1.$$

Notăm $b_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{n}$, $n \geq 1$; acest șir va fi descrescător, cu termeni pozitivi, deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$. Din lema Stolz-Cesàro,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{(n+1)(n+2) - n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{2(n+1)} = \frac{\ell}{2}.$$

Folosind teorema cleștelui și relația (*), rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{n(n+1)} = \frac{\ell}{2}$, așadar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{n^2} = \frac{\ell}{2}$.

XI.149. Dreapta $y = kx$, $k > 0$, intersectează hiperbola $xy = a$, $a > 0$, în punctul de abscisă pozitivă X . Tangenta în X la hiperbolă taie axa Ox în punctul Y . Determinați valorile lui k pentru care triunghiul OXY este echilateral.

Cătălin Calistru, Iași

Soluție. Obținem, după calcule, că $X \left(\sqrt{\frac{a}{k}}, k\sqrt{\frac{a}{k}} \right)$, ecuația tangentei în X la

hiperbolă este $y - k\sqrt{\frac{a}{k}} = -k\left(x - \sqrt{\frac{a}{k}}\right)$, iar $Y\left(2\sqrt{\frac{a}{k}}, 0\right)$. Triunghiul OXY este echi-lateral dacă și numai dacă $OX = OY = XY$, adică $\sqrt{\frac{a(k^2 + 1)}{k}} = 2\sqrt{\frac{a}{k}}$, de unde $k = \sqrt{3}$.

XI.150. Determinați matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu $A^3 = \begin{pmatrix} 20 & 4 & a \\ -32 & 0 & b \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, știind că polinomul $f(X) = \det(XI_3 - A)$ are toate rădăcinile reale.

Mihai Haivas, Iași

Soluție. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f ; atunci $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \text{tr}(A^3) = 24$ și $x_1x_2x_3 = \det A = \sqrt[3]{(\det A)^3} = 8$, prin urmare $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = 0$. Rezultă că $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) = 0$, deci una dintre cele două paranteze se va anula.

Dacă $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, atunci $\text{tr} A = 0$, așadar $f = X^3 - mX - 8$, $m \in \mathbb{R}$. Cum $f(A) = O_3$, deducem că $mA = A^3 - 8I_3 \stackrel{\text{not.}}{=} B$. Avem că $B = \begin{pmatrix} 12 & 4 & a \\ -32 & -8 & b \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $\det B = -128$ și $\det B = m^3 \det A$; obținem că $m = -2\sqrt[3]{2}$, prin urmare $A = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}B$.

Dacă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, deci $\text{tr} A = 6$ și $f(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$. Întrucât $f(A) = O_3$, rezultă că $6A^2 - 12A = B$, de unde $12A^2 + BA = 6A^3$. Din aceste ultime două egalități obținem că $(24I_3 + B) \cdot A = 4(B + 12I_3)$ și, prin trecere la determinanți, ajungem la contradicția $55 = 56$.

Clasa a XII-a

XII.146. Se consideră șirul $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{pn}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ este fixat. Demonstrați că nu există polinoame $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea că $\frac{f(n)}{g(n)} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Gabriela Drînceanu și Răzvan Drînceanu, Craiova

Soluție. Presupunem, prin absurd, că există $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $\frac{f(n)}{g(n)} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Însă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{Q}$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \pm\infty$, în timp ce $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, contradicție.

XII.147. Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \sin 4x}}} dx$.

Bogdan Victor Grigoriu

Soluție. Avem $\sqrt{2 + 2 \sin 4x} = \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)} = 2 \left| \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \right|$
 $= 2 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \sin 4x}} = \sqrt{2(1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right))} =$

$$\sqrt{4 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)} = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{8}\right), \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \text{ Atunci } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \left(x - \frac{\pi}{8}\right)} dx =$$

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{16}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{16} \right).$$

XII.148. Fie $a, b \in [1, \infty)$, $a < b$ și funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 , astfel încât $f(a) = f(b)$. Demonstrați că $\min_{x \in [a, b]} |f''(x)| \leq \frac{2b}{b-a} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Ionuț Ivănescu, Craiova

Soluție. Integrând prin părți, obținem că $\int_a^b x f''(x) dx = x f'(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) dx = b f'(b) - a f'(a)$. Pe de altă parte, conform teoremei de medie, $\int_a^b x f''(x) dx = (b-a)c \cdot f''(c)$, cu $c \in (a, b)$. Rezultă că $(b-a) \cdot c \cdot |f''(c)| = |b f'(b) - a f'(a)| \leq b \cdot |f'(b)| + a \cdot |f'(a)|$. Cum $c > a \geq 1$, avem că $(b-a)c \cdot |f''(c)| \geq (b-a) |f''(c)| \geq (b-a) \min_{x \in [a, b]} |f''(x)|$. Apoi, $b \cdot |f'(b)| + a \cdot |f'(a)| \leq b \cdot |f'(b)| + b |f'(a)| \leq 2b \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. Am arătat astfel că $(b-a) \min_{x \in [a, b]} |f''(x)| \leq 2b \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, de unde concluzia problemei.

XII.149. Rezolvați în \mathbb{C} ecuația $x^7 - 5x^6 + 11x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 13x^2 + 5x - 3 = 0$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluție. Ecuația se factorizează sub forma $(x^2 + 1)[(x-1)^5 - 2] = 0$ și are soluțiile complexe $\pm i$, respectiv $1 + \varepsilon_k \cdot \sqrt[5]{2}$, unde $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$, $k = \overline{0, 4}$.

XII.150. Fie G un grup comutativ de ordin 2014 și $A = \{f_n : G \rightarrow G \mid f_n(x) = x^n, n = \overline{1, 2013}\}$. Determinați numărul automorfismelor lui A .

Cristian Lazăr, Iași

Soluție. Cum orice funcție f_n este morfism, rămâne să vedem în ce condiții f_n este bijecție. Observăm că $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$; din teorema lui Cauchy, există elementele a, b, c ale lui G de ordine 2, 19 respectiv 53. Atunci $a \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_2$; $b \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_{19}$; $c \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_{53}$, deci o funcție f_n de indice n cu $(n, 2014) \neq 1$ nu poate fi injectivă. În cazul în care $(n, 2014) = 1$, funcția f_n este injectivă și, implicit, bijectivă. În concluzie, numărul automorfismelor din A este $\varphi(2014) = 2014 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{19}\right) \left(1 - \frac{1}{53}\right) = 936$.

Soluțiile problemelor pentru pregătirea concurșurilor propuse în nr. 1/2014

A. Nivel gimnazial

G256. Fie $p \geq 3$ un număr prim. Arătați că numărul $p \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, se scrie în mod unic ca sumă (având măcar doi termeni) de numere naturale consecutive.

Elena Iurea, Iași

Soluție. Căutăm $a, t \in \mathbb{N}, t \geq 2$, astfel încât $p \cdot 2^n = a + (a+1) + \dots + (a+t-1)$; atunci $p \cdot 2^{n+1} = t(2a+t-1)$. Numerele $t \geq 2$ și $2a+t-1$ având parități diferite, avem situațiile: 1) $t = p, 2a+t-1 = 2^{n+1}$, deci $a = \frac{2^{n+1} - p + 1}{2}$; 2) $2a+t-1 = 1, t = p \cdot 2^{n+1}$, imposibil; 3) $2a+t-1 = p, t = 2^{n+1}$, deci $a = \frac{p - 2^{n+1} + 1}{2}$. Cum $a \in \mathbb{N}$, dacă $p \leq 2^{n+1}$ convine doar primul caz, iar dacă $p > 2^{n+1}$ convine doar cel de-al treilea. În concluzie, scrierea dorită există și este unică.

G257. Fie $a, n \in \mathbb{N}$, a impar și $n \geq 2$. Aflați restul împărțirii numărului a^n prin $\frac{a^2 + 1}{2}$.

Lucian Tuțescu, Craiova și Dumitru Săvulescu, București

Soluție. Dacă $n = 2$, atunci $a^2 = \frac{a^2 + 1}{2} + \frac{a^2 - 1}{2}$, cu $\frac{a^2 - 1}{2} < \frac{a^2 + 1}{2}$, deci restul împărțirii este $\frac{a^2 - 1}{2}$ (și câtul este 1). Dacă $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^n = a^{2k} = \left(2 \cdot \frac{a^2 + 1}{2} - 1\right)^{2k} = M_{\frac{a^2 + 1}{2}} + 1$. Restul împărțirii va fi 1 dacă $a \geq 3$, iar când $a = 1$ restul căutat este 0.

Fie $n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$; atunci $a^n = a^{4k} \cdot a = (M_{\frac{a^2 + 1}{2}} + 1)a = M_{\frac{a^2 + 1}{2}} + a$. Restul dorit este a dacă $a \geq 3$, respectiv 0 când $a = 1$.

În sfârșit, fie $n = 4k + 3, k \in \mathbb{N}$; atunci $a^n = a(a^2)^{2k+1} = a \left(2 \frac{a^2 + 1}{2} - 1\right)^{2k+1} = a \left(M_{\frac{a^2 + 1}{2}} - 1\right) = M_{\frac{a^2 + 1}{2}} - a = M_{\frac{a^2 + 1}{2}} - \frac{a^2 + 1}{2} + \frac{a^2 + 1}{2} - a = M_{\frac{a^2 + 1}{2}} + \frac{(a-1)^2}{2}$. Restul dorit este $\frac{(a-1)^2}{2}$.

G258. Determinați numerele \overline{abcde} (în baza 10), știind că $a + b + c = e$ și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{10}{e}$.

Cătălin Calistru, Iași

Soluție. Înmulțind membru cu membru relațiile din enunț, obținem că $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{a+b+c}{d} = 10$. Însă $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ (cu egalitate când $a = b = c$) și atunci $a+b+c \leq d \leq 9$. Cifrele a, b, c fiind în mod necesar nenule, rezultă că $a+b+c \in \{3, 4, \dots, 9\}$; presupunem, pentru început, că $a \leq b \leq c$. Dacă $a+b+c = 3$, atunci $a = b = c = 1$ și $d = e = 3$. Dacă $a+b+c = 4$, atunci $a = b = 1, c = 2$, deci $4 \cdot \frac{5}{2} + \frac{4}{d} = 10$, de unde $\frac{4}{d} = 0$, imposibil. Continuând în aceeași manieră, găsim numerele 11133, 22266 și 33399.

G259. Descompuneți numărul $5^{2015} - 1$ în produs de trei factori mai mari decât 5^{400} .

