Anul XVI, Nr. 2 **Iulie – Decembrie 2014**

RECREAŢII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROFESORI

$$e^{i\pi} = -1$$

Asociaţia „Recreaţii Matematice”
IAŞI – 2014

Semnificaţia formulei de pe copertă. Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi} = -1$ leagă cele patru ramuri fundamentale ale matematicii: *ARITMETICA* - reprezentată de 1; *GEOMETRIA* – reprezentată de π; *ALGEBRA* – reprezentată de i; *ANALIZA MATEMATICĂ* – reprezentată de e.

Materialele vor fi trimise la una dintre adresele: t-birsan@yahoo.com , profgpopa@yahoo.co.uk

TIPĂRITĂ LA BLUE SIM&Co IAŞI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0332 111021, 0721 571705; e-mail: simonaslf@yahoo.com

ISSN 1582 – 1765

Anul XVI, Nr. 2 **Iulie – Decembrie 2014**

RECREAŢII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROFESORI

$$e^{i\pi} = -1$$

Revistă cu apariţie semestrială

EDITURA „RECREAŢII MATEMATICE”

IAŞI - 2014

Revedere la 50 de ani de la absolvire

Aula Magna a Universităţii ,,Al. I. Cuza" a fost locul în care, la 27 mai 2014, promoţia 1959-1964 a Facultăţii de Matematică-Mecanică a celebrat *50 de ani de la absolvire.*

Festivitatea a fost onorată de prezenţa în aulă a Rectorului Universităţii, *prof. dr. Vasile Işan,* a Decanului Facultăţii de Matematică-Mecanică, *prof. dr. Cătălin Lefter,* a *acad. prof. dr. Radu Miron,* unul dintre profesorii noştri, şi din partea Facultăţii de Fizică a *prof. dr. Margareta Ignat,* profesor al nostru în structura de atunci a facultăţii. Presa locală, prezentă şi ea în aulă, a făcut cunoscut evenimentul publicului ieşean prin ample relatări însoţite de imagini.

În momentul absolvirii, Facultatea de Matematică-Mecanică era structurată în secţiile: matematică (4 grupe) şi matematică-fizică (5 grupe), iar durata studiilor era de 5 ani. În anul 1959, în momentul admiterii în facultate, matematica şi fizica erau reunite într-o unică facultate, numită Facultatea de Matematică şi Fizică, care avea patru secţii: matematică, fizică, matematică-fizică (secundar) şi fizică-chimie (secundar). Din cei 173 absolvenţi de atunci ai facultăţii, au fost prezenţi la festivitate 93, un număr de 37 fiind plecaţi definitiv dintre noi. Nu întâmplător, la această revedere s-au alăturat şi mai mulţi absolvenţi ai Facultăţii de Fizică din aceeaşi promoţie, foşti colegi din primii ani de studii. Revederele sunt pentru noi o tradiţie; ne-am mai întâlnit în anii 1974, 1984, 1989 şi 2010.

Datorită strădaniei noastre, dar mai ales datorită excelenţilor noştri profesori ale căror cursuri şi seminarii le-am urmat, seria noastră a fost numită ,,*Promoţia de aur 1959-1964"*, ca o consecinţă a rezultatelor foarte bune din timpul facultăţii, cât şi a celor ulterioare obţinute pe parcursul practicării profesiei.

În cuvântul său, prof. dr. *Vasile Işan*, rectorul Universităţii, felicită pe toţi absolvenţii promoţiei şi ne numeşte ,,*Lorzi ai matematicii"*. Mai spune că nu a mai participat la un eveniment de acest fel atât de emoţionant şi adaugă: ,,*Universitatea trebuie să răspândească binele. Din experienţa mea, am avut mereu impresia că Universitatea este ceva sublim. Ea trebuie să-şi propună să caute adevărul, să cultive frumosul şi să răspândească binele. De aceea se spune că este o instituţie a sublimului sau a nobleţei."*

Acad. prof. *Radu Miron*, în cuvântul său, precum şi în prefaţa la volumul *Alea jacta est* (editat de colegul *Siegmund Pluto,* Germania), justifică denumirea de *promoţie de aur* ce ni s-a dat: ,,*Denumirea nu a fost atribuită întâmplător. Ea se justifică prin rezultatele de excepţie obţinute de membrii promoţiei în învăţământ, cercetare şi în societate. Un bilanţ sumar arată că jumătate dintre absolvenţi au fost reţinuţi în învăţământul superior, au trecut doctoratul în ştiinţe şi au ocupat succesiv toate treptele ierarhiei universitare, au condus doctorate şi au ajuns în conducerea unor instituţii de învăţământ consacrate.*"

Cuvinte frumoase de apreciere şi calde felicitări au fost adresate de decanul facultăţii, prof. dr. *Cătălin Lefter,* şi de către prof. dr. *Margareta Ignat*, din partea Facultăţii de Fizică.

Apoi, un coleg de generaţie de la Facultatea de Fizică a ţinut să exprime gratitudinea noastră faţă de profesorii şi instituţia în care ne-am format şi să mărturisească bucuria revederii cu colegii de facultate.

Dintre profesorii noştri, nume de prestigiu în matematica românească, care ne-au îndrumat şi format ca viitori specialişti, amintesc doar pe câţiva: acad. *Mendel Haimovici*, acad. *Miron Radu*, acad. *Constantin Corduneanu*, *Gheorghe Gheoghiev, Ilie Popa, Adolf Haimovici, Tudora Luchian, Alexandru Climescu, Ion Creangă, Victor Nadolschi, Ioan Grindei, Dan Petrovanu, Neculai Gheorghiu* şi mulţi alţii.

În volumul jubiliar *Seminarul Matematic ,,Alexandru Myller, 100 de ani de existenţă"* (coordonator *Gh. Aniculăesei*), apărut în 2010, un paragraf este dedicat promoţiei noastre, în care sunt menţionaţi mai mulţi colegi care au fost repartizaţi în Iaşi la Facultatea de Matematică-Mecanică a Universităţii, Institutul de Matematică sau la Institutul Politehnic ,,Gh. Asachi". Amintim pe câţiva dintre ei: *Viorel Barbu, Octavian Nanu, Vasile Oproiu, Ioan Pop, Mirela Ştefănescu, Constantin Ilioi, Gheorghe Ciobanu, Brânzei Dan, Ioan Ibănescu* şi alţii. Au fost şi mulţi repartizaţi în alte oraşe la universităţi, institute de cercetare sau centre de calcul.

Neîndoielnic, ca vârf al promoţiei este colegul nostru *Viorel Barbu,* membru titular al Academiei Române din 1993, membru al Academiei Europene de Ştiinţe din 2008, doctor honoris causa al Universităţii din Nebraska, membru de onoare al Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, profesor de onoare al Universităţii din Wuhan (China) etc. Acad. Viorel Barbu este autorul unui număr impresionant de monografii şi articole de specialitate, a participat la numeroase congrese şi conferinţe internaţionale, a fost profesor vizitator în multe ţări, este profesor şi conducător de doctorat al multor generaţii de studenţi şi cercetători, dintre care mulţi sunt acum profesori şi cercetători în universităţi de prestigiu din Europa şi America. A fost decan al Facultăţii de Matematică-Mecanică din Iaşi, în perioada 1976-1981, rector al Universităţii ,,Al. I. Cuza", 1981-1989, vicepreşedinte al Academiei Române, 1998-2002, preşedinte al filialei Iaşi a Academiei Române, 2001-2012 etc., iar în prezent este preşedinte al Secţiei de Ştiinţe Matematice din Academia Română.

Nu putem aminti aici nici măcar în treacăt contribuţiile valoroase ale altor colegi şi prestigiul de care se bucură în comunitatea matematicienilor, obţinute prin muncă şi pasiune pentru matematică.

Mult apreciată a fost iniţiativa lui *Siegmund Pluto* de a strânge date despre colegii săi ,,*care să constituie o prezentare a tuturor absolvenţilor, cu realizările fiecăruia, cu fotografii din 1964 şi ulterioare, activitatea profesională, poveşti de viaţă, care să fie un mijloc de readucere în memorie a unor amintiri acum poate uitate*" şi care s-a materializat în volumul *Alea jacta est*, oferit la revederea noastră.

După câteva momente de discuţii şi propuneri privind întâlnirile viitoare, într-o atmosferă de bună dispoziţie generală şi entuziasm, prof. *Mioara Ieşan* – colega care şi-a asumat sarcina organizării acestei revederi semicentenare – a anunţat încheierea părţii festive.

Profesori şi discipoli au coborât apoi din Aula Magna la treptele Universităţii – *Alma Mater Iassiensis* – pentru a fixa printr-o fotografie de grup momentul aniversar.

Georgeta TEODORU
Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi" Iaşi

Some Properties of the Harmonic Quadrilateral[1]

Ion PĂTRAŞCU[2]***, Florentin SMARANDACHE*** [3]

Abstract. In this article, we review some properties of the harmonic quadrilateral related to triangle simedians and to Apollonius circles.

Keywords: harmonic quadrilateral, simedian, Apollonius circle.

MSC 2010: 51M04.

Definition 1. A convex quadrilateral $ABCD$ admitting a circumcicle and having the property $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ is called a *harmonic quadrilateral.*

Definition 2. A *triangle simedian* is the isogonal cevian of a triangle median.

Proposition 1. *In the triangle ABC, the cevian AA_1, $A_1 \in (BC)$, is a simedian if and only if* $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Proposition 2. *In an harmonic quadrilateral, the diagonals are simedians of the triangles determined by two consecutive sides of a quadrilateral with its diagonal.*

Proof. Let $ABCD$ be an harmonic quadrilateral and $\{K\} = AC \cap BD$ (Fig. 1). We prove that BK is simedian in the triangle ABC. From the similarity of the triangles ABK and DCK, we find that

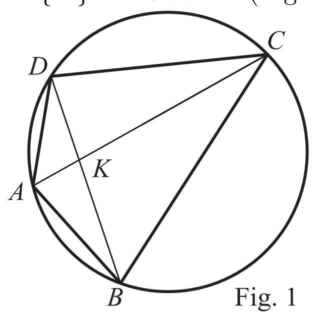


Fig. 1

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AK}{DK} = \frac{BK}{CK}. \tag{1}$$

From the similarity of the triangles BCK şi ADK, we conclude that

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CK}{DK} = \frac{BK}{AK}. \tag{2}$$

From the relations (1) and (2), by division, it follows that

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{AD}{DC} = \frac{AK}{CK}. \tag{3}$$

But $ABCD$ is an harmonic quadrilateral; consequently,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC};$$

[1]See also **A. Reisner** - *Quadrange harmonique et nombres complexes*, this journal, 1/2014, 35-39.

[2]National College ,,Fraţii Buzeşti", Craiova, Romania; e-mail: *patrascu_ion@yahoo.com*

[3]University of New Mexico, USA; e-mail: *fsmarandache@gmail.com*

substituting this relation in (3), it follows that

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AK}{CK};$$

as shown by Proposition 1, BK is a simedian in the triangle ABC. Similarly, it can be shown that AK is a simedian in the triangle ABD, that CK is a simedian in the triangle BCD, and that DK is a simedian in the triangle ADC.

Remark 1. The converse of the Proposition 2 is proved similarly, i.e. we have:

Proposition 3. *If in a convex quadrilateral admitting a circumcicle a diagonal is a simedian in the triangle formed by the other diagonal with two consecutive sides of the quadrilateral, then the quadrilateral is an harmonic quadrilateral.*

Remark 2. From Propositions 2 and 3 above, it results a simple way to build an harmonic quadrilateral. In a circle, let a triangle ABC be considered; we construct the simedian of A, be it AK, and we denote by D the intersection of the simedian AK with the circle. The quadrilateral $ABCD$ is an harmonic quadrilateral.

Proposition 4. *In a triangle ABC, the points of the simedian of A are situated at proportional distances to the sides AB and AC.*

Proof. We have the simedian AA_1 in the triangle ABC (Fig. 2). We denote by D and E the projections of A_1 on AB, and AC respectively. We get:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{Area\,(\Delta ABA_1)}{Area\,(\Delta ACA_1)} = \frac{AB \cdot A_1D}{AC \cdot A_1E}.$$

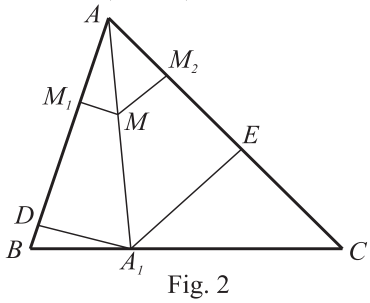


Fig. 2

Moreover, from Proposition 1, we know that $\frac{BA_1}{A_1C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Substituting in the previous relation, we obtain that

$$\frac{A_1D}{A_1E} = \frac{AB}{AC}.$$

On the other hand, $A_1D = AA_1 \cdot \sin\widehat{BAA_1}$ and $A_1E = AA_1 \cdot \sin\widehat{CAA_1}$, hence

$$\frac{A_1D}{A_1E} = \frac{\sin\widehat{BAA_1}}{\sin\widehat{CAA_1}} = \frac{AB}{AC}. \tag{4}$$

If M is a point on the simedian and MM_1 and MM_2 are its projections on AB, and AC respectively, we have: $MM_1 = AM \cdot \sin\widehat{BAA_1}$, $MM_2 = AM \cdot \sin\widehat{CAA_1}$, hence:

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{\sin\widehat{BAA_1}}{\sin\widehat{CAA_1}}.$$

Taking into account (4), we obtain that

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{AB}{AC}.$$

Remark 3. The converse of the property in the statement above is valid, meaning that, *if M is a point inside a triangle, its distances to two sides are proportional to the lengths of these sides, then M the point belongs to the simedian of the triangle having the vertex joint to the two sides.*

Proposition 5. *In an harmonic quadrilateral, the point of intersection of the diagonals is located towards the sides of the quadrilateral to proportional distances to these sides.*

The **Proof** of this statement relies on Propositions 2 and 4.

Proposition 6 (*R. Tucker*)**.** *The point of intersection of the diagonals of an harmonic quadrilateral minimizes the sum of squares of distances from a point inside the quadrilateral to the quadrilateral sides.*

Proof. Let $ABCD$ be an harmonic quadrilateral and M any point within. We denote by x, y, z, u the distances of M to the AB, BC, CD, DA sides of lenghts a, b, c, and d (Fig. 3). Let S be the area of the quadrilateral $ABCD$. We have: $ax + by + cz + du = 2S$. Following Cauchy-Buniakowski-Schwarz Inequality, we get:

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(x^2+y^2+z^2+u^2\right) \geq (ax+by+cz+du)^2,$$

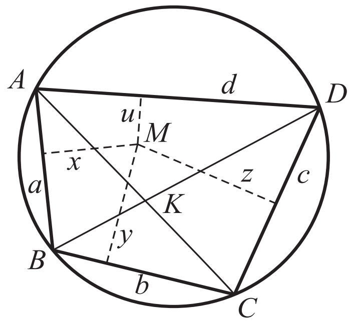


Fig. 3

and it is obvious that

$$x^2+y^2+z^2+u^2 \geq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

We note that the minimum sum of squared distances is $\dfrac{4S^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} = const.$ In Cauchy-Buniakowski-Schwarz Inequality, the equality occurs if

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}.$$

Since $\{K\} = AC \cap BD$ is the only point with this property, it ensues that $M = K$, so K has the property of the minimum in the statement.

Definition 3. We call *external simedian* of ABC triangle a cevian $AA_1^{'}$ corresponding to the vertex A, where $A^{'}$ is the harmonic conjugate of the point A_1 – simedian′s foot from A relative to points B and C.

Remark 4. In Fig. 4, the cevian AA_1 is an internal simedian, and $AA_1^{'}$ is an external simedian.

We have $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{A_1^{'}B}{A_1^{'}C}$. In view of Proposition 1, we get that

$$\frac{A_1'B}{A_1'C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

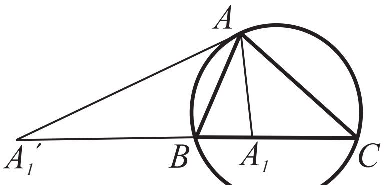


Fig. 4

Proposition 7. *The tangents taken to the extremes of a diagonal of a circle circumscribed to the harmonic quadrilateral intersect on the other diagonal.*

Proof. Let P be the intersection of a tangent taken in D to the circle circumscribed to the harmonic quadrilateral $ABCD$ with AC (Fig. 5). Since triangles PDC and PAD are alike, we conclude that:

$$\frac{PD}{PA} = \frac{PC}{PD} = \frac{DC}{AD}. \tag{5}$$

From relations (5), we find that:

$$\frac{PA}{PC} = \left(\frac{AD}{DC}\right)^2. \tag{6}$$

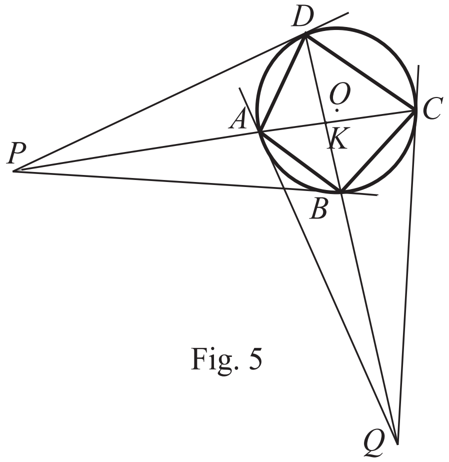


Fig. 5

This relationship indicates that P is the harmonic conjugate of K with respect to A and C, so DP is an external simedian from D of the triangle ADC.

Similarly, if we denote by $P^{'}$ the intersection of the tangent taken in B to the circle circumscribed with AC, we get:

$$\frac{P^{'}A}{P^{'}C} = \left(\frac{BA}{BC}\right)^2. \tag{7}$$

From (6) and (7), as well as from the properties of the harmonic quadrilateral, we know that $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$, which means that $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{P^{'}A}{P^{'}C}$, hence $P = P^{'}$.

Similarly, it is shown that the tangents taken to A and C intersect at point Q located on the diagonal BD.

Remark 5. 1) The points P and Q are the diagonal poles of BD and AC in relation to the circle circumscribed to the quadrilateral.

2) From the previous proposition, it follows that in a triangle the internal simedian of an angle is consecutive to the external simedians of the other two angles.

Proposition 8. *Let $ABCD$ be an harmonic quadrilateral inscribed in the circle of center O and let P and Q be the intersections of the tangents taken in B and D, respectively in A and C to the circle circumscribed to the quadrilateral. If $\{K\} = AC \cap BD$, then the orthocenter of triangle PKQ is O.*

Proof. From the properties of tangents taken from a point to a circle, we conclude that $PO \perp BD$ and $QO \perp AC$. These relations show that in the triangle PKQ, PO and QO are heights, so O is the orthocenter of this triangle.

Definition 4. The *Apollonius circle* related to the vertex A of the triangle ABC is the circle built on the segment $[DE]$ in diameter, where D and E are the feet of the internal, respectively, external bisectors taken from A to the triangle ABC.

If the triangle ABC is isosceles with $AB = AC$, the Apollonius circle corresponding to vertex A is not defined.

Proposition 9. *The Apollonius circle relative to the vertex A of the triangle ABC has as center the feet of the external simedian taken from A.*

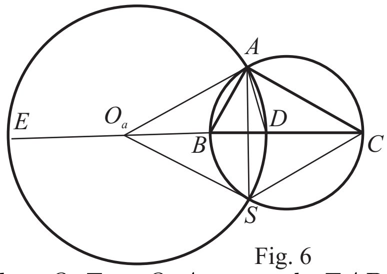


Fig. 6

Proof. Let O_a be the intersection of the external simedian of the triangle ABC with BC (Fig. 6). Assuming that $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$, we find that $m\left(\widehat{EAB}\right) = \frac{1}{2}\left[m\left(\widehat{B}\right) + m\left(\widehat{C}\right)\right]$. O_aA being a tangent, we find that $m\left(\widehat{O_aAB}\right) = m\left(\widehat{C}\right)$. From, $m\left(\widehat{EAO_a}\right) = \frac{1}{2}\left[m\left(\widehat{B}\right) - m\left(\widehat{C}\right)\right]$ and $m\left(\widehat{AEO_a}\right) = \frac{1}{2}\left[m\left(\widehat{B}\right) - m\left(\widehat{C}\right)\right]$ it results that $O_aE = O_aA$; onward, EAD being a right angled triangle, we obtain $O_aA = O_aD$, hence O_a is the center of Apollonius circle corresponding to the vertex A.

Proposition 10. *Apollonius circle relative to the vertex A of the triangle ABC cuts the circle circumscribed to the triangle following the internal simedian taken from A.*

Proof. Let S be the second point of intersection of Apollonius circles relative to vertex A and the circle circumscribe the triangle ABC. Because O_aA is tangent in A to the circle circumscribed, it results, for reasons of symmetry, that O_aS will be tangent in S to the circumscribed circle.

For triangle ACS, O_aA and O_aS are external simedians; it results that CO_a a is internal simedian in the triangle ACS, furthermore, it results that the quadrilateral $ABSC$ is an harmonic quadrilateral. Consequently, AS is the internal simedian of the triangle ABC and the property is proven.

Remark 6. From this, in view of Fig. 5, it results that the circle of center Q passing through A and C is an Apollonius circle relative to the vertex A for the triangle ABD. This circle (of center Q and radius QC) is also an Apollonius circle relative to the vertex C of the triangle BCD.

Similarly, the Apollonius circles corresponding to vertexes B and D and to the triangles ABC, and ADC respectively, coincide.

Proposition 11. *In an harmonic quadrilateral, the Apollonius circles - associated with the vertexes of a diagonal and to the triangles determined by those vertexes to the other diagonal - coincide. Radical axis of the Apollonius circles is the right determined* *by the center of the circle circumscribed to the harmonic quadrilateral and by the intersection of its diagonals.*

Proof. Referring to Fig. 5, we observe that the power of O towards the Apollonius circles relative to vertexes B and C of triangles ABC and BCU is $OB^2 = OC^2$. So O belongs to the radical axis of the circles.

We also have $KA \cdot KC = KB \cdot KD$, relatives indicating that the point K has equal powers towards the highlighted Apollonius circles.

Bibliografie

1. **R.A. Johnson** – *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, USA, 2007.
2. **F. Smarandache, I. Pătraşcu** – *The Geometry of Homological Triangles*, The Education Publisher, Inc. Columbus, Ohio, USA, 2012.
3. **F. Smarandache, I. Pătraşcu** – *Variance on Topics of plane Geometry*, The Education Publisher, Inc. Columbus, Ohio, USA, 2013.

Al doilea autor va împlini în curând 60 de ani. Redacţia revistei foloseşte acest prilej pentru a-i ura ,,MULŢI ANI !", trăiţi în sănătate, cu bucurii şi noi şi remarcabile succese. Dintr-un material amplu primit de redacţie, selectăm un număr de aspecte care să dea contur personalităţii sale atipice, caracterizată prin energie explozivă, creativitate, diversitatatea domeniilor abordate, prolificitate.

Florentin Smarandache s-a născut la 10 decembrie 1954 în Bălceşti, jud. Vâlcea. Studiile, de la clasele primare la cele superioare, le-a făcut în România. A absolvit în 1979 secţia informatică a Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii din Craiova, ca şef de promoţie.

În 1988 emigrează din motive politice. Din anul 2008 ocupă o poziţie de profesor universitar la University of New Mexico (Gallup). În 1997 obţine titlul de doctor în matematici, în domeniul teoriei numerelor, la Universitatea de Stat din Chişinău.

Are contribuţii în matematică (teoria numerelor, geometrie, logică), fizică, filozofie, literatură (poeme, nuvele, povestiri, un roman, piese de teatru, eseuri, traduceri, interviuri) şi artă (experimente în desene, picturi, colaje, fotografii, artă pe calculator).

În matematică a introdus gradul de negare al unei axiome ori teoreme (vezi geometriile smarandache, care pot fi parţial euclidiene şi parţial neeuclidiene), multi-structurile (vezi n-structurile smarandache, unde o structură mai slabă conţine insule de structuri mai puternice) şi multi-spaţiile (combinaţii de spaţii heterogene). Lucrările sale de teoria numerelor s-au bucurat de o anumită popularitate, fiind preluate şi dezvoltate de matematicieni români şi străini din multe ţări. A propus extinderea probabilităţilor clasice şi imprecise la ,,probabilitate neutrosofică", ca un vector tridimensional ale cărui componente sunt submulţimi ale intervalului ne-standard]-0,1+[. Împreună cu Jean Dezert extinde Teoria Dempster-Shafer la o nouă teorie de fuzionare a informaţiei plauzibile şi paradoxiste (numită Teoria Dezert-Smarandache).

În fizică a introdus paradoxuri cuantice şi noţiunea de ,,nematerie", formată din combinaţii de materie şi antimaterie, ca o a treia formă posibilă de materie. A emis ipoteza că ,,nu există o barieră a vitezei în univers şi se pot construi orice viteze", pe baza căreia a propus o Teorie Absolută a relativităţii, care să nu producă dilatare a timpului sau contractare a spaţiului.

În filozofie a introdus conceptul de ,,neutrosofie", ca o generalizare a dialecticii lui Hegel, care stă la baza cercetărilor sale în matematică şi economie, precum şi ,,logica neutrosofică", ,,mulţime neutrosofică", ,,probabilitate neutrosofică", ,,statistica neutrosofică".

În literatură şi artă a fondat în 1980 curentul de avangardă numit paradoxism, care constă în folosirea excesivă în creaţii a contradicţiilor, antitezelor, antinomiilor, oximoronilor, paradoxurilor. A fost nominalizat pentru premiul Nobel în literatură pe anul 2011.

O rafinare a unei inegalităţi a lui Z. Yun

Vasile JIGLĂU[1]

Abstract. In this Note, the inequality (4) is established ; it offers a refinement of the inequalities (1) and (2).

Keywords: bicentric quadrilateral, circumcircle, incircle, Euler-like inequality.

MSC 2010: 51M04, 51M16.

Un *patrulater bicentric* $ABCD$ este un patrulater convex inscriptibil şi circumscriptibil. Pentru astfel de patrulatere este binecunoscută următoarea formulă de tip Euler:

$$R \geq r\sqrt{2}, \tag{1}$$

unde R, r notează razele cercurilor lor circumscris, respectiv înscris.

În [**5**], **Zhang Yun** stabileşte inegalitatea

$$\frac{r\sqrt{2}}{R} \leq \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\right) \leq 1, \tag{2}$$

care reprezintă o rafinare a inegalităţii (1) (a se vedea şi [**2**]).

La rândul ei, dubla inegalitate (2) poate fi rafinată. Acesta este scopul prezentei Note.

Vom începe prin a aminti câteva proprietaţi ale patrulaterelor bicentrice, care vor fi utile mai jos (în mod obişnuit, $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA, e = AC, f = BD$, iar $p, S-$semiperimetrul, respectiv aria patrulaterului):

1) $ac + bd = ef$, $a + c = b + d = p$;

2) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad+bc}}, \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{cd}{ab+cd}},\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{ad}{ad+bc}},\ \sin\frac{D}{2} = \sqrt{\frac{ab}{ab+cd}}$;

3) $(ab + cd)(ad + bc) = p^2(ef - 4r^2)$;

4) $ef = 2r(\sqrt{4R^2 + r^2} + r)$;

5) $S = \sqrt{abcd} = rp$.

pentru care se poate consulta [**3**], paragraful 15.

De asemenea, vom avea nevoie de inegalităţile (v. [**4**], p. 406):

$$8r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r) \leq p^2 \leq (\sqrt{4R^2 + r^2} + r)^2. \tag{3}$$

Propoziţie. *În orice patrulater bicentric $ABCD$ au loc inegalităţile:*

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{r\sqrt{2}}{R}} &\leq \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\right) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{4R^2 + r^2} + r}{2\sqrt{2}R} \leq 1.\end{aligned} \tag{4}$$

[1] e-mail: *jiglau_vasile@yahoo.com*

Avem egalitate peste tot dacă şi numai dacă $ABCD$ este pătrat.

Demonstraţie. Mai întâi, vom exprima suma

$$\Sigma = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}$$

funcţie de elementele liniare ale patrulaterului. Utilizând formulele, 1)-3), avem:

$$\Sigma = \frac{p\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} = \frac{p\sqrt{(ac+bd)+2\sqrt{abcd}}}{p\sqrt{ef-4r^2}} = \sqrt{\frac{ef+2rp}{ef-4r^2}}$$

sau, cu formula 4), obţinem Σ funcţie de p, R, şi r:

$$\Sigma = \sqrt{\frac{p+r+\sqrt{4R^2+r^2}}{\sqrt{4R^2+r^2}-r}} = \frac{1}{2R}\sqrt{p\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)+\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2}.$$

Prima inegalitate din enunţ este echivalentă cu

$$16\sqrt{2}Rr \le p\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)+\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2$$

şi va fi stabilită dacă arătăm că au loc următoarele două inegalităţi:

$$8\sqrt{2}Rr \le p\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right), \tag{5}$$

$$8\sqrt{2}Rr \le \left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2. \tag{6}$$

Ţinând seama de (3), inegalitatea din partea stângă, pentru a dovedi (5) este suficient să verificăm că

$$8\sqrt{2}Rr \le \sqrt{8r(\sqrt{4R^2+r^2}-r)}\cdot\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right) \iff 4R\sqrt{r} \le$$
$$\le 2R\sqrt{\sqrt{4R^2+r^2}+r} \iff 4r \le \sqrt{4R^2+r^2}+r \iff r\sqrt{2} \le R$$

este adevărată. Răspuns afirmativ, căci ultima este inegalitatea lui Euler. În privinţa inegalităţii (6), avem:

$$\begin{aligned}
8\sqrt{2}Rr \le \left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2 &\iff 4\sqrt{2}Rr \le 2R^2+r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}\\
&\iff 0 \le 2\left(R-r\sqrt{2}\right)^2 + r\left(\sqrt{4R^2+r^2}-3r\right)\\
&\iff 0 \le 2\left(R-r\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4r\left(R^2-2r^2\right)}{\sqrt{4R^2+r^2}+3r},
\end{aligned}$$

iar aceasta din urmă este adevărată tot datorită inegalităţii lui Euler. Este uşor de văzut că această primă inegalitate devine egalitate dacă şi numai dacă $ABCD$ este pătrat. Demonstrarea primei inegalităţi din (4) este încheiată.

Să demonstrăm acum a doua inegalitate din (4). Într-adevăr, avem:

$$\frac{1}{2}\Sigma \leq \frac{\sqrt{4R^2+r^2}+r}{2\sqrt{2}R} \Longleftrightarrow p\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)+\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2 \leq$$
$$\leq 2\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right)^2 \Longleftrightarrow p \leq \sqrt{4R^2+r^2}+r,$$

ultima fiind a doua parte a inegalităţii (3). Ca urmare, în a doua inegalitate din (4) avem egalitate în condiţia specificată în [**4**], p. 406, adică dacă şi numai dacă patrulaterul $ABCD$ are cel puţin o pereche de unghiuri opuse drepte.

Cea de-a treia şi ultima inegalitate din (4) este echivalentă cu

$$\begin{aligned}\sqrt{4R^2+r^2}+r \leq 2\sqrt{2}R &\Longleftrightarrow r^2+r\sqrt{4R^2+r^2} \leq 2R^2\\ &\Longleftrightarrow 0 \leq 2\left(R^2-2r^2\right)+r\left(3r-\sqrt{4R^2+r^2}\right)\\ &\Longleftrightarrow 0 \leq 2\left(R^2-2r^2\right)\left(3r+\sqrt{4R^2+r^2}\right)+4r\left(2r^2-R^2\right)\\ &\Longleftrightarrow 0 \leq 2\left(R^2-2r^2\right)\left(\sqrt{4R^2+r^2}+r\right),\end{aligned}$$

evident adevărată. Aceasta devine egalitate dacă şi numai dacă $ABCD$ este pătrat. Propoziţia este complet demonstrată.

Observaţia 1. Deoarece $\dfrac{r\sqrt{2}}{R} \leq \sqrt{\dfrac{r\sqrt{2}}{R}}$, inegalitatea din Propoziţie reprezintă o rafinare a inegalităţii (2), ca şi a inegalităţii care constituie fondul notei matematice [**1**] (se va ţine seama de faptul că $\Sigma \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \Sigma\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{2}\Sigma\cos\dfrac{A-B}{2}$).

Prin calcule simple, constatăm că al treilea termen al inegalităţii (4) se exprimă prin laturi astfel:

$$\frac{\sqrt{4R^2+r^2}+r}{2\sqrt{2}R} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}}. \tag{7}$$

Într-adevăr, pe baza formulelor 1), 3) şi 4), avem:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{ef}{ef-4r^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{4R^2+r^2}+r}{\sqrt{4R^2+r^2}-r}} = \frac{\sqrt{4R^2+r^2}+r}{2\sqrt{2}R}.$$

Observaţia 2. O cunoscută formulă a lui **L.Carlitz** precizează distanţa dintre centrul cercului înscris I şi centrul cercului circumscris O ale patrulaterului bicentric $ABCD$:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr\sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}}. \tag{8}$$

Din faptul că $OI^2 \geq 0$, deducem inegalitatea următoare:

$$\frac{R}{r\sqrt{2}} \geq \sqrt{2\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}}. \tag{9}$$

Din Propoziţie şi ţinând seama de relaţia (7), rezultă că

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(a+c)^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}} \leq 1.$$

Ca urmare, (9) este întărită de următoarea inegalitate:

$$\frac{R}{r\sqrt{2}} \geq 2\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}. \tag{10}$$

Bibliografie

1. **M. Bencze** – *O rafinare a inegalităţii lui Euler* $R \geq r\sqrt{2}$, Recreaţii Matematice, 11 (2009), f.1, 15-16.
2. **M. Josefsson** – *A New Proof of Yun′s Inequality for Bicentric Quadrilaterals*, Forum Geometricorum, 12 (2012), 79-82.
3. **D. Mihalca** et al. – *Geometria patrulaterului* (in Romanian), Ed. Teora, 1998.
4. **D.S. Mitrinović** et al. – *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer, 1989.
5. **Z. Yun** – *Euler′s Inequality Revisited*, Mathematical Spectrum, 40 (2008), 119-121.

Relaţii vectoriale între elementele unui triunghi

Marcel CHIRIŢĂ[1]

Abstract. In this Note we establish a couple of vector identities involving the elements of a triangle. As an application, several geometric inequalities are obtained.

Keywords: median, angle-bisector, altitude, perimeter, area.

MSC 2010: 51M04.

În acest articol vom stabili câteva relaţii vectoriale între elementele unui triunghi, iar în final vom demonstra câteva identităţi vectoriale şi vom da câteva aplicaţii.