Constantin Dragomir, Pitești

Soluție. Notăm $m = 5^{201}, p = 5m^2 = 5^{403}$; atunci $5^{2015} - 1 = p^5 - 1 = (p-1)(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)$. Însă $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = (p^2 + 3p + 1)^2 - 5p(p+1)^2 =$

$(p^2 + 3p + 1)^2 - 25m^2(p + 1)^2 = A \cdot B$, unde $A = p^2 + 3p + 1 - 5m(p + 1)$, iar $B = p^2 + 3p + 1 + 5m(p + 1)$. Astfel, $5^{2015} - 1 = (p - 1) \cdot A \cdot B$ și se observă ușor că fiecare dintre cei trei factori este mai mare decât 5^{400} .

G260. Fie a, b, c și d numere naturale nenule distincte, astfel încât numărul $abcd$ să fie pătrat perfect. Demonstrați că numărul $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluție. Este adevărată identitatea $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + (ab - cd)^2 + (ab + cd)^2 + (2k)^2$, unde $k^2 = abcd$, $k \in \mathbb{N}^*$. Din faptul că a, b, c, d sunt distincte, primele două paranteze vor fi nenule. În cazul în care $ab - cd = 0$, vom avea că $ad - bc \neq 0$ (situația $ab - cd = 0 = ad - bc$ conduce la $b = d$, imposibil) și atunci $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (a^2 - d^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (ad - bc)^2 + (ad + bc)^2 + (2k)^2$.

G261. Determinați numerele $x \in [1, \infty)$ cu proprietatea că $[(x - 1)^3] = [x - 1]^3 = [(x - 1)(x - 2)(x - 3)]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a .

Alexandru Blaga, Satu Mare

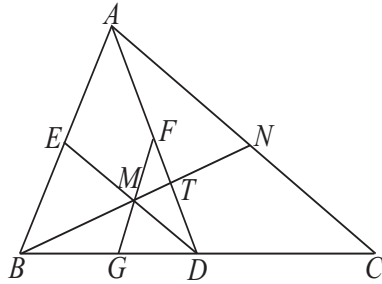
Soluție. Dacă $x \in [1, 2)$, atunci $[(x - 1)^3] = [x - 1]^3 = 0$ și, cum $0 \leq (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 4(x - 1) \frac{2 - x}{2} \cdot \frac{3 - x}{2} \leq \frac{4}{27} \left(x - 1 + \frac{2 - x}{2} + \frac{3 - x}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$, avem că $[(x - 1)(x - 2)(x - 3)] = 0$. Rezultă că orice număr $x \in [1, 2)$ convine. Se verifică faptul că $x = 2$ nu convine. Dacă $x \in (2, 3]$, atunci $[(x - 1)^3] \geq 1$, în timp ce $[(x - 1)(x - 2)(x - 3)] \leq 0$. Dacă $x \in (3, 4]$, atunci $[(x - 1)^3] \geq 8$, iar $[(x - 1)(x - 2)(x - 3)] \leq 6$. Dacă $x \in (n, n + 1]$, cu $n \geq 4$, atunci $[(x - 1)^3] \geq (n - 1)^3$, în timp ce $[(x - 1)(x - 2)(x - 3)] \leq n(n - 1)(n - 2)$, iar $(n - 1)^3 > n(n - 1)(n - 2)$.

În final, numerele căutate sunt cele din intervalul $[1, 2)$.

G262. Fie ABC un triunghi, iar D, F și N mijloacele segmentelor BC, AD respectiv AC . Considerăm punctele $E \in (AB)$ și $G \in (BD)$ și notăm $\{M\} = DE \cap FG$. Dacă punctele B, M și N sunt coliniare, arătați că dreptele AD și EG sunt paralele.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

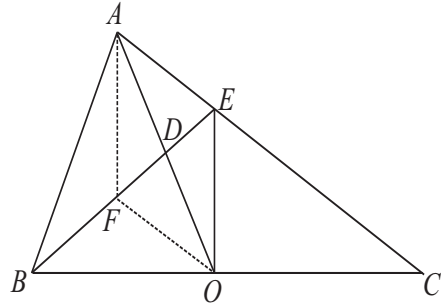
Soluție. Aplicăm de trei ori teorema lui Menelaus: în $\triangle ADC$ (cu transversala $B - T - N$, unde $\{T\} = BN \cap AD$), în $\triangle BDT$ (cu transversala $G - M - F$) și în $\triangle ABT$ (cu transversala $E - M - D$). Obținem: $\frac{AT}{TD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$, de unde $\frac{AT}{TD} = 2$ și, de aici, $\frac{BT}{TD} = 3$ și $\frac{BT}{DT} = 3$; $\frac{BG}{GD} \cdot \frac{DF}{FT} \cdot \frac{TM}{MB} = 1$, deci $\frac{BG}{GD} = \frac{MB}{3MT}$; în sfârșit, $\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AD}{DT} \cdot \frac{MB}{TM} = 1$, prin urmare $\frac{BE}{EA} = \frac{MB}{3MT}$. Deducem că $\frac{BG}{GD} = \frac{BE}{EA}$ și, conform reciprocei teoremei lui Thales, $AD \parallel EG$.



G263. Se consideră triunghiul ABC , O - mijlocul laturii BC , D - mijlocul segmentului AO , iar $BD \cap AC = \{E\}$. Demonstrați că $OE = 2DE$ dacă și numai dacă unghiul \hat{A} este drept.

Geanina Hăvârneanu, Iași

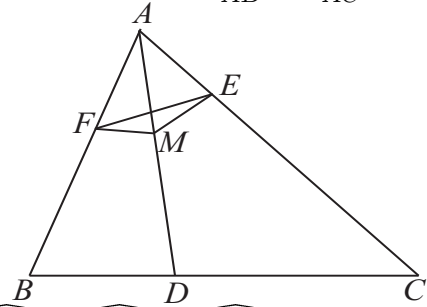
Soluție. Notăm cu F simetricul punctului E față de D . Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle AOC$ cu transversala $B - D - E$, obținem că $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$. Apoi, cu teorema lui Menelaus în $\triangle BCE$ cu transversala $A - D - O$, găsim că $\frac{DE}{BD} = \frac{1}{3}$; de aici, rezultă că F este mijlocul lui BE . Pe de altă parte, $AEOF$ este paralelogram (diagonalele se înjumătățesc), prin urmare $AF = EO$. Avem: $OE = 2DE \Leftrightarrow AF = FE \Leftrightarrow AF = \frac{1}{2}BE \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 90^\circ$, deoarece mediana unui triunghi este egală cu jumătatea laturii pe care cade dacă și numai dacă pleacă dintr-un unghi drept.



G264. Considerăm triunghiul ABC , D un punct situat pe latura BC , iar E și F sunt puncte pe AC , respectiv AB , astfel încât EF este antiparalelă la BC . Cercurile circumscrise triunghiurilor BDF și CDE se intersectează a doua oară în punctul M . Demonstrați că $ME = MF$ dacă și numai dacă AD este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} .

Bogdan Ioniță, București și Titu Zvonaru, Comănești

Soluție. Deoarece EF și BC sunt antiparalele, avem că $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, deci $AE \cdot AC = AF \cdot AB$, adică punctul A are aceeași putere față de cercurile circumscrise triunghiurilor BDF și CDE . Deducem că axa radicală a celor două cercuri este AD , iar punctul M va fi situat pe dreapta AD . Din inscripibilitatea patruleterelor $BDMF$ și $CDME$ rezultă că $m(\widehat{FME}) + m(\widehat{FAE}) = m(\widehat{FMA}) + m(\widehat{EMA}) + m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{BAC}) = 180^\circ$, așadar patruleterul $AFME$ este inscripibil. Atunci $\widehat{MFE} \equiv \widehat{MAE}$ și $\widehat{MEF} \equiv \widehat{MAF}$, prin urmare $ME = MF$ dacă și numai dacă AD este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} .



G265. Considerăm triunghiul ABC înscris în cercul \mathcal{C} . Cercul \mathcal{C}_1 este tangent cercului \mathcal{C} și segmentelor AB și BC în punctele M, L și respectiv K . Dreapta AC intersectează cercurile circumscrise triunghiurilor AML și CMK în R și S , iar punctele E și F sunt mijloacele arcelor \widehat{RM} și \widehat{SM} . Arătați că punctele A, C, E și F sunt conciclice.

Neculai Roman, Mircești (Iași)

Soluție. Notăm cu P al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor AML și CMK . Avem: $m(\widehat{BLP}) + m(\widehat{BKP}) = m(\widehat{AMP}) + m(\widehat{CMP}) = 180^\circ - m(\widehat{B}) = m(\widehat{BLK}) + m(\widehat{BKL})$. Deducem că $P \in KL$ și $m(\widehat{AMP}) = m(\widehat{BLK}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B})$, iar $m(\widehat{CMP}) = m(\widehat{BKL}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B})$, adică MP este bisectoarea unghiului \widehat{AMC} . Din ipoteză, CF și AE sunt bisectoarele unghiurilor \widehat{ACM} , respec-

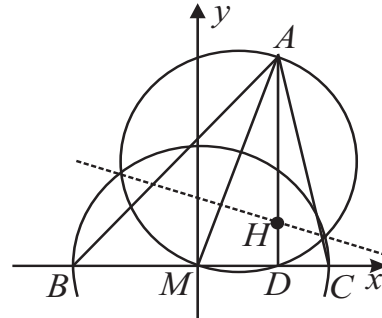
tiv \widehat{CAM} , așadar dreptele MP , AE și CF sunt concurente într-un punct I . Folosind puterea punctului față de cerc, obținem că $MI \cdot IP = AI \cdot IE = CI \cdot IF$, prin urmare punctele A, C, E și F vor fi conciclice.

B. Nivel liceal

L256. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC . Arătați că axa radicală a cercurilor de diametre BC și AM trece prin ortocentrul triunghiului ABC .

Neculai Roman, Mircești (Iași)

Soluția 1 (dată de autorul problemei și de **Corneliu-Mănescu-Avram**, Ploiești). Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $AB > AC$. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$ și notăm cu H punctul în care AD intersectează axa radicală din enunț. Raportăm planul la un reper cu originea în M și care are dreapta BC ca axă Ox ; fie $A(a, b)$, cu $b > 0$. Cercul de diametru BC este $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$, iar cercul de diametru AM este $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - ax - by = 0$. Ecuația axei radicale este $ax + by = 1$, prin urmare $x_H = a$ și $y_H = \frac{1 - a^2}{b}$. Pentru $a \neq \pm 1$, panta dreptei CH este $m_{CH} = -\frac{a+1}{b}$, panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{b}{a+1}$, prin urmare $CH \perp AB$ și, astfel, H este ortocentrul $\triangle ABC$. Dacă $a = 1$, atunci $C = H$ și proprietatea este evidentă; analog pentru $a = -1$.