I. Propoziţie. *Să se arate că în orice triunghi au loc relaţiile vectoriale:*

1) $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} = p(p-a)$ *şi analoagele,*

2) $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{h_a} = \dfrac{4S^2}{a^2}$ *şi analoagele,*

3) $\overrightarrow{i_a} \cdot \overrightarrow{h_a} = \dfrac{4S^2}{a^2}$ *şi analoagele,*

4) $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{a} = \dfrac{1}{2}(b^2+c^2)$ *şi analoagele.*

Vom demonstra mai întâi următoarele rezultate:

Lema 1. *Dacă ABC este un triunghi oarecare, $M \in (BC)$ şi $\dfrac{MB}{MC} = k$, atunci* $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$.

Demonstraţie. Din $\dfrac{MB}{MC} = k$ rezultă că $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MC}$, deci $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$, de unde $\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{AC}$ sau $\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$ şi, prin urmare, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$.

Lema 2. *În orice triunghi sunt adevărate relaţiile:*

5) $\overrightarrow{m_a} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ *şi analoagele,*

6) $\overrightarrow{i_a} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$ *şi analoagele,*

7) $\overrightarrow{h_a} = \dfrac{b\cos C \cdot \overrightarrow{AB} + c\cos B \cdot \overrightarrow{AC}}{b\cos C + c\cos B} = \dfrac{b\cos C \cdot \overrightarrow{AB} + c\cos B \cdot \overrightarrow{AC}}{a}$ *şi analoagele.*

Demonstraţie. Aceste relaţii se obţin aplicând Lema 1 şi ţinând seama de faptul că avem $k=1$ pentru mediană, $k = \dfrac{c}{b}$ pentru bisectoare şi $k = \dfrac{c\cos B}{b\cos C}$ pentru înălţime (evident, toate trei corespunzătoare laturii a).

[1] Profesor, Bucureşti; e-mail: *marc.chirita@yahoo.ro*

Demonstraţia Propoziţiei. 1) Ţinând seama de 5) şi 6), avem:

$$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}=\frac{bc^2}{2(b+c)}+\frac{cb^2}{2(b+c)}+\left[\frac{c}{2(b+c)}+\frac{b}{2(b+c)}\right]\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{bc}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]=\frac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right]=p(p-a).$$

2) Cu relaţiile 5) şi 7) obţinem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{h_a}&=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot\frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB}+c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}=\\&=\frac{bc^2\cos C+b^2c\cos B}{2a}+\left(\frac{c\cos B+b\cos C}{2a}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\\&=\frac{bc}{2a}\left(c\cos C+b\cos B\right)+\frac{1}{4}\left(b^2+c^2-a^2\right)=\\&=\frac{bc}{2a}\left(c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+b\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)+\frac{1}{4}\left(b^2+c^2-a^2\right)\\&=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2}=\frac{4S^2}{a^2}\end{aligned}$$

(în ultimul pas s-a folosit formula lui Heron pentru aria triunghiului în forma $16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$).

3) Procedăm la fel. Utilizând relaţiile 6) şi 7), avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a}&=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}\cdot\frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB}+c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}=\\&=\frac{1}{a\left(b+c\right)}\left[b^2c^2\left(\cos C+\cos B\right)+bc\left(\cos C+\cos B\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right]=\\&=\frac{bc\left(\cos C+\cos B\right)}{2a\left(b+c\right)}\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right).\end{aligned}$$

Înlocuind $\cos C$, $\cos B$ cu expresiile lor date de teorema cosinusului, după calcule de rutină obţinem că

$$\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a}=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2}=\frac{16S^2}{4a^2}=\frac{4S^2}{a^2},$$

de unde rezultă relaţia cerută.

4) Avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{a}&=m_a\cdot a\cdot\cos\left(\overrightarrow{m_a}\ ,\ \overrightarrow{a}\right)=m_a\cdot a\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+m_a^2-b^2}{m_a\cdot a}=\\&=\frac{1}{4}\left(a^2+4m_a^2-4b^2\right)=\frac{1}{2}(b^2+c^2).\end{aligned}$$

II. Din Propoziţia stabilită, prin sumare, obţinem direct următoarele identităţi vectoriale:

$$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}+\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{i_b}+\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{i_c}=p^2, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{h_a}+\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{h_b}+\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{h_c}=4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right), \tag{2}$$

$$\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a}+\overrightarrow{i_b}\cdot\overrightarrow{h_b}+\overrightarrow{i_c}\cdot\overrightarrow{h_c}=4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right), \tag{3}$$

$$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{c}=a^2+b^2+c^2. \tag{4}$$

Identităţile vectoriale precedente pot fi utilizate pentru a obţine inegalităţi interesante relativ la triunghiuri. Astfel, pornind de la (1), prin utilizarea inegalităţii triunghiulare se obţine:

$$p^2=\left|\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}+\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{i_b}+\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{i_c}\right|\le\left|\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}\right|+\left|\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{i_b}\right|+\left|\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{i_c}\right|\le$$
$$\le m_a\cdot i_a+m_b\cdot i_b+m_c\cdot i_c,$$

deci

$$p^2\le m_a\cdot i_a+m_b\cdot i_b+m_c\cdot i_c. \tag{5}$$

Pe de altă parte, din $\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}=p(p-a)$ urmează că

$$p(p-a)\le m_a\cdot i_a\le\left(\frac{m_a+i_a}{2}\right)^2,$$

deci

$$m_a+i_a\ge 2\sqrt{p(p-a)}.$$

Sumând aceasta cu analoagele ei, se obţine că

$$m_a+i_a+m_b+i_b+m_c+i_c\ge 2\left(\sqrt{p(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}\right) \tag{6}$$

sau, aplicând membrului drept inegalitatea mediilor,

$$m_a+i_a+m_b+i_b+m_c+i_c\ge 6\sqrt[3]{pS}. \tag{7}$$

Bibliografie

1. **M. Chiriţă, D. Gheorghiu** – *Aplicaţii ale calcului vectorial în matematica de liceu*, Ed. Sigma, 2003.
2. **Alric Tournier** – *Géometrie vectorielle*, Ed. Mcgraw-Hill, Montreal, 1983.
3. – *Gazeta Matematică. Colecţie,* 1980-2012.

Inegalităţi privind derivata unei funcţii

Sorin PUŞPANĂ[1]

Abstract. In this paper, several inequalities are established regarding the extremum values of a function and its derivatives.

Keywords: differentiable function, supremum, infimum, Lagrange′s theorem.

MSC 2010: 26D99.

Prezentăm în acest articol câteva inegalităţi privind valorile extreme ale unei funcţii şi ale derivatei sale.

Teorema 1. *Dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este o funcţie derivabilă, atunci au loc inegalităţile:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\inf_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right| &\leq \frac{1}{2(b-a)}\left(\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\right)\\ &\leq \frac{1}{b-a}\left(\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|-\inf_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|\right)\\ &\leq \frac{1}{b-a}\left(\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\right)\leq\sup_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|.\end{aligned}\tag{1}$$

Demonstraţie. Prima inegalitate din (1) este echivalentă cu

$$\inf_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|\leq\frac{1}{b-a}\left(\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\right).$$

Dacă derivata se anulează cel puţin într-un punct al intervalului $[a,b]$, atunci $\inf\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|=0$, iar inegalitatea este evidentă. În caz contrar, rezultă că f este strict crescătoare, pentru a face o alegere, caz în care inegalitatea devine $\inf\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|\leq\frac{1}{b-a}\left[f(b)-f(a)\right]$, adevărat conform teoremei lui Lagrange.

A doua inegalitate din (1) este echivalentă cu

$$\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\leq 2\left(\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|-\inf_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|\right).$$

Dacă $f\leq 0$ pe $[a,b]$ sau $f\geq 0$ pe $[a,b]$, atunci inegalitatea devine $0\leq\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)-\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, deci este adevărată. Dacă f ia şi valori pozitive şi valori negative, rezultă că f se anulează pe intervalul $[a,b]$, deci $\inf\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|=0$, iar inegalitatea se scrie:

$$\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)\leq 2\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|\Leftrightarrow$$

[1] Profesor, Craiova; e-mail: *sorin.puspana@yahoo.com*

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le 2\max\left(-\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) + \left|\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right|$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \left|\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right|.$$

A treia inegalitate din (1) este echivalentă cu

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| - \inf_{x\in[a,b]} |f(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Procedăm ca mai sus. Dacă $f \le 0$ pe $[a,b]$ sau $f \ge 0$ pe $[a,b]$, atunci inegalitatea devine egalitate. În caz contrar, rezulta că se anulează pe intervalul $[a,b]$, deci $\inf\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$, iar inegalitatea se scrie succesiv

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \max\left(-\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) + \left|\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right| \le 2\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|\sup_{x\in[a,b]} f(x) + \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right| \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Dacă $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) + \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \le 0$, inegalitatea devine $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \ge 0$, deci este adevărată, iar dacă $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) + \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \ge 0$, atunci inegalitatea devine $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \le 0$, deci este adevărată şi de această dată.

În fine, pentru a patra inegalitate din (1) avem:

$$\frac{1}{b-a}\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right) \le \frac{1}{b-a} \sup_{x,y\in[a,b]} [f(x) - f(y)]$$

$$\le \frac{1}{b-a} \sup_{x,y\in[a,b]} |f(x) - f(y)| \le \sup_{x,y\in[a,b]} |f'(c_{xy})| \le \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|,$$

unde c_{xy} este valoarea intermediară din teorema lui Lagrange.

Teorema este complet demonstrată.

Teorema 2. *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă şi $p, q \in [0,1]$, $p+q = 1$, atunci au loc inegalităţile:*

$$\max(p,q) \inf_{x\in[a,b]} |f'(x)| \le \frac{1}{b-a} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f(pa+qb)| \le$$

$$\le \max(p,q) \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|. \tag{2}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-f(pa+qb)$. şi scriem inegalitatea precedentă în forma

$$\max(p,q)\inf_{x\in[a,b]}|g'(x)|\le\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\le\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|g'(x)|. \tag{3}$$

Dacă, prin absurd, prima inegalitate din (3) nu are loc, atunci avem succesiv:

$$\max(p,q)\inf_{x\in[a,b]}|g'(x)|>\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\ge\frac{1}{b-a}|g(x)|=$$
$$=\frac{1}{b-a}|x-x_0|\,|g'(c_x)|\ge\frac{1}{b-a}|x-x_0|\cdot\inf_{x\in[a,b]}|g'(x)|,\ \forall x\in[a,b],$$

unde c_x este dat de teorema lui Lagrange, iar $x_0=pa+qb$. De aici rezultă că

$$\max(p,q)>\frac{1}{b-a}|x-x_0|,\ \forall x\in[a,b]\Leftrightarrow\max(p,q)>\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|.$$

Cum $\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|=(b-a)\max(p,q)$, obţinem că $\max(p,q)>\max(p,q)$, absurd.

Pentru a doua inegalitate din (3), procedăm la fel. Presupunem că

$$\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|>\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|g'(x)|.$$

Obţinem succesiv:

$$\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|\cdot\sup_{x\in[a,b]}|g'(c_x)|\ge\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|\,|g'(c_x)|$$
$$=\frac{1}{b-a}\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|>\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|g'(x)|\ge\max(p,q)\cdot\sup_{x\in[a,b]}|g'(c_x)|.$$

Rezultă că $\sup_{x\in[a,b]}|x-x_0|>(b-a)\max(p,q),\ \forall x\in[a,b]$, adică $(b-a)\max(p,q)>(b-a)\max(p,q)$, absurd.

Corolar. *Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă şi $p,q\in[0,1]$, $p+q=1$, atunci are loc inegalitatea:*

$$|pf(a)+qf(b)-f(pa+qb)|\le(b-a)\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|. \tag{4}$$

Demonstraţie. Folosind Teorema 2, obţinem succesiv:

$$\begin{aligned}|pf(a)+qf(b)-f(pa+qb)|&=|pf(a)+qf(b)-(p+q)f(pa+qb)|\\&\le p\,|f(a)-f(pa+qb)|+q\,|f(b)-f(pa+qb)|\\&\le\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f(pa+qb)|\\&\le(b-a)\max(p,q)\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|.\end{aligned}$$

NOTA ELEVULUI

Procedeu de demonstrare a unor inegalităţi bazat pe inegalitatea lui Schur

Andi Gabriel BROJBEANU [1]

Abstract. A method for establishing certain inequalities is proposed and applied. It is based upon inequalities (1)-(9) that are consequences of Schur′s inequality (S).

Keywords: inequality, Schur′s inequality.

MSC 2010: 97H30.

În cadrul acestei Note vom prezenta un procedeu de demonstrare a unor inegalităţi, bazat pe inegalitatea lui Schur, care constă în utilizarea inegalităţilor (1)-(9) de mai jos, relativ la primele trei polinoame simetrice fundamentale. Este de precizat că acest procedeu nu-i întotdeauna optim sau cel mai elegant, dar se poate dovedi util în situaţii în care alte metode sau procedee de rezolvare sunt mai greu de găsit.

Începem prin a aminti următorul rezultat, de altfel punctul de plecare al Notei de faţă:

Inegalitatea lui Schur. *Dacă x, y, z sunt numere reale nenegative, atunci pentru orice $t \geq 0$ avem*:

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0, \tag{S}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z$ sau dacă două dintre numerele x, y, z sunt egale şi al treilea este nul; *dacă $xyz = 0$, impunem restricţia $t > 0$.*

Propoziţie. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive şi notăm $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx, r = xyz$, atunci au loc inegalităţile:*

$$p^2 \geq 3q, \tag{1}$$

$$q^2 \geq 3pr, \tag{2}$$

$$pq \geq 9r, \tag{3}$$

$$p^3 \geq 27r, \tag{4}$$

$$q^3 \geq 27r^2, \tag{5}$$

$$p^3 + 9r \geq 4pq, \tag{6}$$

$$2p^3 + 9r \geq 7pq, \tag{7}$$

$$q^3 + 9r^2 \geq 4pqr, \tag{8}$$

$$p^4 + 4q^2 + 6pr \geq 5p^2q, \tag{9}$$

[1] Elev, cl. a XI-a, Colegiul Naţional ,,C. Carabella", Târgovişte; e-mail: *andi_bro@yahoo.com*

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z$.

Demonstraţie. (1) Pentru $t = 0$, (S) devine $(x-y)(x-z) + (y-x)(y-z) + (z-x)(z-y) \geq 0$, adică $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, de unde

$$p^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 3(xy + yz + zx) = 3q.$$

(2) Ţinând cont de (1), obţinem:

$$q^2 = (xy + yz + zx)^2 \geq 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy) = 3xyz(x+y+z) = 3pr.$$

(3) Se obţine înmulţind membru cu membru inegalităţile (1) şi (2).

(4) Se înmulţesc inegalităţile (1) şi (3) membru cu membru.

(5) Se înmulţesc membru cu membru inegalităţile (2) şi (3).

(6) Pentru $t = 1$, (S) devine $x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0$, adică $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$.

Cum $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$, obţinem:

$$\begin{aligned} p^3 + 9r = (x+y+z)^3 + 9xyz &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &\quad + 3xyz + +3(x+y+z)(xy+yz+zx) + 6xyz \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) + \\ &\quad + 3xyz \geq xy(x+y) + xyz + yz(y+z) + xyz \\ &\quad + zx(z+x) + xyz + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &= xy(x+y+z) + yz(x+y+z) + zx(x+y+z) \\ &\quad + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) = 4pq. \end{aligned}$$

(7) Ţinând cont de (1) şi (6), obţinem:

$$2p^3 + 9r = p \cdot p^2 + (p^3 + 9r) \geq p \cdot 3q + 4pq = 3pq + 4pq = 7pq.$$

(8) Aplicând (6) pentru numerele reale pozitive $a = xy, b = yz, c = zx$, avem:

$$q^3 + 9r^2 = (a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) = 4pqr.$$

(9) Pentru $t = 2$, (S) devine $x^2(x-y)(x-z) + y^2(y-x)(y-z) + z^2(z-x)(z-y) \geq 0$, adică $x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + zx(z^2+x^2)$.

Cum $x^4 + y^4 + z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = (p^2-2q)^2 - 2(q^2-2pr) = p^4 + 2q^2 + 4pr - 4p^2q$, obţinem:

$$\begin{aligned} p^4 + 4q^2 + 6pr &= x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) + 4p^2q + 2q^2 + pr \\ &\geq 4p^2q + 2q^2 + pr + +xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) \\ &\quad + zx(z^2+x^2) = 4p^2q + 2q^2 + pr + (xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2) - \\ &\quad - x^2yz - xy^2z - xyz^2 = 4p^2q + 2q^2 + pr - pr + q(p^2-2q) \\ &= 4p^2q + q(p^2 - 2q + 2q) = 5p^2q. \end{aligned}$$

În continuare, vom prezenta câteva inegalităţi preluate din diferite surse, care vor fi demonstrate utilizând inegalităţile din propoziţia precedentă.

Problema 1. *Fie* $x, y, z \in (0, \infty)$ *astfel încât* $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2(xy + yz + zx)$. *Arătaţi că* $9xyz \geq x + y + z$.

Marius Stănean, forumul MathTime

Demonstraţie. Folosind (6) şi condiţia din enunţ, obţinem că:

$$9xyz = 9r \geq 4pq - p^3 = p\left[4(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)\right] =$$
$$= p\left[2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)\right] = p = x + y + z.$$

Problema 2. *Fie* $x, y, z \geq 0$ *astfel încât* $xy + yz + zx = 3$. *Arătaţi că* $4xyz(x + y + z) - 3xyz \leq 9$.

Marius Stănean, forumul MathTime

Demonstraţie. Dacă $xyz = 0$, inegalitatea este evidentă. Dacă $x, y, z > 0$, atunci din (5) şi condiţia din enunţ rezultă că $27r^2 \leq q^3 = 27 \Rightarrow r^2 \leq 1 \Rightarrow r \leq 1 \Rightarrow r^2 \leq r$. Conform cu (8), avem:

$$4xyz(x + y + z) - 3xyz \leq 4pr - 3r^2 = \frac{1}{3}(4pqr - 9r^2) \leq \frac{1}{3}q^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9.$$

Problema 3. *Fie* x, y, z *trei numere reale pozitive cu* $x + y + z = 3$. *Să se arate că*

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq x^2 + y^2 + z^2 + 3.$$

Romeo Raicu, G.M.B. 7-8-9/2011

Demonstraţie. Avem $p = x + y + z = 3$, deci

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - x^2 - y^2 - z^2 - 3 = 2[3r + p(p^2 - 3q)] - (p^2 - 2q) - 3 = 6r + 2p^3 -$$
$$- 6pq - \frac{1}{3}p(p^2 - 2q) - \frac{1}{9}p^3 = \frac{14}{9}p^3 + 6r - \frac{16}{3}pq = \frac{8}{9}p(p^2 - 3q) + \frac{2}{3}(p^3 + 9r - 4pq) \geq 0,$$

conform cu cu (1) şi (6), deci inegalitatea este demonstrată.

Problema 4. *Fie* x, y, z *numere reale pozitive cu proprietatea că* $xy + yz + zx = 3$. *Să se arate că* $3xyz(x + y + z) - 2xyz \leq 7$.

Marian Cucoaneş, G.M. 4/2013

Demonstraţie. Trebuie să demonstrăm că $3pr \leq 7 + 2r$.

Conform (5) şi (8), rezultă $3pr = \frac{1}{4} \cdot 4pqr \leq \frac{1}{4}(q^3 + 9r^2) = \frac{1}{4}(27 + r^2 + 8r^2) \leq \frac{1}{4}(27 + \frac{1}{27}q^3 + 8r\sqrt{\frac{1}{27}q^3}) = \frac{1}{4}(28 + 8r) = 7 + 2r$, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 5. *Fie* $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *astfel încât* $2(\tan a + \tan b + \tan c) = 3 \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c$.

a) Arătaţi că $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c \geq 1$.

b) Aflaţi valoarea minimă a expresiei $\dfrac{1}{\sin^2 a}+\dfrac{1}{\sin^2 b}+\dfrac{1}{\sin^2 c}$.

Shortlist 2013

Demonstraţie. Notăm $x=\tan a, y=\tan b, z=\tan c$. Cum $a,b,c\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, avem că $x,y,z>0$. Rezultă că $\cos^2 a=\dfrac{1}{1+x^2}, \cos^2 b=\dfrac{1}{1+y^2}, \cos^2 c=\dfrac{1}{1+z^2}$.

a) $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-1=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}-1=$

$$=\frac{3+2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2}-1=\frac{2+x^2+y^2+z^2-x^2y^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}.$$

Dar $2+x^2+y^2+z^2-x^2y^2z^2=2+p^2-2q-r^2=p^2-2q+\dfrac{3r}{p}-\dfrac{4}{9}p^2=\dfrac{1}{9p}(5p^3+27r-18pq)=\dfrac{2}{9}(p^2-3q)+\dfrac{1}{3p}(p^3+9r-4pq)\geq 0$, conform (1) şi (6), de unde $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c\geq 1$, cu egalitate pentru $x=y=z=\sqrt{2}$.

b) Demonstrăm că $\dfrac{1}{\sin^2 a}+\dfrac{1}{\sin^2 b}+\dfrac{1}{\sin^2 c}\geq\dfrac{9}{2}$:

$$\frac{1}{\sin^2 a}+\frac{1}{\sin^2 b}+\frac{1}{\sin^2 c}-\frac{9}{2}=\frac{1+x^2}{x^2}+\frac{1+y^2}{y^2}+\frac{1+z^2}{z^2}-\frac{9}{2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{3}{2}=$$
$$=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^2y^2z^2}-\frac{3}{2}=\frac{q^2-2pr}{r^2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{q^2}{pr}-3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{q^2-3pr}{pr}\geq 0,$$

conform cu (2), deci valoarea minimă este $\dfrac{9}{2}$ şi se atinge pentru $x=y=z=\sqrt{2}$.

Problema 6. *Numerele pozitive a,b,c verifică $abc=1$. Demonstraţi inegalitatea*

$$\sum\frac{a+b}{c}\geq 2\left(\sum a+\sum\frac{1}{a}-3\right)$$

Gabriel Dospinescu, Shortlist 2004

Demonstraţie. Facem decondiţionarea $a=\dfrac{x}{y}, b=\dfrac{y}{z}, c=\dfrac{z}{x}$. Avem:

$$\begin{aligned}\sum\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}{\frac{z}{x}}\geq 2\left(\sum\frac{x}{y}+\sum\frac{y}{x}-3\right)&\Leftrightarrow\sum\frac{x^2}{yz}+\sum\frac{xy}{z^2}+6\geq 2\sum\frac{x^2+y^2}{xy}\\
&\Leftrightarrow\frac{\sum x^3}{xyz}+\frac{\sum(xy)^3}{x^2y^2z^2}+6\geq 2\cdot\frac{\sum x\sum x^2-\sum x^3}{xyz}\\
&\Leftrightarrow 3\cdot\frac{3r+p^3-3pq}{r}+\frac{3r^2+q^3-3pqr}{r^2}+6\geq 2\cdot\frac{p(p^2-2q)}{r}\\
&\Leftrightarrow 18r^2+3p^3r+q^3-12pqr\geq 2p^3r-4pqr\\
&\Leftrightarrow (q^3+9r^2-4pqr)+r(p^3+9r-4pq)\geq 0,\end{aligned}$$

adevărat conform cu (6) şi (8).

Problema 7. *Demonstraţi că în orice triunghi*

$$\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\frac{9r}{4R+r}\geq 4.$$

Cosmin Pohoaţă, Shortlist 2007

Demonstraţie. Fie r_a, r_b, r_c lungimile razelor cercurilor exînscrise corespunzătoare vârfurilor triunghiului ABC. Dacă $p_0 = r_a+r_b+r_c, q_0 = r_ar_b+r_br_c+r_cr_a, r_0 = r_ar_br_c$, cu notaţiile cunoscute obţinem: $p_0 = 4R + r, q_0 = p^2, r_0 = p^2r$ (se folosesc formulele $r_a = \dfrac{S}{p-a}, r_b = \dfrac{S}{p-b}, r_c = \dfrac{S}{p-c}$).

Inegalitatea este echivalentă cu $\dfrac{{p_0}^2}{q_0}+9\dfrac{r_0}{p_0q_0}\geq 4 \Leftrightarrow p_0^3+9r_0\geq 4p_0q_0$, adevărat conform cu (6).

Problema 8. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c$=3. Arătaţi că*

$$abc+\frac{12}{ab+bc+ca}\geq 5.$$

forumul ArtofProblemSolving

Demonstraţie. Dacă $p = a + b + c = 3, q = ab + bc + ca, r = abc$, atunci

$$abc+\frac{12}{a+b+c}-5=r+\frac{12}{q}-5=\frac{27r}{p^3}+\frac{4p^2}{3q}-5=\frac{4p^5+81qr-15p^3q}{p^3q}\geq 0,$$

deoarece $4p^5 + 81qr - 15p^3q = 9q(p^3 + 9r - 4pq) + 4(p^5 - 6p^3q + 9pq^2) = 4p(p^2 - 3q)^2 + 9q(p^3 + 9r - 4pq) \geq 0$, conform cu (6).

Problema 9. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC. Să se arate că*

$$\frac{a^3}{b+c-a}+\frac{b^3}{c+a-b}+\frac{c^3}{a+b-c}\geq a^2+b^2+c^2$$

Nicolae Papacu, IMAC 2009

Demonstraţie. Decondiţionăm: $a = y + z, b = z + x, c = x + y$. Avem:

$$\sum\frac{a^3}{b+c-a}=\sum\frac{(y+z)^3}{2x}=\frac{\sum yz[y^3+z^3+3yz(p-x)]}{2r}=$$
$$=\frac{\sum x^3\sum xy-xyz\sum x^2+3p\sum y^2z^2-3r\sum yz}{2r}=\frac{3qr+p^3q-3pq^2-}{}$$
$$\frac{-p^2r+2qr+3pq^2-6p^2r-3qr}{2r}=\frac{p^3q-7p^2r+2qr}{2r},$$

deci inegalitatea este succesiv echivalentă cu $\dfrac{p^3q-7p^2r+2qr}{2r}\geq\sum(y+z)^2 \Leftrightarrow p^3q-7p^2r+2qr\geq 4r(p^2-q)\Leftrightarrow p^3q+6qr\geq 11p^2r\Leftrightarrow q(p^3+9r-4pq)+\dfrac{11p}{3}(q^2-3pr)+\dfrac{q}{3}(pq-9r)\geq 0$, adevărat conform cu (2), (3) şi (6).

Problema 10. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu suma 1, atunci*

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2$$

Titu Andreescu şi Gabriel Dospinescu

Demonstraţie. Dacă $p = a + b + c = 1, q = ab + bc + ca, r = abc$, atunci inegalitatea se scrie:

$$\sum a^2 \sum a^2b^2 - a^2b^2c^2 \geq 8 \left(\sum a^2b^2\right)^2 \Leftrightarrow \sum a^2b^2 \cdot$$
$$\cdot \left[\left(\sum a\right)^2 \sum a^2 - 8 \sum a^2b^2\right] \geq a^2b^2c^2 \left(\sum a\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (q^2 - 2pr)(p^4 - 2p^2q - 8q^2 + 16pr) \geq p^2r^2$$

Dar, conform cu (2) şi (9), avem $(q^2 - 2pr)(p^4 - 2p^2q - 8q^2 + 16pr) \geq pr(5p^2q - 4q^2 - 2p^2q - 8q^2 + 10pr) \geq pr[pr + 3(p^2q + 3pr - 4q^2)] \geq p^2r^2$, deoarece $p^2q + 3pr - 4q^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx) + 3xyz(x + y + z) - 2(xy + yz + zx)^2 = (x^3y + y^3x - 2x^2y^2) + (y^3z + z^3y - 2y^2z^2) + (z^3x + x^3z - 2x^2z^2) = xy(x - y)^2 + yz(y - z)^2 + zx(z - x)^2 \geq 0$. Aşadar, inegalitatea este demonstrată.

Problema 11. *Fie $a, b, c > 0$. Arătaţi că*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)}.$$

Andi Gabriel Brojbeanu

Demonstraţie. Dacă $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$, atunci

$$\frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)} - \sum \frac{1}{a+b} = \frac{3p}{2q} - \frac{\sum (a^2 + ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{3p}{2q} - \frac{p^2 + q}{pq - r} =$$
$$= \frac{3p^2q - 3pr - 2p^2q - 2q^2}{2p(pq - r)} = \frac{\dfrac{2q}{3}(p^2 - 3q) + \dfrac{p}{3}(pq - 9r)}{2(pq - r)} \geq 0,$$

adevărat conform cu (1) şi (3).

Propunem cititorilor interesaţi să procedeze în acelaşi fel cu inegalităţile:

1. Fie a, b, c numere reale pozitive. Arătaţi că $\dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c} \geq 4\left(\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}\right)$. (*Mircea Lascu*)

2. Să se arate că $5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1$, pentru orice numere reale nenegative care satisfac relaţia $a + b + c = 1$.

(*Mihai Piticari şi Dan Popescu, Shortlist 2002*)

3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a + b + c = 1$. Arătaţi că $\dfrac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)} \geq 8$. (*forumul ArtofProblemSolving*)

4. Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea $\dfrac{3(r_a + r_b + r_c)}{2p^2} \geq \dfrac{1}{r_a + r_b} + \dfrac{1}{r_b + r_c} + \dfrac{1}{r_c + r_a} \geq \dfrac{6}{5R + 2r}$.(*Andi Gabriel Brojbeanu, Recreaţii Matematice 1/2014*)

5. Fie $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 1$. Să se arate că $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + 3(ab + bc + ca) \geq \dfrac{11}{2}$. (*Gh. Ghiţă, G.M.B. 7-8-9/2009*)

6. Se consideră a, b, c trei numere reale strict pozitive. Să se arate că $\sum \dfrac{b+c}{a} \geq 3 + \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)}{abc(a + b + c)}$. (*Cezar Lupu, Shortlist 2006*)

7. Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu proprietatea că $abc = 1$, atunci $(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3) \geq 2\left(1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}\right)$. (*Dan Nedeianu, Shortlist 2010*)

8. Arătaţi că pentru orice $a, b, c > 0$ avem $\dfrac{a^2 + b^2}{a + b} + \dfrac{b^2 + c^2}{b + c} + \dfrac{c^2 + a^2}{c + a} \leq \dfrac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$. (*Ngueyen le Dung*)

9. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât $a + b + c \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Să se arate că $a + b + c \geq \dfrac{3}{a + b + c} + \dfrac{2}{abc}$.
(*Cezar Lupu şi Valentin Vornicu, Shortlist 2006*)

10. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc = 1$. Arătaţi că $5 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1)$. (*forumul ArtofProblemSolving*)

11. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, atunci $\dfrac{1}{x^2 + xy + y^2} + \dfrac{1}{y^2 + yz + z^2} + \dfrac{1}{z^2 + zx + x^2} \geq \dfrac{9}{(x + y + z)^2}$. (*Vasile Cîrtoaje, G.M.B.*)

Bibliografie

1. **T. Ceauşu, A.C. Muntean, I. Stana** – *Echivalenţa unor inegalităţi clasice*, Editura Mirton, Timişoara, 2007.
2. **T. Andreescu, V. Cârtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu** – *Old* & *new inequalities*, Editura Gil, Zalău, 2004.
3. **B. Ioniţă, T. Zvonaru** – *Aplicaţii ale inegalităţii lui Schur*, Pregătirea concursului Internaţional de Matematică ,,Arhimede" - IMAC, Clasele III-XII, Editura Nomina, 2011.
4. – *Colecţia Shortlist 2002-2013.*

Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{A})$. Facteurs invariants

Adrien REISNER [1]

Abstract. We study the Smith form of matrices $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{A})$, where $\mathbb{A}$ is a principal ring, and his applications, specially invariant factors for a matrix.

Keywords: diagonal matrix, Smith normal form, invariant factor.

MSC 2010: 15A21.

I. Forme de Smith d'une matrice. Soit $\mathbb{A}$ un anneau *principal.* Deux matrices A et B de même dimensions, à coefficients dans $\mathbb{A}$ sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe deux matrices P et Q *inversibles* telles que $A = PBQ$. On montre de suite qu'il s'agit d'une *relation d'équivalence.* On a le théorème suivant:

Théorème 1 (Smith). *Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{A})$ est équivalente à une matrice diagonale -* ***forme de Smith de la matrice*** *M -*

$$D = diag(d_1, d_2, ..., d_s, 0, 0, ..., 0),$$

où $d_1|d_2|\ldots|d_s$ et $s = \min(m, n)$.

Les éléments $d_1, d_2, ..., d_s$ s'appellent **facteurs invariants** de la matrice M.

Pour démontrer le théorème il suffit de montrer qu'on obtient D en multipliant M à droite et à gauche par des **matrices inversibles**. On rappelle les *opérations élémentaires* sur les rangées (lignes et colonnes) d'une matrice (ces opérations transforment une matrice en une matrice équivalente):

OP1. *Echange de deux rangées.* Postmultiplier ou prèmultiplier par la matrice $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, où $t_{ii} = 1$ si $i \neq p$, $i \neq q$, $t_{pq} = t_{qp} = 1$, tous les autres t_{ij} sont nuls. Alors: $M \times T : Col_p \leftrightarrow Col_q$; et de même : $T \times M : Lig_p \leftrightarrow Lig_q$. La matrice T est une matrice de permutation donc inversible.

OP2. *Multiplication d'une rangée par un scalaire inversible.* Postmultiplier ou prèmultiplier par la matrice diagonale suivante: $E_i(u) = diag(1, 1, ..., 1, u, 1, ..., 1)$, où u est un élément inversible de l'anneau $\mathbb{A}$.

OP3. *Addition à une rangée d'un multiple d'une autre.* Postmultiplier ou prèmultiplier par la matrice $S_k = (s_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, où $s_{ii} = 1, \forall i$, $s_{pq} = k$, pour $p \neq q$, p et q fixés, tous les autres s_{ij} sont nuls. Alors: $M \times S_k : k \times Col_p + Col_q \to Col_q$ et $S_k \times \dot{M} : k \times Lig_p + Lig_q \to Lig_q$. La matrice S_k est inversible.

OP4. *Altération de deux rangées de sorte que les premiers éléments de ces rangées soient remplacés par leur p.g.c.d. et 0.* Cette opération résulte du lemme suivant:

[1]TELECOM ParisTech; e-mail: *adrien.reisner@yahoo.fr*

Lemme. *Soit* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{A})$. *Il existe une matrice* $Q \in GL_2(\mathbb{A})$ *telle que* $Q \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ *où* $d = 0$, *ou bien* $d = p.g.c.d.(a, b)$.