Soluția 2 (dată de **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureș, **Titu Zvonaru**, Comănești, **Neculai Stanciu**, Buzău și **Daniel Văcaru**, Pitești). Fie H ortocentrul triunghiului și P mijlocul medianei AM . Trebuie să arătăm că punctul H are aceeași putere față de cele două cercuri, deci că $HP^2 - \frac{1}{4}AM^2 = HM^2 - \frac{1}{4}BC^2$ (1). Teorema medianei aplicată în triunghiurile AHM , BHC și ABC arată că $4HP^2 = 2AH^2 + 2HM^2 - AM^2$, $4HM^2 = 2BH^2 + 2CH^2 - BC^2$, respectiv $4AM^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Înlocuind în (1) și efectuând calculele, această relație revine la $2(AH^2 + a^2) = BH^2 + b^2 + CH^2 + c^2$ și această egalitate este adevărată, deoarece $AH = 2R \cos A$, $a = 2R \sin A$ și $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

L257. Fie ABC un triunghi în care $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ și $c < a < b$. Dreapta lui Nagel (determinată de centrul cercului înscris și de centrul de greutate) intersectează laturile AB și AC în punctele P , respectiv Q . Demonstrați că dreptele BQ și CP se intersectează pe bisectoarea din A dacă și numai dacă a este media armonică a numerelor b și c .

Titu Zvonaru, Comănești

Soluție. Fie I centrul cercului înscris, G centrul de greutate, $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei din A și M mijlocul lui BC . Avem: $BD = \frac{ac}{b+c}$, $CD = \frac{ab}{b+c}$, $DM = BM - BD = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$ și, folosind teorema lui Van Aubel, obținem că $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$, iar

$\frac{AG}{GM} = 2$. Notăm $x = \frac{AP}{PB}$, $y = \frac{AQ}{QC}$. Aplicând relația (R_2) din *RecMat 2/2011*, p. 108 pentru $\triangle ABM$, apoi pentru $\triangle ADC$, obținem:

$$\frac{AI}{ID} = \frac{BM \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{AG}{GM}}{BD \cdot \frac{AP}{PB} + DM \cdot \frac{AG}{GM}} \Rightarrow x = \frac{b-c}{a-c},$$

respectiv $\frac{AG}{GM} = \frac{DC \cdot \frac{AI}{ID} \cdot \frac{AQ}{QC}}{DM \cdot \frac{AI}{ID} + MC \cdot \frac{AQ}{QC}} \Rightarrow y =$

$\frac{b-c}{b-a}$. Cu teorema lui Ceva (directă și reciprocă), rezultă că dreptele BQ, CP și AD

sunt concurente dacă și numai dacă $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot$

$$\frac{PA}{PB} = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{b} \cdot \frac{b-a}{b-c} \cdot \frac{b-c}{a-c} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2bc}{b+c}.$$

L258. *Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor BC, CA și AB în punctele D, E respectiv F . Perpendiculara în D pe BC taie EF în punctul Q și cercul înscris în P . Dacă $\{T\} = BQ \cap AC$ și $\{S\} = CQ \cap AB$, demonstrați că punctele S, P și T sunt coliniare.*

Bogdan Ioniță, București

Soluția 1 (dată de autorul problemei și de **Neculai Roman**, Mircești). Folosim notațiile uzuale în triunghi. Demonstrăm că punctul Q aparține medianei din A a triunghiului ABC . Fie $\{M\} = AQ \cap BC$,

$E' = Pr_{BC}E$ și $F' = Pr_{BC}F$. Avem:
 $F'D = BD - BF' = (p-b) - (p-b)\cos B =$
 $2(p-b)\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{2}$

și, analog, $E'D = \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ab}$.

Aplicând relația (R_2) din *RecMat 1/2005*, p. 15, obținem că $\frac{AF}{AB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{AC}{AE} \cdot \frac{QE}{QF} = 1$, deci

$$\frac{BM}{MC} = \frac{c}{p-a} \cdot \frac{p-a}{b} \cdot \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ac} =$$

$$\frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ab} = 1, \text{ așadar } BM = MC.$$

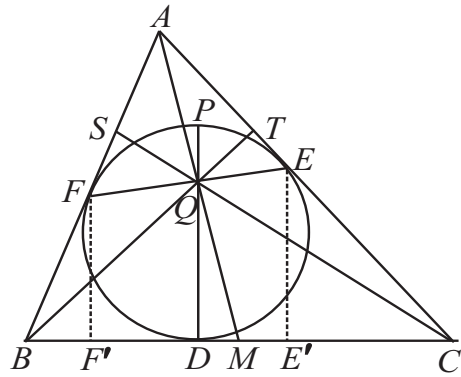
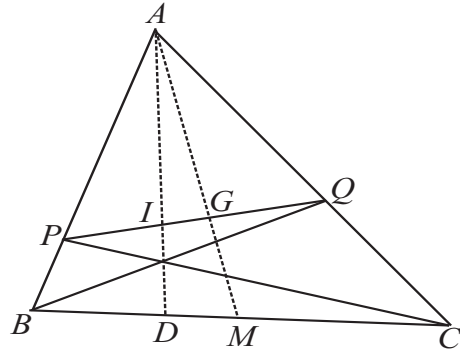
Folosind acum relația (R_2) din *RecMat 1/2005*, p. 15, rezultă că

$$\frac{AQ}{QM} = \frac{a \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{p-a}{p-b} + \frac{a}{2} \cdot \frac{p-a}{p-c}} = \frac{2(p-a)}{a}.$$

Cu teorema lui Menelaus în $\triangle AMC$, cu transversala $B-Q-T$, avem că $\frac{BM}{BC} \cdot \frac{TC}{TA} \cdot \frac{QA}{QM} = 1$, deci $\frac{TA}{TC} = \frac{p-a}{a}$. Analog se

arată că $\frac{AS}{SB} = \frac{p-a}{a}$, prin urmare $ST \parallel BC$.

Rămâne de demonstrat că distanța dintre dreptele paralele BC și ST este $2r$. Acest lucru revine la $\frac{p-a}{a} = \frac{h_a - 2r}{2r} \Leftrightarrow \frac{p}{a} = \frac{h_a}{2r} \Leftrightarrow 2pr = ah_a$, egalitate adevărată.



Soluția 2 (Corneliu Mănescu-Avram, Ploiești). Raportăm planul la un reper cartezian având cercul înscris în triunghi drept cerc unitate și axa Ox paralelă cu BC ; avem: $B(b, -1)$, $C(c, -1)$, $D(0, -1)$, $P(0, 1)$, cu $b < -1$, $c > 1$. Apoi, $E(e, \sqrt{1-e^2})$, $F(f, \sqrt{1-f^2})$, cu $0 < e < 1$, $-1 < f < 0$. Ecuțiile tangentelor la cerc prin E și F sunt $ex + \sqrt{1-e^2} \cdot y = 1$, $fx + \sqrt{1-f^2} \cdot y = 1$ și impunem condițiile ca ele să treacă prin B , respectiv prin C ; obținem $e = \frac{2c}{c^2+1}$, $f = \frac{2b}{b^2+1}$, iar ecuația dreptei EF va fi $(b+c)x + (bc-1)y = bc+1$.

Perpendiculara în D pe BC are ecuația $x = 0$ și taie EF în $Q\left(0, \frac{bc+1}{bc-1}\right)$. Dreptele AC și BQ au ecuațiile $2cx + (c^2-1)y = c^2+1$, respectiv $2cx + (bc-1)y = bc+1$ și se intersectează în $T\left(\frac{1}{c}, 1\right)$. Analog, se obține că $S\left(\frac{1}{b}, 1\right)$. Se constată că punctele S, P, T aparțin dreptei $y = 1$ (tangenta la cercul înscris paralelă cu BC) ceea ce încheie soluția problemei.

L259. Considerăm mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Pentru orice submulțime nevidă X a lui A , definim

$$M(X) = \{t \mid t = xy, x \in X, y \in Y = A \setminus X\}.$$

Arătați că $\max_{\emptyset \neq X \subset A} |M(X)| = 24$.

Gheorghe Iurea, Iași

Soluție. Fie $a = |X|$, $b = |Y|$, cu $a, b = \overline{1, 10}$, $a + b = 10$; atunci $|M(X)| \leq ab$. Dacă $a \leq 4$, atunci $ab \leq 24$, prin urmare $M(X)$ ar putea avea 25 de elemente numai dacă $a = b = 5$ și toate produsele xy cu $x \in X$, $y \in Y$ sunt distincte. Vom arăta că acest lucru nu este posibil.

Fie $X \subset A$ cu $|X| = 5$. Deosebim situațiile:

i) Atât X , cât și Y conțin elemente de forma n și $2n$: există $x, 2x \in X$ și $y, 2y \in Y$; atunci $x \cdot 2y = y \cdot 2x$, deci $|M(X)| \leq 24$.

ii) Cel puțin una dintre mulțimile X și Y (fie aceasta X) nu conține nicio pereche de forma $(n, 2n)$. Dacă X conține cel puțin două numere pare $2x, 2y$, atunci $x, y \in Y$ și avem $2x \cdot y = 2y \cdot x$, deci $|M(X)| \leq 24$. Dacă X nu conține numere pare, atunci $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ și $1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$, deci $|M(X)| \leq 24$. În sfârșit, dacă X conține un singur număr par, luăm fiecare situație în parte. De exemplu, dacă $X = \{8, \dots\}$ și $Y = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$, avem cazurile: 1) $1, 3 \in X$; atunci $2, 6 \in Y$ și $1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$, deci $|M(X)| \leq 24$; 2) $1 \in X, 3 \in Y$; atunci $X = \{8, 1, 5, 7, 9\}$, $Y = \{2, 4, 6, 10, 2\}$ și $1 \cdot 10 = 5 \cdot 2$, deci $|M(X)| \leq 24$; 3) $1, 3 \in Y$; atunci $X = \{8, 3, 5, 7, 9\}$, $Y = \{2, 4, 6, 10, 1\}$ și $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$, deci $|M(X)| \leq 24$. Analog se procedează în celelalte situații.

Am arătat că $|M(X)| \leq 24$. Considerând $X = \{2, 3, 4, 6, 10\}$ și $Y = \{1, 5, 7, 8, 9\}$, se constată că $|M(X)| = 24$, prin urmare $\max_{\emptyset \neq X \subset A} |M(X)| = 24$.