Démonstration. Si $a = b = 0$ il n'y a rien à prouver. Sinon, soit $d = p.g.c.d.(a, b)$: il existe $a', b', s, t \in \mathbb{A}$ tels que $a = a'd$, $b = b'd$, et $sa - tb = d$. Alors $d \neq 0$ et $d(sa' - tb') = d$ donne $sa' - tb' = 1$. En particulier, la matrice $Q' = \begin{pmatrix} a' & t \\ b' & s \end{pmatrix}$ est inversible dont l'inverse $Q'^{-1} = Q = \begin{pmatrix} s & -t \\ -b' & a' \end{pmatrix}$ vérifie:

$$Q \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -t \\ -b' & a' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration du théorème. On échange les rangées - lignes et colonnes - pour que le coefficient m_{11} soit non nul - opération OP1. On applique OP4 afin de remplacer m_{11} et m_{21} par leur p.g.c.d. et 0. On applique OP4 successivement à m_{11} et m_{i1}, $3 \leq i \leq n$, jusqu'à ce que la première colonne n'ait que des zéros au-dessous du premier coefficient m_{11}. Dans le cas où $m_{11}|m_{i1}$ on peut utiliser OP3 au lieu de OP4.

De même, plusieurs opérations OP4 font apparaître le vecteur $(m_{11}, 0, ..., 0)$ sur la première ligne et finalement M est équivalente à une matrice de la forme - matrice bloc - : $\begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$. On recommence les mêmes opérations sur la matrice M_1.

Remarque. Dans le cas où l'anneau $\mathbb{A}$ est principal (par exemple: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$ ou $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}$ étant un corps) on n'a pas besoin de l'opération OP4 (on utilise la division euclidienne dans l'anneau euclidien $\mathbb{A}$). Dans la suite, l'anneau principal $\mathbb{A}$ sera soit $\mathbb{Z}$ soit $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un corps.

Exemple 1. *Trouver la forme de Smith de la matrice* $M = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1) $a = m_{11} = 6$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = M_1$: on fait apparaître 3 (reste de la division de 9 par 6) en m_{21};

2) $a = 3$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = M_2$: on fait apparaître $a = 3$ en m_{11};

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = M_3$: on fait apparaître 0 en m_{21};

4) $M_3 \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = M_4$: on *recommence sur les lignes* et on fait apparaître 1 (reste de la division de 7 par 3) en m_{12};

5) $a = 1$. $M_4 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = M_5$: on fait apparaître $a = 1$ en m_{11};

6) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix} \times M_5 = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 18\end{pmatrix} = M_6$: on fait apparaître 0 en m_{21};

7) $M_6 \times \begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 18\end{pmatrix} = M_7$: on fait apparaître 0 en m_{12};

M_7 est la *forme de Smith* de la matrice M : $M_7 = PMQ$ avec:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -30 & 4\end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 7\\ 10 & -3\end{pmatrix}.$$

Exemple 2. *Trouver la forme de Smith de la matrice* $M = \begin{pmatrix}3 & 15\\ -6 & -9\\ -3 & 6\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{Z})$.

1) $a = 3$. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix}3 & 15\\ 0 & 21\\ 0 & 21\end{pmatrix} = M_1$: on fait apparaître 0 en m_{21} et m_{31};

2) $M_1 \times \begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 21\\ 0 & 21\end{pmatrix} = M_2$: on fait apparaître 0 en m_{12} : on *recommence avec la matrice colonne* $\begin{pmatrix}21\\ 21\end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \times M_2 = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 21\\ 0 & 0\end{pmatrix} = M_3$.

M_3 est la *forme de Smith* de la matrice M : $M_3 = PMQ$ avec:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

II. Application: systèmes linéaire diophantien. On se propose de trouver les *solutions entières* du système de m équations linéaires à n inconnues: $MX = B$, où $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{Z})$ et $B \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{Z})$.

Soit $D = diag(d_1, d_2, ..., d_s, 0, 0, ..., 0)$, où $s = \min(m, n)$, la forme de Smith de la matrice M: il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $QMP = D$. Alors, $Q^{-1}DP^{-1} = M$ et le système précédent devient: $(Q^{-1}DP^{-1})X = B$. On en déduit: $D(P^{-1}X) = QB$ soit en posant: $Y = P^{-1}X = ^t(y_1, y_2, ..., y_n)$ et $C = QB = {}^t(c_1, c_2, ..., c_m)$: $DY = C$. Ce dernier système s'écrit sous la forme suivante:

$$d_1y_1 = c_1,\ \ d_2y_2 = c_2, ..., d_sy_s = c_s,\ \ 0 = c_{s+1}, ..., 0 = c_n.$$

La solution de ce dernier système existe si et seulement si pour tout i tel que $1 \leq i \leq s$ on a $d_i \mid c_i$ et pour tout i tel que $s < i \leq n$ on a $c_i = 0$. Connaissant les y_i on obtient les x_i en remplaçant la valeur obtenue dans $X = PY$.

Exemple 3. *Soit à résoudre le système diophantien :* $MX = B$, *où la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \textit{ et la matrice } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; (\textit{où } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

On constate que la forme de Smith de la matrice M est : $D{=}QMP{=}diag(1,1,2,0)$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $Y = P^{-1}X$ et $C = QB = {}^t(1,1,-4,0)$. Alors $DY = C$ soit les quatre équations diophantiennes suivantes : $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $2y_3 = -4$ et $0y_4 = 0$. Le système est résoluble et on a : $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -2$ et $y_4 = k$, où k est arbitraire dans $\mathbb{Z}$. Le système original admet donc pour solution: $X = PY = {}^t(5, -1+k, -2+2k, k)$. Par contre, si $B = {}^t(\,1,1,3,-1)$, le système n'est pas résoluble.

III. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée. $\mathbb{K}$ étant un corps commutatif, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Considérant alors *l'anneau principal* $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$, le théorème de Smith conduit à une décomposition particulière de χ_M, *polynôme caractéristique* de la matrice carrée M. Soit en effet la matrice polynomiale (à coefficients dans l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$) définie par $N = XI_n - M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. D'abord une définition.

Définition 1. On appelle *facteurs invariants de similitude* de la matrice M, les polynômes obtenus en normalisant les facteurs invariants de la matrice polynomiale $N = XI_n - M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. Dans ce cas *la norme d'un polynôme* est son degré.

Exemple 4. *Trouver les facteurs invariants de similitude de la matrice réelle* $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Dans ce but on se propose de trouver la forme de Smith de la matrice polynomiale $N = XI_3 - M$ soit de la matrice $N = (n_{ij}) = \begin{pmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 2 & X & 1 \\ -6 & -3 & X-4 \end{pmatrix}$.

1) $a = d^o(1) = 0$. $N \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X+1 & 1 \\ X & 2 & 1 \\ -3 & -6 & X-4 \end{pmatrix} = N_1$: on échange les colonnes 1 et 2 afin d'obtenir $n_{11} = 1$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -X & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times N_1 = \begin{pmatrix} 1 & X+1 & 1 \\ 0 & -X^2-X+2 & 1-X \\ 0 & 3X-3 & X-1 \end{pmatrix} = N_2$: on obtient des 0 en n_{21} et n_{31};

3) $N_2 \times \begin{pmatrix} 1 & -X-1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X^2-X+2 & 1-X \\ 0 & 3X-3 & X-1 \end{pmatrix} = N_3$: on obtient des 0 en n_{12} et n_{13};

4) on recommence avec la matrice (2×2) suivante: $\begin{pmatrix} -X^2-X+2 & 1-X \\ 3X-3 & X-1 \end{pmatrix}$;

5) $a = d^o(1-X) = 1$. $N_3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 2-X-X^2 \\ 0 & X-1 & 3X-3 \end{pmatrix} = N_4$: on échange les colonnes 2 et 3 afin d'obtenir $a = 1-X$ en position n_{22};

6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 2-X-X^2 \\ 0 & 0 & -1+2X-X^2 \end{pmatrix} = N_5$: on fait apparaître 0 en position n_{32};

7) $N_5 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2-X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & -1+2X-X^2 \end{pmatrix} = N_6$: on fait apparaître 0 en position n_{23}.

N_6 est la forme de Smith de la matrice polynomiale N. On obtient les facteurs invariants de similitude de la matrice M en normalisant les polynômes diagonaux de N_6: $(X-1)^2$ et $X-1$.

Exercice. *Trouver les facteurs de similitude de la matrice réelle*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse: La matrice M admit un seul facteur invariant de similitude, à savoir le polynôme normalisé $P = (X^2+1)(X-1)$.

Remarque. Si $(P_1 \,|\, P_2 \,|\, ... \,|\, P_s)$ désigne la suite des facteurs invariants de la matrice M, on a : $P_s = m_M$ polynôme minimal de M et $\prod P_i = \chi_M$ polynôme caractéristique de M (- voir définition 1 -).

Références

1. I.D. Ion, N. Radu – *Algebra*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1991.

An inductive proof of the Cayley-Hamilton theorem

N. ANGHEL[1]

Abstract. In this note we investigate a computational proof of the Cayley-Hamilton theorem, based on induction.

Keywords: matrix, Cayley-Hamilton theorem, characteristic polynomial, induction.

MSC 2010: 15A24, 15A18, 11C08, 11C20.

In a recent issue of Recreaţii Matematice [**2**] M. Tetiva explored the possibility of providing a computational proof for the Cayley-Hamilton theorem. This elegant result in Matrix Theory states that for any $n \times n$ complex matrix A one has

$$A^n - s_1 A^{n-1} + s_2 A^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} A + (-1)^n s_n I_n = O_n, \tag{5}$$

where s_1, s_2, $\ldots$ s_n are the (un-signed) coefficients of the characteristic polynomial $p_A(\lambda)$ of A, given by

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - s_1 \lambda^{n-1} + s_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} \lambda + (-1)^n s_n. \tag{6}$$

As pointed out in [**2**] there are many proofs for this theorem. Perhaps the most recognizable one [**1**] starts by addressing first the case of diagonalizable matrices, for which the theorem is a tautology. Typically, these proofs fail to capture the dynamic interplay between the entries of the various powers of A and the coefficients of the characteristic polynomial of A. In other words, while we know how to multiply matrices, on one hand, and we know that, equivalently, the characteristic coefficient s_i, $i = 1, \ldots, n$, equals the sum of the $\binom{n}{i}$ diagonal minors of A (i.e., the determinants of the sub-blocks of A obtained by eliminating the same $n - i$ rows and columns of A), on the other hand, we do not know the subtle assembling of them that makes up (5). Only a computational proof of (5), which amounts to the verification of n^2 polynomial identities involving the entries of A, would provide that.

The above points are taken up in [**2**] for the first non-trivial case, $n = 3$, by reducing the problem to invertible matrices A, when (5) becomes equivalent to

$$A^2 - s_1 A + s_2 I_3 - s_3 A^{-1} = O_3. \tag{7}$$

The ease of computing A^2 and the usual expressions for the entries of A^{-1} make the verification of (7) simple. Although not mentioned in [**2**], the case $n = 4$ can be handled similarly, by showing that

$$A^2 - s_1 A + s_2 I_4 - s_3 A^{-1} + s_4 (A^{-1})^2 = O_4. \tag{8}$$

It is worth saying that originally Cayley verified (5) in the case $n = 3$ by brute-force calculation [**1**]. It is also apparent that a verification of (5) by the above methods becomes untenable for $n \geq 5$.

[1] Department of Mathematics, University of North Texas, Denton; e-mail: *angel@unt.edu*

The purpose of this note is to provide a proof for the Cayley-Hamilton theorem for arbitrary n that certainly captures some of the computational flavour sought after above. The proof is done by induction on n. It is very unlikely that this proof is new, however we do not have a reference for it. The proof is also very elementary. It uses only standard facts about matrices, such that: a) any complex square matrix admits an eigenvalue, b) The coefficients of the characteristic polynomial $p_A(\lambda)$ are left invariant by transposition or similarity changes of A. Consequently, the Cayley-Hamilton equation (5) holds for A if and only if it holds for A^T, or for $M^{-1}AM$, M invertible matrix.

To get the inductive step under way, assume now that (5) holds for any matrix A of size n, for some fixed integer n. We want to show that then it also holds for matrices B of size $n+1$. To this end, let $\mu \in \mathbb{C}$ be an eigenvalue for B^T with corresponding eigenvector $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{n+1}$, written as a column vector. By extending the vector $\mathbf{b}$ to a basis in $\mathbb{C}^{n+1}$ and then representing B^T in this new basis, we conclude that B is similar to a matrix $B_0 := \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix}$, for some vector $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ and some complex $n \times n$ matrix A. Therefore, it suffices to prove (5) for the particular conjugate B_0 of B.

Suppose first that μ is not an eigenvalue of A. It is then easily seen that for any positive integer k,

$$B_0^k = \begin{bmatrix} \mu^k & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \mu^i A^{k-1-i}\mathbf{a} & A^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^k & 0 \\ (A-\mu I_n)^{-1}(A^k - \mu^k I_n)\mathbf{a} & A^k \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Also, by using the characterization of s_i one can see that

$$s_i(B_0) = \mu s_{i-1}(A) + s_i(A), \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{10}$$

where we convene that $s_0(A) = 1$ and $s_{n+1}(A) = 0$.

In view of (9), the verification of the Cayley-Hamilton equation for B_0 is equivalent with checking that

$$\mu^{n+1} - s_1(B_0)\mu^n + s_2(B_0)\mu^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n(B_0)\mu + (-1)^{n+1} s_{n+1}(B_0) = 0, \tag{7}$$

and that

$$A^{n+1} - s_1(B_0)A^n + s_2(B_0)A^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n(B_0)A + (-1)^{n+1} s_{n+1}(B_0)I_n = O_n. \tag{8}$$

Both checks are straightforward, by making use of the contents of (10) and of the inductive hypothesis on A.

If μ does happen to be an eigenvalue for A one can replace A by $A - zI_n$ in B_0, which for values of $z \in \mathbb{C}$ close to 0 does not have μ as an eigenvalue, and then reach the desired conclusion for the original B_0 via a limiting argument.

References

1. **J.H. Hubbard, B.B. Hubbard** – *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms – A Unified Approach*, 4th Edition, Matrix Editions, Ithaca, 2009.
2. **M. Tetiva** – *Se poate demonstra teorema Cayley-Hamilton prin calcul direct?* (*in Romanian*), Recreaţii Matematice (Iaşi-Romania), XVI (2014), nr. 1, 42-43.

Un procedeu de abordare a unor probleme de extrem geometric

Daniel VĂCARU [1]

Abstract. In this methodical Note, a procedure for solving geometrical problems of various types is presented and applied.
Keywords: right-angled triangle, decreasing function, extreme value.
MSC 2010: 97D40.

În această Notă, indicăm un procedeu de rezolvare a unor probleme de geometrie în care se cere determinarea unei valori de extrem sau unei condiţii de realizare a unui extrem.

Esenţa procedeului este cuprinsă în următoarele leme:

Lema 1. *Dacă funcţia* $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ *satisface condiţia* $f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=f(t)$, $\forall t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, *şi este strict descrescătoare pe* $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, *atunci* $f(t)\geq f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\forall t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Demonstraţie. În condiţiile din enunţ, dreapta $x=\dfrac{\pi}{4}$ este axă de simetrie a graficului funcţiei f şi afirmaţiile dorite rezultă imediat.

Lema 2. *Dacă funcţia* $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ *satisface condiţia* $f(t)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=0$, $\forall t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, *şi este strict crescătoare pe* $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, *atunci ecuaţia* $f(x)+f(y)=0$, $x,y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, *are ca soluţii perechile* $\left(t,\dfrac{\pi}{2}-t\right)$, $\forall t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din faptul că punctul $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ este centru de simetrie al graficului funcţiei f.

Problema 1 [**5**]. *În orice triunghi dreptunghic are loc inegalitatea*

$$\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\geq 2\sqrt{2},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă triunghiul dreptunghic este isocel.

Soluţie. Deoarece în cazul triunghiurilor dreptunghice $R=\dfrac{a}{2}$ şi $r=\dfrac{b+c-a}{2}$, avem

$$\frac{R}{r}+\frac{r}{R}=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b+c-a}{a}=\frac{1}{\sin B+\sin C-1}+\sin B+\sin C-1=$$
$$=\frac{1}{\sin B+\cos B-1}+\sin B+\cos B-1.$$

[1] Profesor, Colegiul Economic ,,Maria Teiuleanu", Piteşti; e-mail: *danvaccag@gmail.com*

Considerăm funcţia f dată de

$$f(t) = \frac{1}{\sin t + \cos t - 1} + \sin t + \cos t - 1, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Evident, $f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = f(t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Putem scrie f în forma $f = h \circ g$, unde

$$g(t) = \sin t + \cos t - 1, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

şi

$$h(x) = \frac{1}{x} + x, \quad x \in (0, 1).$$

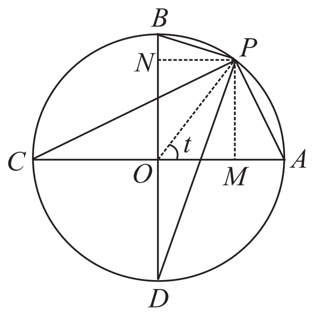
Cum $g(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) - 1$, deducem că g este strict crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Tot pe cale elementară (de exemplu, apelând la definiţie), se stabileşte că h este strict descrescătoare pe $(0, 1)$. Ca urmare, $f = h \circ g$ este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Conform Lemei 1, obţinem că $f(t) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică $\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $B = \frac{\pi}{4}$.