Notă. Au rezolvat problema **Titu Zvonaru**, Comănești și **Neculai Stanciu**, Buzău.

L260. Spunem că numerele raționale nenule a_1, a_2, \dots, a_n formează un grup unit dacă $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 0$ și $n! \cdot a_1 a_2 \cdots a_n$ este număr natural pătrat perfect.

Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care există grupuri unite cu n elemente.

Alexandru Blaga, Satu Mare

Soluția 1 (a autorului). Vom arăta că există grupuri unite cu n termeni pentru toate numerele n de forma $n = 3p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Pentru $p = 1$, putem considera $a_1 = 4$, $a_2 = -1$, $a_3 = -\frac{2}{3}$. Apoi, când $k = \overline{1, p}$, luăm $a_{3k+1} = \frac{1}{3k+1} \cdot a_1$, $a_{3k+2} = \frac{2}{3k+2} \cdot a_2$, $a_{3k+3} = \frac{3}{3k+3} \cdot a_3$ și avem: $a_1 + 2a_2 + \dots + 3pa_{3p} = p(a_1 + 2a_2 + 3a_3) = 0$, $(3p)! \cdot a_1 a_2 \dots a_{3p} = (a_1 \cdot 2a_2 \cdot 3a_3)^p$, număr care este pătrat perfect.

Soluția 2 (Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureș, Gheorghe Stoica, Petroșani). Fie $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ și $a_i = (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$, $i = \overline{1, 4k}$. Avem $\sum_{i=1}^{4k} ia_i = 0$ și $(4k)! \prod_{i=1}^{4k} \left((-1)^i \cdot \frac{1}{i} \right) = 1$ este pătrat perfect.

Soluția 3 (Daniel Văcaru, Pitești, Titu Zvonaru, Comănești și Neculai Stanciu, Buzău). Considerăm $n = 4k$ și $a_1 = 4k$, $a_{4k} = -1$, $a_2 = 4k - 1$, $a_{4k-1} = -2, \dots, a_{2k} = 2k + 1$, $a_{2k+1} = -2k$. Evident că prima relație este îndeplinită, iar $n! a_1 a_2 \dots a_n = (-1)^{2k} (n!)^2 = (n!)^2$.

L261. Într-un șir de numere reale, un termen se numește acceptabil dacă poate fi scris ca suma câtorva termeni (nu neapărat distincți) ai șirului.

a) Dacă toți termenii șirului sunt numere naturale, cel puțin două relativ prime, atunci toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit, sunt acceptabili.

b) Dați exemplul de șir care nu are niciun termen acceptabil.

Radu Miron, elev, Iași

Soluție. a) Fie p, q termeni ai șirului, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare avem că $n = xp + yp$, cu $x, y \in \mathbb{N}$. Rezultă că toți termenii $x_i \geq n$ sunt acceptabili.

b) Considerăm $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_i + x_j > 2 \geq x_k$, $\forall i, j, k \in \mathbb{N}^*$, șirul considerat nu are termeni acceptabili.

Notă. Au rezolvat problema Titu Zvonaru, Comănești și Neculai Stanciu, Buzău.

L262. Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 6$, iar $x_{n+4} = 2x_{n+3} + x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n$. Arătați că $\frac{x_1^2}{1^2} + \frac{x_2^2}{2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{n^2} = \frac{x_n x_{n+1}}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Constantin Dragomir, Pitești

Soluție. Se arată prin inducție că $x_n = nF_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde F_n este al n -lea termen al șirului Fibonacci. Atunci relația de demonstrat revine la $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ și se demonstrează ușor, tot prin inducție.

Notă. Am primit soluții corecte de la Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureș, Daniel Văcaru, Pitești, Corneliu Mănescu-Avram, Ploiești, Titu Zvonaru, Comănești, Neculai Stanciu, Buzău și Gheorghe Stoica, Petroșani.

L263. *Demonstrați că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci este adevărată inegalitatea*

$$\frac{8}{9} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comănești

Soluție. Folosind identitățile $\left(\sum \frac{a}{b+c} \right) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \sum \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$ și $(\sum a^3) - 3abc = \frac{1}{2}(\sum a)(\sum(a-b)^2)$, inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{8}{9} \left(\sum \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2} \right) &\geq \frac{1}{6} - \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{9} \sum \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{1}{12} \cdot \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3} \sum (a-b)^2 \\ &\Leftrightarrow 16 \sum \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \geq 3 \cdot \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3} \sum (a-b)^2. \end{aligned}$$

Observăm că este suficient să demonstrăm că

$$(1) \quad \frac{16(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{3(a+b+c)(a-b)^2}{a^3+b^3+c^3}.$$

Dacă $a = b$, în (1) avem egalitate. Presupunem că $a \neq b$ și atunci inegalitatea (1) devine

$$(2) \quad \begin{aligned} 16(a^3+b^3+c^3) &\geq 3(a+b+c)(c^2+ab+bc+ca) \Leftrightarrow \\ 13(a^3+b^3+c^3) + 3(a^3+b^3) &\geq 3c^2(a+b) + 3 \sum a \sum ab. \end{aligned}$$

Cu inegalitatea lui Cebîșev și binecunoscuta $\sum a^2 \geq \sum ab$, obținem:

$$(3) \quad 9 \sum a^3 \geq 3 \sum a \sum a^2 \geq 3 \sum a \sum ab,$$

iar cu inegalitatea $MA \geq MG$ avem

$$(4) \quad a^3 + c^3 + c^3 \geq 3ac^2,$$

$$(5) \quad b^3 + c^3 + c^3 \geq 3bc^2.$$

Adunând inegalitățile (3), (4), (5) și $6a^3 + 6b^3 > 0$, rezultă exact inegalitatea (2). Avem egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$.

Notă. S-a primit soluție corectă de la **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureș.

L264. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ sunt două matrice care comută și $\det(A^2 - AB + B^2) - \det(A^2 + AB + B^2) + 2 = 6\det AB$, arătați că $\det(A - B) = 0$.*

Florin Stănescu, Găești

Soluție. Considerăm polinomul $f(X) = \det(A + XB) = \det A + aX + bX^2 + (\det B)X^3 \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este rădăcină cubică a unității, atunci $E = \det(A^2 - AB + B^2) - \det(A^2 + AB + B^2) = \det(A + \varepsilon B)\det(A + \bar{\varepsilon}B) - \det(A - \varepsilon B) \cdot \det(A - \bar{\varepsilon}B) = f(\varepsilon)f(\bar{\varepsilon}) - f(-\varepsilon)f(-\bar{\varepsilon})$. După efectuarea calculelor, găsim că $E = 4\det A \cdot \det B - (2a\det A + 2b \cdot \det B + 2ab)$. Condiția din enunț devine $(a + \det B)(b + \det A) = 1$ și, cum $a, b, \det A$ și $\det B$ sunt numere întregi, atunci $a = 1 - \det B$ și $b = 1 - \det A$ sau $a = -1 - \det B$ și $b = -1 - \det A$. În fiecare caz, obținem că $\det(A - B) = f(-1) = 0$.

L265. Fie a_1, \dots, a_m elementele idempotente din inelul \mathbb{Z}_n . Câte dintre sumele $a_i + a_j$, $1 \leq i < j \leq n$, sunt tot elemente idempotente?

Marian Tetiva, Bârlad

Soluție. Fie $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ descompunerea în produs de factori primi a lui n , unde $p_1 < \dots < p_k$ sunt numere prime și a_1, \dots, a_k sunt numere întregi pozitive. Se știe că inelul \mathbb{Z}_n este izomorf cu produsul direct $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{a_k}}$, prin urmare putem rezolva problema cu același enunț referitoare la acest inel. Elementele idempotente ale produsului direct sunt de forma (x_1, \dots, x_k) , unde fiecare x_i este 0 sau 1 în inelul $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ (nu vom folosi notații speciale pentru elementele din inele de clase de resturi). Prin urmare $(x_1, \dots, x_k) + (y_1, \dots, y_k)$ este tot element idempotent, dacă $x_i + y_i$ este 0 sau 1 în $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ pentru fiecare $i \in \{1, \dots, k\}$.

Distingem două cazuri. Întâi, să presupunem că $p_1^{a_1}$ nu este egal cu 2 (adică fie că n este impar, fie că, dacă este par, atunci se divide cu 4), ceea ce înseamnă că $1 + 1 \neq 0$ în $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}}$. De asemenea, $1 + 1 \neq 0$ în fiecare $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ (căci p_2, \dots, p_k sigur nu sunt egale cu 2). Asta înseamnă că fiecare sumă $x_i + y_i$ poate fi egală cu 0 sau 1 în trei moduri ($x_i = y_i = 0$, sau $x_i = 0$ și $y_i = 1$, sau $x_i = 1$ și $y_i = 0$), prin urmare $(x_1, \dots, x_k) + (y_1, \dots, y_k)$ poate fi element idempotent în 3^n moduri, deci numărul perechilor ordonate $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)$ de elemente idempotente din $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{a_k}}$ a căror sumă este tot un element idempotent este

$$\frac{3^k - 1}{2} + 1 = \frac{3^k + 1}{2},$$

deoarece suma $(0, \dots, 0) + (0, \dots, 0)$ este singura care se numără o singură dată.

Al doilea caz este cel în care $p_1^{a_1} = 2$, adică atunci când n se divide cu 2, dar nu cu 4. În acest caz, $x_1 + y_1$ poate fi 0 sau 1 în patru moduri (practic în toate cazurile, deoarece $1 + 1 = 0$ în $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} = \mathbb{Z}_2$), iar singurele sume numărate astfel doar o dată sunt $(0, \dots, 0) + (0, \dots, 0)$ și $(1, 0, \dots, 0) + (1, 0, \dots, 0)$. Așadar acum există

$$\frac{4 \cdot 3^{k-1}}{2} + 2 = 2 \cdot 3^{k-1} + 1$$

perechi distincte de elemente idempotente a căror sumă este tot un element idempotent.

Probleme propuse¹

Clasele primare

P297. Completați cu cifre căsuțele goale din șirul 1, 2, □, 5, 6, □, 9, astfel încât cele șapte numere rezultate să fie în ordine crescătoare.

(Clasa I)

Cătălina Bulei, elevă, Iași

P298. Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la 6, o singură dată fiecare. În câte moduri se pot șterge două numere astfel încât suma celor rămase să fie pară?

(Clasa I)

Daniela Mititelu, elevă, Iași

P299. Tabloul alăturat are 50 linii. De câte ori apare în el numărul 19? Explicați răspunsul dat.

(Clasa I)

Cristina Chelaru, elevă, Iași

1					
1	2	1			
1	2	3	2	1	
1	2	3	4	3	2
1	2	3	4	3	2
1	2	3	4	3	2

P300. Aflați numărul \overline{abc} , știind că $\overline{abc} + \overline{bc} = 756$ și $\overline{cba} + \overline{ba} = 952$.

(Clasa a II-a)

Maria Boutiuc, elevă, Iași

P301. În desenul alăturat, pe fiecare linie sunt scrise numere consecutive astfel încât $a + d = 13$, $e + h = 21$, $i + l = 29$. Să se afle suma tuturor numerelor scrise în tabel.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

(Clasa a II-a)

Ana Stoica, elevă, Iași

P302. Scrieți cel mai mare număr format din trei cifre nenule care are suma dintre cifra zecilor și cifra unităților 8, iar suma dintre cifra sutelor și cea a zecilor 9.

(Clasa a II-a)

Tatiana Ignat, elevă, Iași

P303. Câte numere de forma \overline{abc} îndeplinesc condiția $a \times \overline{bc} = c \times \overline{ba}$?

(Clasa a III-a)

Denisa Apetrei, elevă, Iași

P304. Suma unor numere naturale este 350, iar produsul lor este 35. Să se afle aceste numere.

(Clasa a III-a)

Iustina Diaconu, elevă, Iași

P305. O familie compusă din părinți și doi copii merge la teatru. Ei au ocupat patru locuri consecutive pe același rând astfel încât copiii să nu stea unul lângă celălalt. În câte moduri se pot așeza membrii familiei pe cele patru locuri?

(Clasa a III-a)

Dumitrița Grigoriu, elevă, Iași

P306. Spunem că două numere sunt „asociate” dacă suma lor se împarte exact la 2 sau la 3 sau la 5. Găsiți toate numerele asociate cu 11 aflate între 10 și 36.

(Clasa a III-a)

Mihaela Buleandă, elevă, Iași

P307. Să se determine câte perechi de numere consecutive formate din câte trei cifre au proprietatea că primul număr se împarte exact la trei, iar al doilea se împarte exact la patru.

(Clasa a IV-a)

Ionuț Airinei, elev, Iași

P308. O suprafață dreptunghiulară de $2m \times 3m$ se acoperă cu plăci dreptunghiulare de gresie de $25 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$. Se poate face lucrarea numai cu plăci întregi?

(Clasa a IV-a)

Marian Ciuperceanu, Craiova

¹Se primesc soluții până la data de 15 ianuarie 2015.

P309. Să se găsească un număr care, adunat cu suma cifrelor sale, să dea 78912.
(Clasa a IV-a) **Maria Boutiuc, elevă, Iași**

P310. Se consideră numerele $1, 2, 3, \dots, 9$.

a) Să se arate că numărul $1 + 2 + 3 + \dots + 9$ se împarte exact la 3.

b) Să se arate că există cel puțin o aranjare pe dreaptă a numerelor $1, 2, 3, \dots, 9$ astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să nu se împartă exact la 3.

(Clasa a IV-a) **Iulia Sticea, elevă, Iași**

Clasa a V-a

V.179. Arătați că numărul $n = 1023 \cdot 1024 + 2^{30} - 2^{20}$ se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

Viorica Dogaru, Giurgiu

V.180. Determinați numerele \overline{ab} cu proprietatea că 2014 se divide cu $a^2 + b^2$.

Gheorghe Iacob, Pașcani

V.181. Anul nașterii unei persoane este \overline{abcd} , unde $b = d^2$ și $a + b = 10$. Stabiliți ce vârstă va avea persoana în anul $2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

Răzvan Ceucă, student, Iași

V.182. Găsiți cele mai mici cinci numere naturale n pentru care numărul $A = \frac{17}{14} + \frac{1717}{1414} + \dots + \frac{1717 \dots 17}{1414 \dots 14}$ (suma are n termeni) este pătrat perfect.

Vasile Chiriac, Bacău

V.183. Stabiliți dacă fracția $\frac{2013^{2014} + 2014^{2013}}{2013^{2013} + 2014^{2014}}$ este subunitară, echiunitară sau supraunitară.

Diana Gregoretti, Galați

V.184. Fie $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care orice submulțime cu n elemente a lui E conține două elemente a căror sumă se divide cu 3.

Viorica Momiță, Iași

V.185. Pe o tablă uriașă sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 1000, în ordine crescătoare. Cei n elevi dintr-un grup primesc numere de ordine de la 1 la n și, în ordinea stabilită, șterg numere de pe tablă astfel: dacă un elev are număr impar, șterge toate numerele aflate pe poziții impare în șirul de pe tablă; dacă are număr par, șterge toate numerele aflate pe poziții pare în șirul de pe tablă. Cel de-al n -lea elev șterge ultimul număr aflat pe tablă. Stabiliți care este acest ultim număr șters.

Geanina Hăvârneanu, Iași

Clasa a VI-a

VI.179. Măsurile a cinci unghiuri în jurul unui punct sunt exprimate, în grade, prin numerele a, b, c, d și e . Dacă $0, 75 \cdot a$; $0, 6 \cdot b$ și $0, (3) \cdot c$ sunt direct proporționale cu 3, 3 și 2, iar $0, 8(3) \cdot c$; $0, (5) \cdot d$ și $0, 2(7) \cdot e$ sunt invers proporționale cu 2, 2 și 3, determinați numerele a, b, c, d și e .

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

VI.180. Determinați numerele naturale x și y pentru care $x^2 + xy = y + 2014$.

Nicolae Ivășchescu, Craiova

VI.181. Fie a, b, c numere naturale cu proprietatea că $a^2 + b^2 + c^2 = ab + 5bc + ca$. Arătați că $(a + b)(b + c)(c + a)$ este un număr divizibil cu 8.

Denisa Alexandra Luchian, elevă, Iași

VI.182. Se consideră numerele prime distincte p, q, r și s , astfel încât $(r + s, q) = 1$. Aflați numerele naturale nenule x, y și z astfel încât $(x + z, y) = 1$, iar $\frac{py}{q} = \frac{rz}{s} = x$.

Petru Asaftei, Iași

VI.183. Arătați că șirul 133, 13333, 1333333, ... conține numai numere compuse.

Elena Iurea, Iași

VI.184. Fie $A_{2n} = \underbrace{1010 \dots 10}_{2n \text{ cifre}}$ și $B_{4n} = \underbrace{11001100 \dots 1100}_{4n \text{ cifre}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ale numerelor A_{4n} și B_{4n} .

Temistocle Bîrsan, Iași

VI.185. În triunghiul ABC cu $m(\widehat{B}) = 15^\circ$ și $m(\widehat{C}) = 30^\circ$, mediatoarea laturii AB intersectează BC în M . Pe latura AB se consideră punctul N astfel încât $m(\widehat{AMN}) = 15^\circ$. Arătați că CN este bisectoarea unghiului \widehat{ACB} .

Gheorghe Iurea, Iași

Clasa a VII-a

VII.179. Perechile de numere reale (x_1, y_1) și (x_2, y_2) sunt soluții ale ecuației $x^2 - 2y^2 = 1$. Arătați că $x_1x_2 + 2y_1y_2 \neq 0$.

Petru Asaftei, Iași

VII.180. Fie a, x, y astfel încât $a > 0$ și $0 \leq x, y \leq a$. Arătați că $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - y^2} \geq \sqrt{a^2 - (x + y - a)^2}$. În ce condiții are loc egalitatea?

Dorina Goiceanu și Nicoleta Bran, Craiova

VII.181. Fie $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^2 + 2y$ este pătrat perfect. Arătați că $x^2 + y$ se poate scrie ca suma pătratelor a două numere naturale.

Aurel Chiriță, Slatina

VII.182. Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil și punctele M, N, P astfel încât $\{M\} = AC \cap BD$, $\{N\} = AB \cap CD$ și $\{P\} = AD \cap BC$. Arătați că $\frac{MA}{MC} = \frac{NA}{NC} \cdot \frac{PA}{PC}$.

Silviu Boga, Iași

VII.183. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{B}) = 15^\circ$ și $m(\widehat{C}) = 30^\circ$. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului. Mediatoarea laturii BC taie AB în E . Paralela prin E la OC taie BC în H . Demonstrați că $OH \perp AB$.

Mirela Marin, Iași

VII.184. Se consideră triunghiul ascuțiuunghic ABC , cu $AB < AC$. Fie A' piciorul bisectoarei din A , iar D este un punct pe segmentul AA' astfel încât $BA' = BD$. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABA' , arătați că:

a) $\frac{AD}{AA'} = \frac{AB}{AC}$; b) $HD \perp AC$.

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

VII.185. Fie ABC un triunghi și D, E, F puncte situate pe laturile BC, CA , respectiv AB . Paralela prin A la DE intersectează dreapta FD în punctul M . Să se demonstreze că punctul M aparține liniei mijlocii paralele cu BC dacă și numai dacă cevienele AD, BE și CF sunt concurente.

Titu Zvonaru, Comănești

Clasa a VIII-a

VIII.179. Tetraedrul $OABC$ are $OA = OB = a$, $AB = b$, iar măsura unghiului diedru dintre planele (OAB) și (ABC) este de u° . Determinați distanța de la punctul O la planul (ABC) .

Adrian Corduneanu, Iași

VII.180. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AD , respectiv $A'D'$ ale cubului $ABCD A'B'C'D'$. Dacă $\{S\} = BD' \cap (CMN)$, demonstrați că punctele C, S, N sunt coliniare.

Mirela Marin, Iași

VII.181. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $a = (\sqrt{2014} + 1)(\sqrt{2014} - \sqrt{n})$ este rațional.

Ionel Tudor, Călugăreni

VII.182. Determinați numerele naturale $m \geq 2$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m^n - 1$ divide $7^n - 1$.

Gabriel Nemțaru, Melinești, Dolj

VII.183. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z \geq 3$. Arătați că $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 3 \geq 3(x + y + z)$.

Mihai Dicu și Lucian Tuțescu, Craiova

VII.184. Dacă $a, b, c \in [0, 1]$ nu sunt toate nule, arătați că $\frac{ab}{abc + ab + c} + \frac{bc}{abc + bc + a} + \frac{ca}{abc + ca + b} \leq 1$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

VII.185. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^{2n-1} \cdot c + a^{n-1} \cdot b + 1 < 0$. Demonstrați că $(a - c)^2 > (a + b + c)(a - b + c)$.