Observaţie. Într-un triunghi oarecare are loc $\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq \frac{5}{2}$, iar semnul de egalitate apare numai pentru triunghiuri echilaterale [**1**].

Problema 2 [**4**]. *Fie $ABCD$ un pătrat înscris într-un cerc şi P un punct pe arcul (mic) $\widehat{AB}$. Determinaţi minimul expresiei $\frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PB}$.*

Soluţie. Notăm cu O centrul cercului şi considerăm raza lui egală cu 1. Fie $t = m(\widehat{AOP}) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $M = pr_{AC}P$, $N = pr_{BD}P$. Evident, $OM = NP = \cos t$ şi $ON = MP = \sin t$. Cu teorema lui Pitagora, obţinem:



$PC^2 = (1 + \cos t)^2 + \sin^2 t$, deci $PC = 2\cos\frac{t}{2}$;

$PD^2 = (1 + \sin t)^2 + \cos^2 t$, deci $PD = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)$;

$PA^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t$, deci $PA = 2\sin\frac{t}{2}$;

$PB^2 = (1 - \sin t)^2 + \cos^2 t$, deci $PB = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)$.

Pentru raportul din enunţul problemei obţinem:

$$f(t) = \frac{\cos\frac{t}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{t}{2}}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Punând f în forma $f(t) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}$, deducem uşor că $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = f(t)$, $\forall t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Pentru a arăta că f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, punem f în forma $f = h \circ g$, unde

$$g(t) = \operatorname{tg}\frac{t}{2}, \ \ t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right],$$
$$h(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1+x}{1-x}, \ \ x \in (0, \sqrt{2}-1];$$

într-adevăr, g este strict crescătoare pe $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ şi ia valori în $\left(0, \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}\right) \equiv (0, \sqrt{2}-1]$, pe când h este strict descrescătoare pe $(0, \sqrt{2}-1]$ (fapt ce se stabileşte cu sau fără utilizarea derivatei).

Conform Lemei 1, avem $f(t) \geq f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, cu semnul egal numai pentru $t = \dfrac{\pi}{4}$. Deci,

$$\frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PB} \geq \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} = 3 + 2\sqrt{2},$$

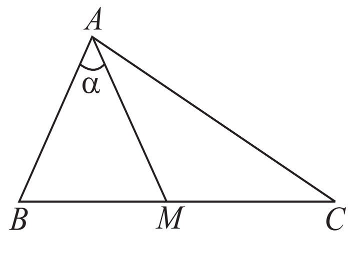
iar valoarea $3+2\sqrt{2}$ este luată de raport dacă şi numai dacă punctul P este mijlocul arcului $\overset{\frown}{AB}$.

Problema 3. *Fie ABC un triunghi oarecare şi punctul $M \in (BC)$. Determinaţi poziţia lui M pentru care funcţia*

$$F(M) = \frac{AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2}{BC^2 \cdot MA^2}$$

are valoare extremă.

Soluţie. Punctul M are poziţia precizată de $\alpha = m(\widehat{MAB})$. Cu teorema sinusurilor, avem: $MA = \dfrac{c\sin B}{\sin M}$, $MB = \dfrac{c\sin\alpha}{\sin M}$ şi $MC = \dfrac{b\sin(A-\alpha)}{\sin M}$. Ca urmare, obţinem:



$$F(\alpha) = \frac{b^2c^2\sin^2(A-\alpha) + b^2c^2\sin^2\alpha}{a^2c^2\sin^2 B} =$$
$$= \frac{1}{\sin^2 A}[\sin^2\alpha + \sin^2(A-\alpha)]$$

şi apoi, utilizând formula $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$, vom avea:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sin^2 A}[1 - \cos A \cdot \cos(A-2\alpha)], \ \ \alpha \in (0, A).$$

Se arată uşor că $F(A-\alpha) = F(\alpha)$, $\alpha \in (0, A)$. În privinţa monotoniei funcţiei F pe intervalul $\left(0, \dfrac{A}{2}\right]$ distingem cazurile:

Dacă $A < \dfrac{\pi}{2}$, atunci $\cos A > 0$ şi deducem că F este strict descrescătoare pe $\left(0, \dfrac{A}{2}\right]$. Aplicând Lema 1 adaptată la intervalul $\left(0, \dfrac{A}{2}\right]$, rezultă că $F(\alpha) \geq F\left(\dfrac{A}{2}\right)$, $\alpha \in (0, A)$. Prin urmare, dacă unghiul A este ascuţit, atunci funcţia F are un minim când M este piciorul bisectoarei unghiului A şi valoarea acestuia este $\dfrac{1}{1+\cos A}$.

Dacă $A > \dfrac{\pi}{2}$, funcţia F este strict crescătoare pe $\left(0, \dfrac{A}{2}\right]$ şi vom avea $F(\alpha) \leq F\left(\dfrac{A}{2}\right)$, $\alpha \in (0, A)$. Deci, dacă triunghiul este obtuzunghic în A, funcţia F are un maxim egal cu $\dfrac{1}{1+\cos A}$ în piciorul bisectoarei din A şi numai în acest punct.

Dacă $A = \dfrac{\pi}{2}$, se constată direct că $F(\alpha) = 1$, $\alpha \in (0, A)$, adică F este o funcţie constantă. Aşadar, dacă un triunghi ABC este dreptunghic în A, atunci pentru orice $M \in (BC)$ are loc relaţia $AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 = BC^2 \cdot MA^2$ (teorema lui Van Aubel) ([**2**], p. 51).

Problema 4 ([**3**], p.30). *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi D piciorul înălţimii din vârful A. Notăm cu I_1 şi I_2 incentrele triugnhiurilor ADB, respectiv ADC şi cu M, N proiecţiile lor pe AB, respectiv AC. Dacă I_1M şi I_2N se intersectează pe BC, atunci triunghiul ABC este dreptunghic în A.*

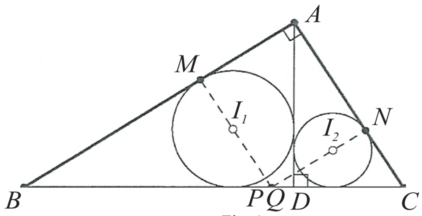


Fig. 1

Soluţie. Notăm cu P, Q intersecţiile dreptelor I_1M, respectiv I_2N cu BC. Din $I_1M \perp AB$ şi $I_2N \perp AC$ rezultă că

$$BP = \frac{BM}{\cos B} = \frac{AB + BD - AD}{2\cos B} = \frac{c(1+\cos B - \sin B)}{2\cos B},$$
$$CQ = \frac{CN}{\cos C} = \frac{AC + CD - AD}{2\cos B} = \frac{b(1+\cos C - \sin C)}{2\cos C}.$$

Condiţia din enunţul problemei revine la $BP + CQ = a$ şi se scrie

$$\frac{\sin C(1+\cos B - \sin B)}{2\cos B} + \frac{\sin B(1+\cos C - \sin C)}{2\cos C} = \sin A$$

sau, ţinând seama de relaţia $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$,

$$\sin C\left(\frac{1+\cos B - \sin B}{2\cos B} - \cos B\right) + \sin B\left(\frac{1+\cos C - \sin C}{2\cos C} - \cos C\right) = 0.$$

sau, în final,

$$\frac{\cos B - \sin B - \cos 2B}{2\sin B\cos B} + \frac{\cos C - \sin C - \cos 2C}{2\sin C\cos C} = 0.$$

Această condiţie se scrie sub forma

$$(*) \qquad f(B) + f(C) = 0, \quad B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

unde $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$f(t) = \frac{\cos t - \sin t - \cos 2t}{2 \sin t \cos t}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Observăm că $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ şi că $f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -f(t)$ sau $f(t) + f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 0$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică punctul $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ este centru de simetrie pentru graficul funcţiei f. Dacă scriem f sub forma

$$f(t) = \frac{1}{2\cos t}\left(\frac{\sin \frac{3t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} - 1\right), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

şi observăm că ambii factori sunt funcţii strict crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, deducem că f este strict crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Conform Lemei 2, ecuaţia $(*)$ admite numai soluţiile $B = t$, $C = \frac{\pi}{2} - t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică B şi C sunt complementare şi, deci, triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Observaţie. Soluţiile date pe baza procedeului propus diferă de cele aflate în sursele indicate în bibliografie.

Sugerăm cititorilor să rezolve cu acest procedeu problemele următoare:

1. Arătaţi că într-un triunghi dreptunghic, cu $A = \frac{\pi}{2}$, au loc inegalităţile:

(i) $\frac{R}{p} + \frac{p}{R} \leq 2\sqrt{2}$;

(ii) $\frac{r_a}{r} + \frac{r}{r_a} \geq 6$.

În ce condiţii aceste relaţii devin egalităţi?

2. Fie ABC un triunghi oarecare şi M un punct pe latura BC. Să se determine valorile extreme ale funcţiei

$$F(M) = \frac{AB \cdot MC + AC \cdot MB}{BC \cdot MA}, \quad M \in (BC).$$

Bibliografie

1. **L. Bankoff** – *Problema Q417*, Math. Mag., 40 (1967), 289; **D.S. Mitrinović** et al – *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publisher, 1988, 165.
2. **D. Brânzei** et al. – *Geometrie. Clasa a IX-a*, ed. a III-a, Paralela 45, Piteşti, 1998.
3. **A.G. Brojbeanu** – *Câteva proprietăţi remarcabile ale triunghiului dreptunghic*, Recreaţii Matematice, 1/2014, 30-34.
4. **P. Ligouras** – *Problem J286*, Mathematical Reflections, 6/2013.
5. **D. Milošević** – *Problem 3767*, Crux Mathematicorum, 7/2012.

De la o problemă de pe forum la conjectura funcţiilor continue care comută

Valeriu BRAŞOVEANU, Marian TETIVA [1]

Abstract. The article provides a mathematical story about how one can get from a simple problem to more and more complicated and deeper issues, concerning fixed points of continuous and monotonic functions. We lead the reader from well-known results as Knaster′s or Brouwer′s theorems to less known and more subtle results as the conjecture of commuting continuous functions.

Keywords: fixed point, continuous function, monotonic function, commuting functions, Knaster′s theorem.

MSC 2010: 47H10, 54H25.

1. Preliminarii. *Teorema de punct fix a lui Brouwer* ([**5**], dar se poate consulta cu succes şi Wikipedia) ne spune că *orice funcţie continuă definită pe o bilă închisă din spaţiul euclidian* $\mathbb{R}^n$ *cu valori în aceeaşi bilă are (măcar) un punct fix.* Cazul particular al acestei teoreme în dimensiunea 1 ne este tuturor bine cunoscut (aici şi mai departe a şi b sunt numere reale cu $a < b$; se poate şi $a = b$, dar nu e foarte interesant):

Propoziţia 1. *Dacă* $f : [a, b] \to [a, b]$ *este o funcţie continuă, atunci există* $c \in [a, b]$ *astfel încât* $f(c) = c$.

Demonstraţie. Aplicând proprietatea lui Darboux funcţiei continue h definită prin $h(x) = f(x) - x$, $\forall x \in [a, b]$, pentru care avem $h(a) \geq 0$ şi $h(b) \leq 0$, rezultă existenţa unui $c \in [a, b]$ cu proprietatea $h(c) = 0$, adică rezultă existenţa unui punct fix pentru f.

Se mai poate uşor observa că, de fapt, nu e nevoie ca funcţia să ia valori în intervalul $[a, b]$: e suficient să avem $f(a) \geq a$ şi $f(b) \leq b$ - şi se poate şi invers -, astfel că e valabil următorul enunţ:

Propoziţia 1′. *Dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pentru care* $f(a) \geq a$ *şi* $f(b) \leq b$*, atunci există* $c \in [a, b]$ *astfel încât* $f(c) = c$. *De asemenea, dacă* $f(a) \leq a$ *şi* $f(b) \geq b$*, atunci există* $c \in [a, b]$ *astfel încât* $f(c) = c$.

O întrebare naturală se pune: există oare o teoremă de acest tip şi pentru alte clase de funcţii? Şi tot în mod natural ne îndreptăm gândul către funcţiile monotone. Exemplul funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} a + b - x, & a \leq x < \dfrac{a+b}{2} \\ a, & \dfrac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$$

ne descurajează imediat în privinţa funcţiilor descrescătoare (f ia valori în $[a, b]$, este descrescătoare şi nu are nici un punct fix; o uşoară modificare a lui f poate furniza

[1] Profesori, Colegiul Naţional ,,Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

şi un exemplu de asemenea funcţie *strict* descrescătoare). Totuşi, avem următorul rezultat (poate mai puţin cunoscut decât Propoziţia 1, dar suficient de cunoscut):

Propoziţia 2. *Dacă* $f : [a, b] \to [a, b]$ *este o funcţie monoton crescătoare, atunci* f *are (măcar) un punct fix.*

Demonstraţie. Fie M mulţimea acelor x din $[a, b]$ pentru care $x \leq f(x)$. Avem $a \in M$, deci M este nevidă şi, desigur, ea este şi mărginită, fiind inclusă în intervalul compact $[a, b]$. Dacă $s = \sup M$, rezultă în mod clar că $s \in [a, b]$. De asemenea, se vede uşor că $x \in M$ implică $f(x) \in M$ (datorită monotoniei funcţiei f, $x \leq f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(f(x))$). Cum $x \leq s$ pentru orice $x \in M$, avem şi $x \leq f(x) \leq f(s)$, pentru orice $x \in M$, deci $s \leq f(s)$ ($f(s)$ fiind cel puţin egal cu orice element din M trebuie să fie cel puţin egal şi cu marginea superioară a acestei mulţimi). Asta ne arată că s este el însuşi un element al mulţimii M, deci $f(s) \in M$ şi atunci $f(s) \leq \sup M = s$. Dar $s \leq f(s)$ şi $f(s) \leq s$ înseamnă că $f(s) = s$, deci s este punct fix pentru f, încheind demonstraţia.

Exerciţiu. Demonstraţi în mod analog că infimumul mulţimii $N = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq x\}$ *este punct fix pentru* f. (Ceea ce - atenţie! - nu înseamnă că ar fi asigurată existenţa a două puncte fixe pentru f în condiţiile enunţului, ci doar că avem două variante de demonstraţie.)

Observaţie. Putem numi Propoziţia 2 teorema lui Knaster, deşi ea nu reprezintă decât un caz particular al acestei teoreme. De fapt, în cazul general, ea se numeşte *teorema Knaster-Tarski* şi se enunţă în termeni de teoria laticelor: *dacă* L *este o latice completă şi* $f : L \to L$ *este o funcţie care păstrează ordinea (putem să o numim tot funcţie crescătoare), atunci mulţimea punctelor fixe ale lui* f *formează, de asemenea, o latice completă.* În particular, rezultă că această mulţime este nevidă, deci că f admite puncte fixe. Nu intrăm în aceste amănunte (pentru cei interesaţi articolul de pe Wikipedia e destul de riguros şi detaliat), dar vă propunem următorul

Exerciţiu. Fie E *o mulţime nevidă,* $P(E)$ *mulţimea părţilor lui* E *şi* $f : E \to E$ *o funcţie crescătoare, adică o funcţie cu proprietatea că* $f(X) \subseteq f(Y)$*, pentru orice* $X, Y \in P(E)$ *cu* $X \subseteq Y$*. Există atunci* $C \in P(E)$ *astfel încât* $f(C) = C$*.*

Se pare că aceasta a fost forma în care Knaster a demonstrat iniţial teorema în 1928 (forma generală fiind publicată abia în 1955). În zilele noastre ea a apărut (şi probabil va mai apărea o vreme) pe la diverse concursuri de matematică pentru elevi.

O frumoasă legătură între propoziţiile enunţate anterior a făcut **Sebastian Aniţa** [**2**] , anume:

Propoziţia 3. *Fie* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă cu* $g(a) \leq g(b)$ *şi* $f : [a, b] \to [g(a), g(b)]$ *o funcţie crescătoare. Atunci există* $c \in [a, b]$ *astfel încât* $f(c) = g(c)$*.*

Demonstraţie. În spiritul demonstraţiei Propoziţiei 2 (care se obţine din Propoziţia 3 pentru $g(x) = x$; iar pentru $f(x) = x$ obţinem partea a doua a Propoziţiei $1'$), să considerăm mulţimea

$$M = \{x \in [a, b] \mid g(x) \leq f(x)\}$$

şi $s = \sup M$. (Observaţi că, totuşi, demonstraţia de mai sus a Propoziţiei 2 nu funcţionează prin analogie şi pentru Propoziţia 3. Ipoteza continuităţii funcţiei g, coroborată cu - doar - monotonia lui f solicită utilizarea unui instrument care să funcţioneze pentru amândouă; e vorba despre trecerea la limită.) Mulţimea M este nevidă ($a \in M$) şi există un şir (s_n) de elemente din M care are limita s; pentru fiecare $s_n \in M$ avem, desigur, $g(s_n) \leq f(s_n)$, deci prin trecere la limită obţinem

$$g(s) = \lim_{n\to\infty} g(s_n) \leq \lim_{n\to\infty} f(s_n) = \lim_{x\to s,\ x<s} f(x) \leq f(s)$$

(funcţia f fiind crescătoare are limite laterale în s, limita la stânga fiind cel mult egală cu valoarea funcţiei acolo). Dacă $s = b$ demonstraţia este încheiată, căci am obţinut $g(b) \leq f(b)$, iar enunţul ne spune că $f(b) \leq g(b)$, aşadar se poate considera $c = b$. Altminteri avem $g(x) > f(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, $x > s$ (un asemenea x nu aparţine mulţimii M), deci, iarăşi prin trecere la limită, avem

$$g(s) = \lim_{x\to s,\ x>s} g(x) \geq \lim_{x\to s,\ x>s} f(x) \geq f(s).$$

Se obţine deci şi în acest caz că $g(s) \leq f(s)$ şi $f(s) \leq g(s)$, adică $f(s) = g(s)$ şi putem lua $c = s$.