Cătălin Calistru, Iași

Clasa a IX-a

IX.151. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bc + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Fie S și P suma, respectiv produsul soluțiilor ecuației $f(x) = 0$, iar $\alpha = f(S)$, $\beta = f(P)$. Găsiți soluțiile ecuației $\alpha(x - P)(1 - x) = \beta x$.

Cătălin Calistru, Iași

IX.152. Fie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ și numere $a_i \in (0, \infty)$, $x_i \in [0, \infty)$, $i = \overline{1, n}$. Arătați că

$$(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{a_i} \geq \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i x_j (x_i + x_j)}{a_i + a_j}.$$

Alexandru Blaga, Satu Mare

IX.153. Arătați că $\sum \frac{a^2}{r_a r_b} \geq 4$, notațiile fiind cele uzuale în triunghi.

Mihaela Berindeanu, București

IX.154. Arătați că $\frac{3R}{2r} \geq \frac{l_a}{l_b} + \frac{l_b}{l_c} + \frac{l_c}{l_a}$, notațiile fiind cele uzuale în triunghi.

Vasile Jiglău, Arad

IX.155. Fie triunghiul ABC în care $AB = AC = b$, $BC = a$, $m(\widehat{BAC}) = 100^\circ$. Arătați că $a^4 + 2b^4 + 2a^3b - 5ab^3 - 3a^2b^2 = 0$.

Neculai Roman, Mircești, Iași

Clasa a X-a

X.151. Fie $x, y, z \in (1, \infty)$ și $a > 0$ astfel încât $\lg x \sqrt{\lg y \cdot \lg z} + \lg y \sqrt{\lg x \cdot \lg z} + \lg z \sqrt{\lg x \cdot \lg y} \geq a$. Arătați că $xyz \geq 10^{\sqrt{3a}}$.

Lucian Tuțescu și Camelia Dană, Craiova

X.152. a) Arătați că $\frac{7}{6} < \lg 16 < \frac{4}{3}$.

b) Determinați primele două cifre și ultimele două cifre ale numărului 16^6 , fără a-l calcula.

Ionel Tudor, Călugăreni

X.153. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este dat, determinați numerele reale a și b pentru care numărul complex $z = \frac{a-i}{b+i}$ este rădăcină nereală de ordin n a unității.

Dan Popescu, Suceava

X.154. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte. Arătați că

$$\max \left(\frac{1}{|z_1 - z_2|}, \frac{1}{|z_2 - z_3|}, \frac{1}{|z_3 - z_1|} \right) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3 + 3 \max(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2)}.$$

Marcel Chiriță, București

X.155. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ având proprietățile

(i) f este injectivă și g este surjectivă;

(ii) $f(0) = g(0) = 0$;

(iii) $|f(m) - f(n)| \leq |g(m) - g(n)|, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstrați că cele două funcții sunt egale.

Claudiu Mîndrilă, elev, Târgoviște

Clasa a XI-a

XI.151. Definim șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ prin: $x_0 = 0$, $x_{n+1} = (n+1)^{x_n}$. Determinați numerele naturale n pentru care $x_{n+2} = x_{n+1}^3 + x_n$.

Răzvan Ceucă, student, Iași

XI.152. Calculați $L_\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1)^\alpha \ln(x+1) - x^\alpha \ln x)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ionel Tudor, Călugăreni și Stelian Piscan, Giurgiu

XI.153. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir și propozițiile: (P_1) „Șirul $(a_{n+1} - a_n)_{n \geq 1}$ este convergent”; (P_2) „Șirul $(\max(a_n, a_{n+1}))_{n \geq 1}$ este convergent”; (P_3) „Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent”. Arătați că:

- a) (P_1) nu implică (P_3) ;
- b) (P_2) nu implică (P_3) ;
- c) (P_1) și (P_2) implică (P_3) .

Gheorghe Iurea, Iași

XI.154. Determinați numerele reale x cu proprietatea că $9^x + 25^x = 15^x + \frac{19}{225}$.

Marian Cucoaneș, Mărășești și Lucian Tuțescu, Craiova

XI.155. Se consideră matricele $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ cu $AB = BA$ și numărul $a \in (\frac{1}{4}, \infty)$. Dacă $\det(A^2 + AB + aB^2) = 0$, arătați că $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Dan Popescu, Suceava

Clasa a XII-a

XII.151. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = \frac{1}{2} + 3X - 4X^3$ și $g(\cos \frac{\pi}{9}) = 0$. Demonstrați că f divide g .

Constantin Dragomir, Pitești

XII.152. Pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm cu $\sigma(n)$ suma divizorilor pozitivi ai lui n și cu $\varphi(n)$ numărul numerelor din mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ care sunt relativ prime cu n . Pentru

$n \in \{p^\alpha | p = \text{prim}, \alpha \in \mathbb{N}\}$, calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\sigma(n) \cdot \varphi(n)}}{n}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

XII.153. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ fixat. Determinați funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(x) \cdot f(x) + \lambda(f(x))^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Sven Cortel, elev, Satu-Mare

XII.154. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $x^2 f(x) \geq e^{\frac{1}{x}}, \forall x \in (0, \infty)$. Arătați că funcția f nu are primitive.

Florin Nicolaescu, Balș

XII.155. Determinați funcțiile continue $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ pentru care $\max\{f(a), g(a)\} \leq \int_0^a f(x) \cdot g(x) dx, \forall a \in [0, \infty)$.

Florin Stănescu, Găești

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G266. Determinați numărul natural n minim având proprietatea: oricare ar fi mulțimea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}$, există $B, C \subset A$ astfel încât $|B| = |C| = 3$, $B \cap C = \emptyset$ și $S_B + S_C = 3$. (Am notat cu S_M suma elementelor mulțimii M .)

Cristian Lazăr, Iași

G267. Demonstrați că nu există numere naturale x, y prime între ele, de parități diferite, pentru care numărul $a = xy^3 - yx^3$ să fie pătrat perfect.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

G268. Considerăm numărul $a = 0,149162536\dots$, obținut prin scrierea (după virgulă) a tuturor pătratelor perfecte, unul după altul. Demonstrați că a este irațional.

Radu Miron, elev, Iași

G269. Arătați că $A = \frac{1}{25}(9^{8n+4} + 5 \cdot 9^{6n+3} + 33 \cdot 9^{4n+2} + 5 \cdot 9^{2n+1} + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, este număr natural compus.

Lucian Tuțescu, Craiova

G270. Scrieți în ordine crescătoare numerele $2014!$, $(201!)^{4!}$ și $(20!)^{14!}$.

Temistocle Bîrsan, Iași

G271. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Arătați că

$$\frac{x(y^2 + z^2)}{y^2 - yz + z^2} + \frac{y(z^2 + x^2)}{z^2 - zx + x^2} + \frac{z(x^2 + y^2)}{x^2 - xy + y^2} \geq 6xyz.$$

Cătălin Cristea, Craiova

G272. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătați că

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq 9 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) - \frac{21}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comănești și Bogdan Ioniță, București

G273. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu laturile opuse neperalele și fie O un punct în interiorul acestuia. Arătați că există un unic paralelogram $MNPQ$ având centrul O și vârfurile pe dreptele AB, BC, CD respectiv DA .

Ovidiu Pop, Satu Mare

G274. Triunghiul dreptunghic neisoscel ABC are ipotenuza BC fixă, iar punctul E este situat pe cateta mai lungă astfel încât $AE = |AB - AC|$. Demonstrați că mediatoarea segmentului AE trece printr-un punct fix.

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

G275. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$, iar M este mijlocul muchiei AD . Planul perpendicular în B pe MB intersectează planul $(B'AC)$ după dreapta d . Notăm cu S proiecția punctului B pe dreapta d . Determinați tangenta unghiului dintre dreptele AB' și BS .

Gabriel Popa, Iași

B. Nivel liceal

L266. Fie n un număr natural nenul, $p = 2^{2^n} + 1$ un număr prim Fermat și d cel mai mare divizor impar al numărului $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$. Să se demonstreze că există numărul natural a astfel încât $d \equiv a^2 \pmod{p}$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploiești

L267. Determinați $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $18^a + 20^a + 30^a = 19^a + 24^a + 25^a$.

Radu Miron, elev, Iași

L268. Demonstrați că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, are loc inegalitatea

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{(a + b + c)^2} + \frac{2a}{2a + b + c} + \frac{2b}{a + 2b + c} + \frac{2c}{a + b + 2c} \geq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comănești

L269. Arătați că $a^{\sin x} \cdot (a + 1)^{\cos x} < a^2, \forall a, x \in \mathbb{R}, a \geq 2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L270. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC$ și fie P un punct fixat pe înălțimea AD . O dreaptă variabilă care trece prin P intersectează laturile AB și AC în punctele $E \in [AB]$, respectiv $F \in [AC]$. Determinați valorile extreme ale ariei triunghiului AEF , funcție de $a = BC$, $b = AB = AC$ și $d = AP$.

Adrian Corduneanu, Iași

L271. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{bc}{(p - a)^2} + \frac{ac}{(p - b)^2} + \frac{ab}{(p - c)^2} \geq \frac{20R - 4r}{3r}.$$

Andi Brojbeanu, elev, Târgoviște

L272. Determinați valorile numărului real k pentru care există un patrulater convex $ABCD$ având lungimile laturilor a, b, c, d și aria S , astfel încât $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 = 4kS$.

Marcel Chiriță, București

L273. Fie triunghiul ABC înscris în cercul \mathcal{C} și A_1 centrul cercului tangent exterior cercului \mathcal{C} și semidreptelor $[AB], [AC]$. În mod analog definim punctele B_1 și C_1 . Arătați că:

$$\sqrt{I_a A_1 \cdot I_b B_1 \cdot I_c C_1} + \sqrt{I_b B_1 \cdot I_c C_1 \cdot I_a A_1} + \sqrt{I_c C_1 \cdot I_a A_1 \cdot I_b B_1} = \sqrt{I_a A \cdot I_b B \cdot I_c C}.$$

Neculai Roman, Mircești (Iași)

L274. Fie punctele A_1, \dots, A_n și B_1, \dots, B_n aparținând unei elipse \mathcal{E} cu centrul O . Să se arate că există un punct $M \in \mathcal{E}$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^n MA_k^2 - \sum_{k=1}^n MB_k^2 = \sum_{k=1}^n OA_k^2 - \sum_{k=1}^n OB_k^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L275. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ două matrice de ordinul al treilea astfel încât $AB - BA$ să fie inversabilă. Demonstrați că

$$\text{Tr}(AB(AB - BA)^{-1}) = 1 + S(AB(AB - BA)^{-1}),$$

unde $\text{Tr } M$ este urma matricei M , iar $S(M)$ este suma minorilor elementelor de pe diagonala principală a lui M .