O demonstraţie elegantă, care utilizează lema intervalelor închise incluse, poate fi găsită în [**8**], la paginile 228-230.

Exerciţiu. Arătaţi că există $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuă şi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *crescătoare, cu* $f(a) < g(a)$ *şi* $f(b) > g(b)$*, astfel încât* $f(x) \neq g(x)$ *pentru orice* $x \in [a, b]$. Dacă dorim, putem impune şi condiţii asupra codomeniului lui g, şi tot vom putea găsi destul de uşor asemenea exemple. În schimb nu mai e necesară condiţia în privinţa ordinii între $g(a)$ şi $g(b)$.

2. Care este, de fapt, problema? Problema ni s-a arătat pe un forum de discuţii matematice (TheMathForum@Drexel, 12 august 2008), iar în această notă intenţionăm să explicăm cam cum am gândit pornind de la ea, în speranţa că le va fi de folos şi altora. Ea suna cam aşa:

Exerciţiu. Fie f *şi* g *două funcţii continue pe* $[0, 1]$ *astfel încât* $f([0, 1]) = g([0, 1]) = [0, 1]$*,* f *şi* g *comută (adică* $f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in [0, 1]$*), iar* f *este strict crescătoare. Să se arate că există un* $x_0 \in [0, 1]$ *astfel încât* $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

De la bun început se pare că sunt prea multe condiţii. Având în minte toate rezultatele din preliminarii, ne dăm repede seama că se poate renunţa la unele dintre ele. De exemplu, ştim că f are un punct fix, să-l numim c. Condiţia de comutativitate ne spune că $f(g(c)) = g(f(c))$, adică $f(g(c)) = g(c)$ (pentru că $f(c) = c$), cu alte cuvinte ne spune că şi $g(c)$ este punct fix pentru f. Astfel am obţinut fără mare efort următorul rezultat a cărui demonstraţie cititorul o va completa cu uşurinţă:

Propoziţia 4. *Fie* $f : [a, b] \to [a, b]$ *o funcţie continuă care are un singur punct fix în intervalul* $[a, b]$ *şi* $g : [a, b] \to [a, b]$ *o funcţie care comută cu* f*. Atunci* f *şi* g *au un punct fix comun.*

Se prea poate ca propunătorul problemei de pe forum să fi avut în vedere şi un asemenea enunţ. Se vede că am renunţat la multe dintre condiţiile date iniţial, dar cu preţul adăugării unei alte condiţii suficient de restrictive pentru f. Chiar şi aşa, bănuiala că în problema originală ipoteza este supraaglomerată rămâne. Rafinând puţin raţionamentul de mai sus, vedem că putem arăta (ceva mai elaborat) şi

Propoziţia 5. *Fie $f, g : [a, b] \to [a, b]$ funcţii continue care comută şi astfel încât una dintre ele este crescătoare. Atunci f şi g au un punct fix comun.*

Demonstraţie. Să presupunem că g este funcţia despre care ştim că e crescătoare. Există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$ (conform Propoziţiei 1), iar folosind condiţia $g \circ f = f \circ g$ obţinem (ca mai sus) că $g(c)$ este de asemenea punct fix pentru f. Analog obţinem că $g^{[n]}(c)$ este punct fix pentru f oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, unde $g^{[n]} = g \circ \cdots \circ g$ este a n-a iterată a lui g.

Să presupunem, de exemplu, că avem $c \leq g(c)$. Folosind monotonia funcţiei g, rezultă $c \leq g(c) \leq g^{[2]}(c) \leq \cdots$, adică rezultă că şirul $(g^{[n]}(c))_{n\geq 1}$ este crescător. De asemenea, acest şir este şi mărginit (toţi termenii săi sunt în intervalul $[a, b]$), deci el are o limită $l \in [a, b]$. Prin trecere la limită în relaţia $g(g^{[n]}(c)) = g^{[n+1]}(c)$ rezultă că $g(l) = l$, iar prin trecere la limită în $f(g^{[n]}(c)) = g^{[n]}(c)$ rezultă $f(l) = l$ (desigur, continuitatea funcţiilor f şi g este esenţială în aceste treceri la limită). Prin urmare limita l a şirului $(g^{[n]}(c))_{n\geq 1}$ este un punct fix comun pentru f şi g. Demonstraţia se încheie dacă mai observăm că în cazul $g(c) \leq c$ se poate proceda absolut analog.

Dacă aţi încercat să rezolvaţi problema originală se poate să fi fost conduşi pe o pistă falsă de condiţiile (vedem acum că inutile) $f([0, 1]) = g([0, 1]) = [0, 1]$. (Noi bănuim că autorul a vrut să spună doar că f şi g au valori în $[0, 1]$.) De asemenea, faptul că monotonia unei funcţii este strictă nu pare a fi important. Astfel că, ajunşi aici, simţind cumva că am repurtat o mică victorie, am trăit o vreme cu impresia că vom putea modifica (nu prea mult, credeam noi) raţionamentul astfel încât să putem obţine concluzia şi fără ipoteza monotoniei uneia dintre funcţii. Totuşi, asta s-a dovedit o fundătură; deşi avem în continuare şirul $(g^{[n]}(c))_{n\geq 1}$ de puncte fixe ale funcţiei f, şi putem deduce că el are un subşir convergent (fiind mărginit), asupra acestui subşir nu mai avem nici un control. Putem arăta şi acum că limita acestui subşir este punct fix pentru f, dar nu avem nici o şansă să obţinem rezultatul similar pentru g. Nu putem nici măcar să arătăm că această limită este ceea ce se numeşte un *punct periodic* pentru g, adică un punct fix al unei anumite funcţii $g^{[k]}$, $k \in \mathbb{N}^*$. E drept că repetând cumva raţionamentul din Propoziţia 2, putem demonstra

Propoziţia 5′. *Fie $f, g : [a, b] \to [a, b]$ două funcţii care comută astfel încât g este crescătoare şi mulţimea F a punctelor fixe ale lui f are proprietatea că supremumul oricărei submulţimi a lui F aparţine, de asemenea, lui F. Atunci f şi g au un punct fix comun.*

În esenţă este vorba de argumentul din demonstraţia Propoziţiei 2 (cazul particular al teoremei Knaster-Tarski), aplicat funcţiei g definită pe mulţimea punctelor fixe ale lui f. Pare să fie un enunţ foarte general (şi este) dar e greu să obţii de aici prea multe cazuri particulare interesante.

Ne aflam într-un impas: părea că ne scapă nouă ceva, şi chiar aşa era - dar nu în sensul în care credeam noi.

A fost momentul în care am descoperit câteva articole [**1**,**3**,**4**,**6**,**7**] (toate se găsesc pe Internet la îndemâna oricui) în care era vorba despre *conjectura funcţiilor continue care comută*, formulată de către **Eldon Dyer** în 1954, **A. J. Shields** în 1955 şi **Lester Dubins** în 1956. Aceasta postula că *două funcţii* $f, g : [a, b] \to [a, b]$ *continue şi care comută au un punct fix comun.* Se ştia încă de pe la 1920 că rezultatul este adevărat pentru funcţii polinomiale (**J. F. Ritt**), iar **A. J. Schwartz** reuşise să demonstreze [**6**] că două asemenea funcţii dintre care una este derivabilă cu derivata continuă au cu siguranţă un punct periodic comun (mai precis, dacă f este derivabilă cu derivata continuă, există un $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $x_0 = f(x_0) = g^{[m]}(x_0)$ pentru un anumit număr natural $m \geq 1$). Totuşi, în 1969, **William M. Boyce** [**3**] şi **John Hunecke** [**4**] au reuşit să construiască exemple de funcţii continue care comută şi nu au puncte fixe comune, infirmând definitiv conjectura. De asemenea, în cel mai recent articol [**7**] (din 1999) pe care l-am găsit pe această temă se spune că e mai degrabă plauzibil să *nu* fie asigurată (în general, pentru funcţii doar continue) nici măcar existenţa punctelor periodice comune, dar un contraexemplu nu era cunoscut atunci.

Toate demonstraţiile (şi exemplele ce contrazic conjectura) sunt cu mult peste nivelul acestei expuneri, iată deci că nu aveam nici o şansă de a rezolva problema fără a citi despre ea. Aşa că ne-am gândit la alte sensuri în care problema ar mai putea fi studiată, de exemplu pentru alte clase de funcţii. Cel mai natural este să ne întrebăm ce se întâmplă pentru funcţiile monotone.

Exerciţiu. Arătaţi că există funcţii $f, g : [a, b] \to [a, b]$ *care sunt monotone şi care comută, dar nu au puncte fixe comune.*

Gândiţi-vă să alegeţi cel puţin una dintre funcţii descrescătoare, pentru că altminteri avem

Propoziţia 6. *Dacă* $f, g : [a, b] \to [a, b]$ *sunt funcţii crescătoare care comută, atunci ele au cel puţin un punct fix comun.*

Demonstraţie. Revenim la ideea din demonstraţia Propoziţiei 2 (sau din demonstraţia teoremei generale Knaster-Tarski). Anume, să considerăm mulţimea

$$M = \{x \in [a, b] \mid x \leq f(x) \text{ şi } x \leq g(x)\},$$

care este nevidă ($a \in M$) şi mărginită. Fie $s = \sup M$; desigur, $s \in [a, b]$.

Observăm că, dacă $x \in M$, avem $f(x) \in M$ şi $g(x) \in M$. De exemplu, $x \leq f(x) \Rightarrow g(x) \leq g(f(x)) = f(g(x))$ şi $x \leq g(x) \Rightarrow g(x) \leq g(g(x))$, astfel că $g(x) \in M$.

Apoi avem $x \leq f(x) \leq f(s)$ pentru orice $x \in M$ şi, analog, $x \leq g(x) \leq g(s)$ pentru orice $x \in M$, ceea ce implică $s \leq f(s)$ şi $s \leq g(s)$. Cu alte cuvinte, $s \in M$ şi atunci, pe baza primei observaţii, $f(s) \in M$ şi $g(s) \in M$. Dar asta înseamnă că $f(s) \leq s$ şi $g(s) \leq s$, adică, finalmente, $f(s) = g(s) = s$ - punctul s este un punct fix comun pentru f şi g - şi demonstraţia este încheiată.

3. Concluzii şi teme. Nu ne-am propus în această notă să demonstrăm ceva nou, sau să găsim o demonstraţie neaşteptată pentru vreun rezultat mai vechi. Ne-am propus, în schimb, să trecem în revistă câteva teoreme (zicem noi) elegante de punct fix, aşa cum ne-au venit în minte pe parcursul încercărilor de a rezolva o problemă - de fapt, nu numai de a o rezolva, dar şi de a gândi pe marginea ei, de a o generaliza, extinde, sau măcar de a vedea la ce rezultate asemănătoare ar mai putea ea să conducă. Cititorul poate observa că, lucrând la această problemă - în sensul menţionat -, ne-am amintit lucruri pe care le ştiam şi, de asemenea, am aflat lucruri despre care nu auziserăm mai înainte. Aşa se întâmplă de fiecare dată când ascultăm cu atenţie întrebările altora - acestea vor conduce la propriile noastre întrebări, iar unele dintre aceste întrebări vor primi răspunsuri, altele vor rămâne misterioase - cel puţin deocamdată şi, negreşit, altele nu vor fi prea interesante şi nu vor duce nicăieri (totuşi e nevoie şi de acestea).

Încheiem cu încă vreo câteva întrebări pentru cititorii interesaţi.

Exerciţiu. Unde se foloseşte, în Propoziţia 2, sau în Propoziţia 6, faptul că funcţiile au valori tot în intervalul $[a, b]$? (Nu e greu să ne dăm seama că lipsa acestei condiţii din ipoteză afectează validitatea concluziei.)

Exerciţiu. Demonstraţi Propoziţia 5′ şi formulaţi cazuri particulare interesante.

Exerciţiu. Puteţi extinde Propoziţia 6 la un număr oarecare de funcţii? Cum? Dar pentru o infinitate de funcţii?

Exerciţiu. Fie $f, g : [a, b] \to [a, b]$ două funcţii continue cu proprietatea că $(f(x) - x)(g(x) - x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Să se arate că f şi g au un punct fix comun. Mai rămâne valabilă concluzia dacă (păstrând ipoteza de continuitate) presupunem că $(f(x) - x)(g(x) - x) \leq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$?

Exerciţiu. Dacă $f, g : [a, b] \to [a, b]$ sunt două funcţii crescătoare care comută şi $f^{[n]} = g^{[n]}$ pentru un anume $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $f = g$.

Exerciţiu. Un foarte frumos rezultat despre punctele periodice ale unei funcţii continue (şi o splendidă realizare a analizei reale de la finele secolului al XX-lea) este teorema lui Şarkovski. Citiţi despre această teoremă!

Ultimele două exerciţii par să nu aibă legătură cu textul; dar, nu se poate spune la prima vedere dacă două rezultate au sau nu legătură. Surprize apar mereu.

Bibliografie

1. **A. Alikhani-Koopaei** – *On common fixed and periodic points of commuting functions*, Internat. J. Math. & Math. Sci., 21(1998),2, 269-276.
2. **S. Aniţa** – *Problema C:286*, GM 2/1983, p. 95.
3. **W.M. Boyce** – *Commuting Functions with no Common Fixed Point*, Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969), 77-92.
4. **J.P. Huneke** – *On Common Fixed Points of Commuting Continuous Functions on an Interval*, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 371-381.
5. **M. Rădulescu, S. Rădulescu** – *Teoreme şi probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
6. **A.J. Schwartz** – *Common periodic points of commuting functions*, Michigan Math. J., 12(1965), 353-355.
7. **T.H. Steele** – *A note on periodic points and commuting functions*, Real Analysis Exchange, vol. 24(2), 1998/9, pp 781-790.
8. **N. Teodorescu & al** – *Probleme din Gazeta Matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.

DIN ISTORIA MATEMATICII

Gazeta Matematică în anii Primului Război Mondial

Evenimentele din primul război mondial au fost puternic resimţite de **Societatea ,,Gazeta Matematică"** şi membrii ei au făcut mari eforturi pentru a continua cea mai îndrăgită publicaţie românească de matematică.

În perioada de neutralitate a României (aug. 1914 - aug. 1916), tipărirea revistei **Gazeta Matematică** şi toate activităţile Societăţii au decurs în mod normal. Numerele de revistă aveau în mod constant 40 de pagini, apăreau cu regularitate în fiecare lună la data de 15 şi cuprindeau rubricele: articole, note matematice, chestiuni de examen, probleme rezolvate, exerciţii şi probleme propuse ş.a. Volumele sunt alcătuite din 12 numere şi corespund unui an de studiu din învăţământul public (15 sept.-15 aug.). Încep cu *Lista membrilor Societăţii* şi se încheie cu o amplă *Tablă de materii* ce ordonează materialul publicat în anul respectiv, cu o grijă aparte pentru listele de probleme propuse, rezolvate şi rezolvitori.

Manuscrisele se primeau acasă la ing. *Mihail A. Saligny* (fiul lui Anghel Saligny) în strada Occident nr. 10, Bucureşti, iar pentru schimburile de reviste, alte chestiuni, se folosea adresa ing. *I. Ionescu*, str. Căluşei nr. 23, Bucureşti. De remarcat că aceste schimburi şi contacte internaţionale includeau, de-a lungul timpului, revistele *Educational Times, The Mathematical Gazette* (Londra), *Mathésis* (Belgia), *Supplemento al Periodico di Matematica* (Livorno), *Revista Societăţii Fizico-Matematice* (Sofia), *Bulletin de la Section Scientifique de l'Academie Roumaine*, *Gazeta Matematică* (Rusia), *Bulletin of the American Mathematical Society.* Un colaborator asiduu al Gazetei Matematice, cu multe note publicate (în franceză), era *N. Agromof* din Revel (azi Tallinn), Rusia. Tipografia Curţii Regale, F. Göbl Fii, str. Regală, nr.19, a fost utilizată până în decembrie 1915, apoi s-a folosit tipografia ,,Cooperativa", str. Belvedere nr.6.

În fiecare număr de revistă, problemele rezolvate ocupă un spaţiu larg; după prezentarea soluţiilor se indică numele rezolvitorilor şi se dau adesea mai multe soluţii. Printre rezolvitori, propunători de probleme şi autori de note matematice găsim numele unor viitori iluştri matematicieni români: *Al. Pantazi, O. Mayer, P. Sergescu, M. Ghermănescu* ş.a.

Pe lângă rubricile amintite, revista îşi deschidea paginile şi pentru a semnala cititorilor activităţile desfăşurate de Societate sau unele evenimente importante. Astfel, *Concursurile Gazetei Matematice* din anii 1915 şi 1916 sunt relatate pe larg, cu toate etapele de desfăşurare: probele scrise şi oralul, rezultatele şi premiaţii (raportor *Gh. Ţiţeica*), banchetul tradiţional. În aceeaşi ordine de idei, menţionăm: constituirea *Fondului ,,Anghel Saligny"* destinat tipăririi de cărţi cu caracter tehnic, acordarea *Premiilor ,,H. Capriel"* etc.