Marian Tetiva, Bârlad

Training Problems for Mathematical Contests

A. Junior Highschool Level

G266. Find the minimal natural number n with property that for any set $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}$, there exist $B, C \subset A$ such that $|B| = |C| = 3$, $B \cap C = \emptyset$, and $S_B + S_C \equiv 3 \pmod{3}$ (S_M is the sum of the elements from M).

Cristian Lazăr, Iași

G267. Prove that do not exist mutually prime natural numbers x, y of different parity so that the number $a = xy^3 - yx^3$ be a perfect square.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

G268. Consider the number $a = 0.149162536\dots$ obtained by writing (after the decimal point) all the perfect squares, one after the other. Prove that a is an irrational number.

Radu Miron, elev, Iași

G269. Show that $A = \frac{1}{25}(9^{8n+4} + 5 \cdot 9^{6n+3} + 33 \cdot 9^{4n+2} + 5 \cdot 9^{2n+1} + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, is a composed natural number.

Lucian Tuțescu, Craiova

G270. Write, in increasing order, the numbers $2014!$, $(201!)^{4!}$ and $(20!)^{14!}$.

Temistocle Bîrsan, Iași

G271. Let x, y, z be positive real numbers such that $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Prove that

$$\frac{x(y^2 + z^2)}{y^2 - yz + z^2} + \frac{y(z^2 + x^2)}{z^2 - zx + x^2} + \frac{z(x^2 + y^2)}{x^2 - xy + y^2} \geq 6xyz.$$

Cătălin Cristea, Craiova

G272. If a, b, c are positive real numbers, show that

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq 9 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) - \frac{21}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comănești și Bogdan Ioniță, București

G273. The convex quadrilateral with non-parallel opposite sides $ABCD$ is considered and let O be an interior point to it. Show that there exists a unique parallelogram $MNPQ$ of centre O with its vertices on the lines AB, BC, CD and respectively DA .

Ovidiu Pop, Satu Mare

G274. The non-isosceles right-angled triangle ABC has the fixed hypotenuse BC , and the point E is situated on the longer cathetus such that $AE = |AB - AC|$. Show that the perpendicular on the middle of the segment AE passes through a fixed point.

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

G275. It is considered the cube $ABCD A' B' C' D'$, and M is midpoint of the edge AD . The perpendicular plane at B onto MB cuts the plane $(B'AC)$ along the straight line d . Let us denote by S the projection of point S onto the line d . Determine the tangent of the angle between the lines AB' and BS .

Gabriel Popa, Iași

B. Highschool Level

L266. Let n be a nonzero natural number, $p = 2^{2^n} + 1$ a Fermat prime number and $d =$ the largest odd divisor of the number $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$. Prove that a natural number a exists such that $d \equiv a^2 \pmod{p}$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploiești

L267. Determine $a \in \mathbb{R}$ with the property that $18^a + 20^a + 30^a = 19^a + 24^a + 25^a$.

Radu Miron, elev, Iași

L268. Prove that the positive real numbers a, b, c satisfy the inequality

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{(a + b + c)^2} + \frac{2a}{2a + b + c} + \frac{2b}{a + 2b + c} + \frac{2c}{a + b + 2c} \geq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comănești

L269. Show that $a^{\sin x} \cdot (a + 1)^{\cos x} < a^2, \forall a, x \in \mathbb{R}, a \geq 2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L270. It is considered the isosceles triangle ABC with $AB = AC$ and let P be a fixed point on the altitude AD . A variable line passing through P meets the sides AB and AC at the points $E \in [AB]$, respectively $F \in [AC]$. Determine the extremum values of the area of triangle AEF , as a function of $a = BC, b = AB = AC$ and $d = AP$

Adrian Corduneanu, Iași

L271. Prove that the following inequality holds in any triangle:

$$\frac{bc}{(p-a)^2} + \frac{ac}{(p-b)^2} + \frac{ab}{(p-c)^2} \geq \frac{20R-4r}{3r}.$$

Andi Brojbeanu, elev, Târgoviște

L272. Determine the values of the real number k such that a convex quadrilateral $ABCD$ with the side lengths a, b, c, d and area S , satisfies the equation $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 = 4kS$.

Marcel Chiriță, București

L273. Let the triangle ABC be inscribed in the circle \mathcal{C} and let A_1 be the center of the circle which is tangent (from the exterior) to circle \mathcal{C} and to the halfines $[AB, [AC$. The next points B_1 and C_1 are analogously defined. Show that

$$\sqrt{I_a A_1 \cdot I_b B_1 \cdot I_c C} + \sqrt{I_b B_1 \cdot I_c C_1 \cdot I_a A} + \sqrt{I_c C_1 \cdot I_a A_1 \cdot I_b B} = \sqrt{I_a A \cdot I_b B \cdot I_c C}.$$

Neculai Roman, Mircești (Iași)

L274. Let the points A_1, \dots, A_n and B_1, \dots, B_n be situated on an ellipse \mathcal{E} with its center at O . Show that there exists a point $M \in \mathcal{E}$ such that

$$\sum_{k=1}^n MA_k^2 - \sum_{k=1}^n MB_k^2 = \sum_{k=1}^n OA_k^2 - \sum_{k=1}^n OB_k^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L275. Let $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ be two matrices of order three such that $AB - BA$ is invertible. Prove that

$$\text{Tr}(AB(AB - BA)^{-1}) = 1 + S(AB(AB - BA)^{-1}),$$

where $\text{Tr} M$ is the trace of matrix M , and $S(M)$ is the sum of the minors of the entries on the principal diagonal of matrix M .

Marian Tetiva, Bârlad

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacția revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** și **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacția un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze și să-și rețină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu ușurință o discuție prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacția revistei.
- La *problemele de tip L* se primesc soluții de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluțiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după jumătate de an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistență rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise și altor publicații.**
- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacției însoțite de fișierele lor (de preferință în $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$).
- Pentru a facilita comunicarea redacției cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugați să indice adresa e-mail.

Pagina rezolvitorilor

CÂMPULUNG MUSCEL

Colegiul Național „Dinicu Golescu”. **Clasa a XI-a** (prof. PETRIȘOR Constantin). NECULA Emanuel: XI(146-150), XII(146,148-150), L(262,264).

CRAIOVA

Colegiul Național „Frații Buzești”. **Clasa a IX-a** (prof. TUȚESCU Lucian). GURIȚĂ Vladimir: VII(172-174,176), VIII(173,175,176), IX(148,149); NICOLĂESCU Andrei Eugeniu: VII(172,173,175), VIII(173-176), IX(148,149), X(147,149); PĂTRAȘCU Cristian: VII(172,173,175,176), VIII.174, IX(146,148); SPĂTARU Andrei Raul: VII(172,173,175,176), VIII.174, IX(148,149). **Clasa a X-a** (prof. TUȚESCU Lucian). TURCU Andrei George: VIII(173,174), IX.146, X(146,147,149).

IASI

Școala nr. 3 „Al. Vlahuță”. **Clasa a II-a** (prof.înv.primar MAXIM Gabriela). BARGAN Giulia: P(283-287;289,290); BUDEANU Maria: P(283-287;289,290); COSTEA Marta: P(283-287;289,290); GAVRIL Ștefan: P(283-287;289,290); OBREJA Alexia: P(283-287;289,290). **Clasa a VII-a** (prof. MARIN Mirela). CIOBANU Viviana: VI(173,178), VII.177, VIII(173,175); HERGHILIGIU-HENEA Mălina: VI(173,178), VII.177, VIII(173,175); SÎRCU Cătălin: VI(173,178), VII.177, VIII(173,175).

Școala nr. 22 „B.P. Hasdeu”. **Clasa a IV-a** (prof.înv.primar DOHOTARIU Liliانا). BÂRLEANU Briana: P(283-287,289-291,295); BUNEA Ioana: P(283-287,289-293,295); CHICHIRĂU Ana-Maria: P(283-285,290,292,295); CIOBANU Marcu: P(283-286,289,293); CRUCEANU Casandra: P(284,286-291); CULCEA Armina: P(283-287,289,290,295); FURNICĂ Andrei: P(283,285,286,290,292); GĂINĂ Diana: P(283,284,287,290,294); GRAUR Ioana: P(283-285,287,289,290,292,295); HARPA Vlad: P(283-288); LUPU Andrei: P(290-293,295); MANEA Tudor: P(283-285,287,292,295); NEPOTU Tudor: P(283-286,289,290,292,295); PETRINGEL Maria: P(283-287,290,291,293); POPA Mihnea: P(283-287,289-296); TENEA Carina Ioana: P(283,284,287,290,292); URSULEANU Matei: P(283-287,290,291,295).

Școala nr. 26 „George Coșbuc”. **Clasa a V-a** (prof. MOMIȚĂ Viorica). CIOPEICĂ Sebastian Andrei: P(293-295), V(172-175); DURACU Mădălina-Elena: P(293-296), V(172,175); MANOLE Alexandra: P(293-296), V(172-175); RĂILEANU Ana Maria: P(293-295), V(172,173,175); VASILE Raluca-Andreea: P(293-296), V(172-175).

Școala nr. 33 „M. Kogălniceanu”. **Clasa a IV-a** (înv. SÎRBU Lenuța). CIOCOIU Alexandru Boris: P(293-296), V(176,177), VI.173.

Liceul Economic „Virgil Madgearu”. **Clasa a IX-a** (prof. OLENIUC Claudia). ALEXA Narcisa-Gabriela: VIII(173,175,176,178), IX.146; BABII Paula Georgiana: VIII(173,175,176,178), IX.146; BĂZDĂGĂ Monica: VIII(173,175,176,178), IX.146; CIOMAGA Denisa-Mihaela: VIII(173,175,176,178), IX.146; COTET Violeta: VIII(173,175,176,178), IX.146; DRUȚĂ Victoria: VIII(173,175,176,178), IX.146; GĂINĂ Mădălina: VIII(173,175,176,178), IX.146; MORĂRIȚA Mădălina: VIII(173,175,176,178), IX.146; NEDELCU Iulia: VIII(173,175,176,178), IX.146; ROTARU Bianca: VIII(173,175,176,178), IX.146; STURZU Robert-Ștefan: VIII(173,175,176,178), IX.146;

TURBATU Alexandru: VIII(173,175,176,178), IX.146; ȚIMPĂU Andreea: VIII(173, 175,176,178), IX.146; UNGUREANU Anthilula: VIII(173,175,176,178); IX.146; ZAHARIA Cătălina: VIII(173,175,176,178), IX.146; ZARĂ Ioana-Gabriela: VIII(173,175, 176,178), IX.146. **Clasa a X-a** (prof. OLENIUC Claudia). JOLDESCU Petronela Lavinia: VIII(173,175,176,178), IX.146; LEAHU Ana: VIII(173,175,176,178), IX.146; LUNGU Adelina-Veronica: VIII(173,175,176,178), IX.146; PLOP Cosmin Alexandru: VIII(173,175,176,178), IX.146. **Clasa a XI-a** (prof. OLENIUC Claudia). ANICU-LĂESEI Alexandra: IX(146,147,149,150), XI.146; GHERGHEL Petruța: IX(146,147, 149,150), XI.146; LUNGU Laurențiu Adrian: IX(146,147,149,150), XI.146; MARIN Ileana: IX(146,147,149,150), XI.146; PLĂCINTĂ Cătălina-Aledxandra: IX(146,147, 149,150), XI.146; RĂUȚĂ Cosmin: IX(146,147,149,150), XI.146; RUSU AnaMaria: IX(146,147,149,150), XI.146; ȘCRAB Bianca-Maria: IX(146,147,149,150), XI.146.

Colegiul Național „Emil Racoviță”. **Clasa a VI-a** (prof. LOGHIN Raluca). OLENIUC Iulian: P(293,294), V(173,174), VI.176, VIII.175.

Colegiul Național Iași. **Clasa a VI-a** (prof. POPA Gabriel). STOLERU Cristina: V(172-175), VI(172-174). **Clasa a VII-a** (prof. LAZĂR Cristian). POPA Ioana-Maria: VII(172-178), VIII(172-176), G(256-264). **Clasa a VIII-a** (prof. POPA Gabriel). AȘTEFANEI Cosmin: VIII(172-178), G(256-264); OBADĂ Ștefan: VIII(172 -178), G(256-264).

ROȘIORI (BACĂU)

Școala Gimnazială nr. 1. **Clasa a V-a** (prof. CICEU Nela). PLOȘNIȚĂ Daniel-Cătălin: P(294,296), V(172,174,178), VI(173,176), ROMAN Vasile: P(293,296), V(172, 173,175), VI(173,174). **Clasa a VI-a** (prof. CICEU Nela). HÎRȚESCU Ciprian Gabriel: VI(173,174,176), VII(173,175), G263.

TRUȘEȘTI (BOTOȘANI)

Grup Școlar „Demostene Botez”. **Clasa a IX-a** (prof. CULIDIUC Cătălin). HĂLĂUCĂ Andrei: VII.173, VIII(172,175,176), IX(146,150).

ȚIGĂNAȘI (IAȘI)

Școala Gimnazială cu clasele I-VIII „M. Kogălniceanu”. **Clasa a V-a** (prof. IACOB Aida-Andreea). DUCA Anamaria: P(293,296), V(172-175,178), VI.173; DUCA Ema-Ștefania: P(293,296), V(172-175,178), VI.173; DUCA Roxana Georgiana: P(293, 296), V(172-175,178), VI.173; SANDU Marta: P(293,296), V(172-175,178), VI.173. **Clasa a VI-a** (prof. IACOB Aida-Andreea). DUCA Adriana: V(172-175,178), VI.173; DUCA Denis Alexandru: V(172-175,178), VI.173; GĂNEANU Maria-Teodora: V(172-175,178), VI.173; MANDACHE Marius Iulian: V(172-175,178), VI.173; UNGUREANU Ionuț Daniel: V(172-175,178), VI.173; POSTOLACHE Patricia: V(172- 175,178), VI.173. **Clasa a VII-a** (prof. IACOB Aida-Andreea). CAZADOI Cristina Ioana: V(172-175,178), VI.173; DUCA Cristina Mihaela: V(172-175,178), VI.173; GAVRIL Mirabela: V(172-175,178), VI.173; GAVRILAȘ Mădălina Mihaela: V(172- 175,178), VI.173; SANDU Ana-Paula: V(172-175,178), VI.173;; SANDU Rebeca: V(172-175,178), VI.173.

Elevi rezolvitori premiați

Colegiul Național „Dinicu Golescu”, Câmpulung Muscel

NECULA Emanuel (cl. a XI-a): 2/2013(13p), 1/2014(11p), 2/2014(11p).

Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova

NICOLĂESCU Andrei Eugeniu (cl. a IX-a): 1/2013(8p), 1/2014(10p), 2/2014(11p).

TURCU Andrei George (cl. a X-a): 1/2013(9p), 1/2014(7p), 2/2014(6p).

Școala Gimnazială cu clasele I-VIII „M. Kogălniceanu”, Țigănași (Iași)

SANDU Marta (cl. a V-a): 2/2013(6p), 1/2014(5p), 2/2014(8p).

DUCA Adriana (cl. a VI-a): 2/2013(5p), 1/2014(7p), 2/2014(6p).

DUCA Denis Alexandru (cl. a VI-a): 2/2013(5p), 1/2014(7p), 2/2014(6p).

GĂNEANU Maria-Teodora (cl. a VI-a): 2/2013(5p), 1/2014(7p), 2/2014(6p).

CAZADOI Cristina Ioana (cl. a VII-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(6p).

SANDU Ana-Paula (cl. a VII-a): 1/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(6p).

Școala nr. 26 „George Coșbuc”, Iași

CIOPEICĂ Sebastian Andrei (cl. a V-a): 2/2013(5p), 1/2014(7p), 2/2014(8p).

MANOLE Alexandra (cl. a V-a): 2/2013(9p), 1/2014(7p), 2/2014(8p).

RĂILEANU Ana Maria (cl. a V-a): 2/2013(9p), 1/2014(6p), 2/2014(6p).

Liceul Economic „Virgil Madgearu”, Iași

GHERGHEL Petruța (cl. a XI-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).

JOLDESCU Petronela Lavinia (cl. a X-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).

LUNGU Adelina-Veronica (cl. a X-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).

MARIN Ileana (cl. XI-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).

PLĂCINTĂ Cătălina-Alexandra (cl. a XI-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).

PLOP Cosmin Alexandru (cl. a X-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).

ȘCRAB Bianca-Maria (cl. a XI-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).

Colegiul Național Iași.

POPA Ioana-Maria (cl. a VII-a): 2/2013(13p), 1/2014(20p), 2/2014(16p).

Premiu pe anul 2014 acordat de Asociația „Recreații Matematice”

Se acordă un premiu în valoare de 200 lei elevului

Andi Gabriel BROJBEANU

pentru următoarele Note:

- *Caracterizare a unor proprietăți de perpendicularitate în care sunt implicate punctele O, I, H, G, O_9* (2/2013, p. 106),
- *Câteva proprietăți remarcabile ale triunghiului dreptunghic* (1/2014, p. 30),
- *Procedeu de demonstrare a unor inegalități bazat pe inegalitatea lui Schur* (2/2014, p. 19).

Revista semestrială **RECREAȚII MATEMATICE** este editată de **ASOCIAȚIA „RECREAȚII MATEMATICE”**. Apare la datele de 1 martie și 1 septembrie și se adresează elevilor, profesorilor, studenților și tuturor celor pasionați de matematica elementară.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note și articole, chestiuni de metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar și concis; ele trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se recomandă ca textele să nu depășească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie originale și să nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste**. Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie însoțite de fișierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** și **Probleme pentru pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunț și demonstrație/rezolvare (câte una pe fiecare foaie) și vor fi însoțite de numele autorului, școala și localitatea unde lucrează/învață.

Redacția va decide asupra oportunității publicării materialelor primite.

În atenția elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacției soluții corecte la problemele din rubricile de **Probleme propuse** și **Probleme pentru pregătirea concursurilor** vor fi menționate în **Pagina rezolvitorilor**. Elevii menționați de trei ori vor primi o **diplomă** și un **premiu în cărți**. Elevii rezolvitori vor ține seama de regulile:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în numărul prezent și cel anterior al revistei** (pe o foaie va fi redactată o singură problemă).

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la problemele propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase mai mici și imediat anterioare. Cei din clasa a **V-a** pot trimite soluții la problemele propuse pentru clasele a **IV-a**, a **V-a** și orice clasă mai mare, iar elevii claselor **I-IV** pot trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele primare și orice clasă mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problemele de concurs (tip **G** și **L**).

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele și prenumele, clasa, școala și localitatea, precum și numele profesorului cu care învață.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poștă (sau va fi adus direct) la adresa Redacției:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iași
Jud. IAȘI
E-mail: t_birsan@yahoo.com

CUPRINS

Revedere la 50 de ani de la absolvire (dr. Georgeta Teodoru)..... 97

ARTICOLE ȘI NOTE

I. PĂTRAȘCU, F. SMARANDACHE – Some Properties of the Harmonic Quadrilateral..... 99
V. JIGLĂU – O rafinare a unei inegalități a lui Z. Yun105
M. CHIRIȚĂ – Relații vectoriale între elementele unui triunghi.....109
S. PUȘPANĂ – Inegalități privind derivata unei funcții.....112

NOTA ELEVULUI

A.G. BROJBEANU – Procedeu de demonstrare a unor inegalități
bazat pe inegalitatea lui Schur115

CORESPONDENȚE

A. REISNER – Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{A})$. Facteurs invariants.....122
N. ANGHEL – An inductive proof of the Cayley-Hamilton theorem 127

CHESTIUNI METODICE

D. VĂCARU – Un procedeu de abordare a unor probleme de extrem geometric129

CUM CONCEPEM ... CUM REZOLVĂM

V. BRAȘOVEANU, M. TETIVA – De la o problemă de pe forum la
conjectura funcțiilor continue care comută.....134

DIN ISTORIA MATEMATICII

T. BÎRSAN, D. TIBA – Gazeta Matematică în anii Primului Război Mondial140

CONCURSURI ȘI EXAMENE

Concursul de matematică „Al. Myller”, ed. a XII-a, 2014.....144
Concursul de matematică „Florica T. Câmpan”, ed. a XIV-a, 2014146
SEEMOUS, ed. a VIII-a, 2014, Iași.....151

PROBLEME ȘI SOLUȚII

Soluțiile problemelor propuse în nr. 1/2014.....152
Soluțiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2014.....167
Probleme propuse.....177
Probleme pentru pregătirea concursurilor182
Training Problems for Mathematical Contests.....185

Pagina rezolvitorilor188

Elevi rezolvitori premiați..... 190

ISSN 1582 – 1765

10 lei



9 771582 176513