În numărul din octombrie 1914 (nr.2, An XX) este anunţată moartea *Regelui Carol I.* Societatea ,,Gazeta Matematică" , care s-a bucurat pe parcursul anilor de atenţia Regelui, se alătură prin membrii şi colaboratorii săi la doliul naţional. (La expoziţia din 1903, Gazeta Matematică a fost distinsă cu Medalia de Aur, iar Regele Carol I s-a interesat de revistă şi a primit în audienţă pe Gh. Ţiţeica, care i-a prezentat toate volumele apărute de Gazetă.)

Se publică numeroase texte privind istoria matematicii româneşti. Un articol remarcabil din ianuarie 1916 (nr.5, An XXI), este cel închinat de *Traian Lalescu* memoriei lui *N. Culianu*, matematician, fost rector al Universităţii din Iaşi, junimist, participant activ pe o perioadă de aproape cinci decenii la viaţa culturală, la modernizarea societăţii din capitala moldavă. În acelaşi număr, sub semnătura lui *I. Ionescu*, apare articolul *Matematica în Regulamentul Organic.*

Începând cu primul număr al Anului XXI, după modelul revistei engleze The Mathematical Gazette se introduce mini-rubrica *Cereri*, animată de *I. Ionescu.* Aici se pun întrebări sau se solicită informaţii relativ la istoricul, studiul sau învăţământul matematicilor în general, dar mai ales din ţara noastră, cu un conţinut foarte divers: date privind unele cărţi vechi de matematică, echivalentul unor unităţi de măsură care apar în documente vechi, priorităţi etc.

Se publică de asemenea suplimente cu *Recreaţiuni*, de exemplu, în februarie 1916, tema este matematica şi literatura, cu numeroase citate din V. Alecsandri legate şi de matematică.

Ultimul număr înainte de refugiu (nr.3, An XXII) a apărut în noiembrie 1916 la tipografia ,,Universală" din str. Covaci nr.14, dar membrii societăţii, aflaţi deja la Iaşi, nu au ştiut de asta multă vreme, conform menţiunii de pe coperta nr. 10-12, An XXII referitoare la necunoaşterea cuprinsului acestui număr.

Din iniţiativa lui *Ion Ionescu* şi *Traian Lalescu* şi cu sprijinul lui *Vasile Teodoreanu* (profesor la Liceul Naţional şi Liceul Militar din Iaşi) şi altor membri din redacţie aflaţi în refugiu, Gazeta Matematică şi-a reluat apariţia la Iaşi. Societatea ,,Gazeta Matematică" a obţinut dreptul de a trimite colaboratorilor aflaţi pe front numerele revistei. Manuscrisele trebuiau trimise la prof. univ. *Traian Lalescu* la Cenzura Militară Telegrafică Iaşi, iar pentru abonamente şi orice alte chestiuni adresa era prof. *Gh. Nichifor* la Cenzura Miltară Poştală Iaşi. Organizarea progresa: în nr.7 (martie 1917) adresa pentru manuscrise era prof. *Vasile Teodoreanu*, str. Săulescu nr.8., iar din februarie 1918, pentru abonamente şi alte chestiuni, adresa era prof. *Gh. Nichifor*, str. Vulpei nr. 5, apoi ing. *C. Orăşanu*, str. Cuza Vodă 71 (din mai 1918). Primul număr publicat în Iaşi a fost nr.4, An XXII, numărul pentru luna decembrie 1916, dar care a apărut doar în aprilie din anul următor şi numai în 24 de pagini, la tipografia H. Goldner, str. Gh. Mârzescu. Aceasta întârziere şi numerele duble sau triple se propagă până în 1920, mult după revenirea la Bucureşti. Să notăm stabilitatea preţului (7,5 lei abonamentul anual), până la vol. XXIV, când devine 15 lei pe an, apoi 20 lei pe an la vol. XXVI, în 1920.

Pe prima pagină a nr.4, primul scos în condiţii de refugiu, se află un emoţionant *Cuvânt înainte*, redactat de *Traian Lalescu*, pe care-l redăm (în ortografia originală) mai jos:

In momentele grele pe cari le trăeşte astăzi poporul românesc, Gazeta Matematică împărtăşeşte soarta ţării sale: împiedicată de a apăreà în Bucureşti din causa ocupării provizorii a primei noastre capitale, Societatea şi-a putut reface aci organizarea nece-

sară pentru a publicà mai departe Gazeta Matematică pe tot timpul cât va durà adversitatea noastră.

Avem mulţumirea să spunem că revista noastră îşi datorează apariţia sa în Iaşi, în primul rând solicitării şi zelului colaboratorilor noştri. Căldura cu care câţi-va dintre cei mai buni corespondenţi ai Gazetei – aflători astăzi în rândurile oştirei – au oferit serviciile lor, a fost pentru redacţiunea Gazetei Matematice, o răsplată şi o adâncă mângăere sufletească. Ea ne-a arătat că activitatea educativă a Societăţei noastre, a trecut mai departe de ţinta sa profesională; ea a isbutit să-şi creeze din fiecare colaborator un prieten care se simte fericit să contribue cu munca sa desinteresată la prosperitatea Gazetei.

Din cauza greutăţilor de tipărire, numerele de exil ale Gazetei vor avea un coprins mai redus*, fără ca prin aceasta să fim obligaţi a renunţa la vreuna din rubricele noastre obişnuite.*

Dar să ne exprimăm speranţa că revista noastră va urma până la urmă soarta ţării sale şi că, după această vremelnică comprimare, vom putea să dăm şi noi Gazetei Matematice, estinderea potrivită cu noile condiţiuni de viaţă isvorite din sacrificiile actuale ale poporului românesc.

Societatea ,,Gazeta Matematică" afirmă şi revendică participarea, prin membrii şi colaboratorii săi, la război, pe care-l consideră Războiul pentru Unitatea Naţională a Românilor. Sentimentele pe care le manifestau faţă de armata ţării aveau ca fundament ,,axioma": *atâta timp cât Armata Română este în picioare, cugetarea română şi dragostea pentru ştiinţă nu pot fi distruse.* Tot în acest curs al lucrurilor, în delegaţiunea Societăţii (forul administrativ superior al ei) pentru anii XXII şi XXIII a fost ales generalul *Scarlat Panaitescu.* La iniţiativa acestuia, care oferă în acelaşi timp şi fondurile necesare, se instituie un premiu anual de 200 lei ce urmează să se acorde autorului celui mai bun articol de matematică aplicată la ştiinţele militare. Primul *Premiu ,,Scarlat Panaitescu"* va fi acordat l-tului *Gh. Zapan* pentru lucrarea *Asupra câtorva elemente de tragere,* apărut anterior (An XXII, p. 102-107).

Articolele care tratează chestiuni de istoria şi istoriografia matematicii sunt numeroase şi ocupă un spaţiu larg: *Viaţa şi activitatea lui Gheorghe Lazăr* (T. Lalescu, serie de patru articole), *Un inventar al cărţilor de matematici* (I. Beleş, serie de trei articole), *Bibliografia românească matematică* (T. Lalescu) şi *Cărţi de matematici din Transilvania. Catalogul D-lui Onisifor Ghibu* (T. Lalescu). Un loc aparte printre contributori îl ocupă *C. Climescu,* care discută în mai multe articole un manuscris găsit în biblioteca *Seminarului ,,Veniamin Costache"* din Iaşi, intitulat *,,Curs întreg de matematică curată"* , scris cu litere chirilice şi care reprezintă o traducere după L.B. Francoeur.

Efectele negative ale războiului asupra Gazetei se manifestă nu numai în regularitatea apariţiei, numărului de pagini şi calitatea hârtiei, ci şi asupra structurii şi conţinutului ei. Gazeta este trimisă şi aşteptată pe frontul de luptă. Se primesc scrisori din primele linii; pentru combatanţii aflaţi în mijlocul distrugerilor, Gazeta este o oază de lumină şi o mângâiere. Numărul de pagini rezervate problemelor rezolvate şi rezolvitorilor a descrescut drastic şi chiar au existat numere în care această rubrică lipseşte.

La 30 august 1917 are loc Adunarea Generală a Societăţii. În nr. 1-2 din sept.-

oct. 1917, de început al Anului XXIII, apare, conform cerinţelor statutului Societăţii ,,Gazeta Matematică", lista membrilor săi. În dreptul numelor lor se fac precizări ca: *rămas în teritoriul ocupat de inamic* (V. Cristescu, C. Malcoci, Gh. Ţiţeica, Gh. Nicolaevici), *prizonier* (Gr. Orăşanu) sau sunt indicate *gradele* (A. Ioachimescu - căpitan, I. Ionescu - maior, M. Roco - locotenent, Sc. Panaitescu - general) sau *funcţiile militare* avute (Gh. Nechifor - cenzura militară, O. Thierrin - ataşat la misiunea militară franceză din Iaşi). Este de subliniat faptul că doi dintre ,,stâlpii" Gazetei au rămas în teritoriul ocupat al ţării. Adunarea Generală decide ca paginile Gazetei să fie deschise problemelor de matematică aplicate în ştiinţe militare. Apar articole ca: *O ştiinţă matematică în serviciul răsboiului: balistica* (V. Vâlcovici, nr. 3-4, 1917), *Metodă pentru descoperirea tunurilor inamice* (lt. Gh. Zapan, ibidem), *Asupra ipotezei rigidităţii traectoriei* (lt. M. Ghermănescu, ibidem), *Bătaia maximă pentru terenuri înclinate* (lt. I. Linteş, ibidem), *Relaţiunile dintre matematici şi ştiinţele militare* (I. Ionescu, în mai multe numere) ş.a. Apar, în continuare, numeroase articole referitoare la istoria matematicii din România, bazate pe arhive din Iaşi.

Din când în când, Gazeta publică necrologul unui membru sau unui colaborator căzut la datorie pe câmpul de luptă: *Al. A. Roşu* (An XXII, p. 121), *C. D. Constantinescu* (An XXIII, p.15), *I. S. Teodorescu* (An XXIV, p. 65) ş.a., iar mai târziu *I. Ionescu* va evoca în cuvinte mişcătoare faptele şi jertfa lor în articolul *În amintirea celor dispăruţi* (An XXVI, p.14).

Anul XXIV găseşte Gazeta Matematică din nou la Bucureşti. Numărul 1-3, septembrie-noiembrie 1918, este tipărit la tipografia" Universală", str. Covaci, nr.14, iar adresa de corespondenţă este ing. *I. Ionescu*, str. Căluşei nr. 23. Fascicula respectivă a fost tipărită în 1919, de fapt, după cum rezultă dintr-o mică menţiune de pe copertă. Este publicat un articol al lui *Gh. Nichifor* intitulat *,,Gazeta Matematică şi Răsboiul pentru Unitatea Naţională a Românilor"* . *Al. Myller*, viitorul academician, contribuie cu chestiuni de geometrie analitică (An XXIII, p. 241; An XXIV, p. 51) *Premiul ,,Vasile Conta"* pentru lucrări de filozofia matematică sau de matematică pură se acordă lui *D.V. Ionescu*, pe atunci student (An XXV, p. 81). La Strasbourg, pe 22 sept. 1920, este programat un *Congres de matematică* al naţiunilor interaliate şi neutre. După o întrerupere de patru ani, în aprilie 1921, se reia şi *Concursul Gazetei*–primul din România Întregită.

Începând cu vol. XXVI, tipografia este din nou F. Göbl Fii, str. Regală 19, iar de la nr.3 (toamna lui 1920) dispar numerele duble sau triple. Activitatea *Societăţii ,,Gazeta Matematică"* reintră în normalitate din toate punctele de vedere.

Bibliografie

1. *Gazeta Matematică*, t. XX - XXIV.

2. F. Diac – *Monografia Societăţii de Ştiinţe Matematice din România,* S.S.M.R., Bucureşti, 1998.

3. N. Mihăileanu – *Revistele de matematici elementare,* Ed. Gil, Zalău, 1995.

Temistocle BÎRSAN
Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi

Dan TIBA
I.M.A.R., Bucureşti

CONCURSURI ŞI EXAMENE

Concursul de matematică ,,Al. Myller"
Ediţia a XII-a, Iaşi, 23 ianuarie 2014

Clasa a V-a

1. Se consideră numărul $N = 4^{2014} \cdot 5^{4032} + 18290$.
a) Determinaţi primele trei cifre şi ultimele trei cifre ale lui N.
b) Arătaţi că numărul N este divizibil cu $2, 3, 5$ şi 10.
c) Demonstraţi că N nu este pătrat perfect.

2. Demonstraţi că 10^n se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte nenule, oricare ar fi numărul natural nenul n.

3. Se consideră n numere naturale consecutive astfel încât produsul tuturor resturilor nenule obţinute la împărţirile celor n numere prin 5 este egal cu $3^{200} \cdot 4^{301}$. Determinaţi valorile posibile ale numărului n. (*Marius Ghergu*)

Clasa a VI-a

1. a) Se consideră mulţimea $A = \{a, a+1, \ldots, a+9\}$, unde a este un număr natural oarecare. Găsiţi trei submulţimi B, C, D, fiecare cu câte trei elemente, astfel încât $B \cup C \cup D = A$, $B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$, iar suma elementelor fiecăreia dintre mulţimile B, C şi D să fie aceeaşi.
b) Împărţiţi mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, 2013\}$ în trei submulţimi disjuncte două câte două, fiecare având acelaşi număr de elemente şi aceeaşi sumă a elementelor.

2. Un triunghi are lungimile laturilor numere naturale şi suma acestor lungimi este egală cu 10. Demonstraţi că triunghiul nu este echilateral, dar este isoscel.

3. a) Găsiţi 16 numere naturale astfel încât suma oricăror nouă dintre ele nu se divide cu 9.
b) Daţi exemplu de opt numere de tipul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c$ cu proprietatea că produsul oricăror două nu este pătrat perfect.
c) Demonstraţi că, din 81 de numere de tipul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c$, putem alege patru astfel încât produsul lor este putere a patra a unui număr natural.

Clasa a VII-a

1. Demonstraţi că nu există numere întregi distincte a, b şi c pentru care $\{a, b, c\} = \{a-b, b-c, c-a\}$. (*Cosmin Manea* şi *Dragoş Petrică*)

2. În interiorul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul E, astfel încât E să nu se afle pe diagonala BD. Dreapta BE intersectează dreptele AD şi CD în M, respectiv în N. Dreapta DE intersectează dreptele AB şi BC în P, respectiv în Q. Demonstraţi că dreptele MP şi NQ sunt paralele.

3. Pe latura AD a pătratului $ABCD$ se consideră punctul N astfel încât $AD = 4 \cdot AN$, iar pe latura AB se consideră un punct M. Demonstraţi că M este mijlocul segmentului AB dacă şi numai dacă NM este bisectoarea unghiului $\measuredangle ANC$.

Clasa a VIII-a

1. Un şoricel vrea să mănânce un caşcaval de formă cubică, format din 1001 cubuleţe de latură 1. După ce termină un cubuleţ, poate trece doar la un altul care are o faţă comună cu cel abia terminat. Poate şoricelul să mănânce tot caşcavalul, astfel încât cubuleţul din centru să-i rămână ultimul, ca desert?

(*Gabriela Zanoschi*)

2. Numerele reale pozitive x, y şi z au proprietatea că produsul oricăror două este cel mult egal cu 1. Demonstraţi că

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2} + \frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2} + \frac{(1+z^2)(1+x^2)}{2+z^2+x^2} \geq \frac{3+xy+yz+zx}{2}.$$

(*Ionuţ Ivănescu* şi *Lucian Tuţescu*)

3. Demonstraţi că, pentru orice număr natural n şi orice număr natural impar k, numărul $1+2+3+\ldots+n$ divide $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$.

Clasa a IX-a

1. Se consideră triunghiul ABC cu $AB > AC$. Pe segmentul AB se ia punctul N astfel încât $BN = \dfrac{AB+AC}{2}$. Dacă M este mijlocul laturii BC, demonstraţi că MN este paralelă cu bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$.

2. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = x \in \mathbb{R}, 3a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 18, \forall n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că există o infinitate de valori iraţionale ale lui x pentru care toţi termenii şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ sunt numere naturale. (*Radu Miron*)

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia pozitivă r şi primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinaţi partea întreagă a numărului

$$S_n = \sqrt{1+\frac{r}{a_1a_2}} + \sqrt{1+\frac{r}{a_2a_3}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{r}{a_na_{n+1}}},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Clasa a X-a

1. Demonstraţi că $\lg 2 > \dfrac{100}{333}$. (*Gabriel Popa*)

2. Afixele vârfurilor unui triunghi echilateral sunt numerele complexe a, b şi c. Considerăm numărul complex $z = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{b-c} + \dfrac{c}{c-a}$. Demonstraţi că partea reală a lui z este $\dfrac{3}{2}$. (*Sven Cortel*)

3. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este ,,aproape identică" dacă există o funcţie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $f(f(n)) + g(f(n)) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Dacă funcţia f este aproape identică, arătaţi că funcţia asociată g este definită prin $g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Daţi exemplu de funcţie aproape identică, alta decât funcţia identică.

c) Demonstraţi că singura funcţie aproape identică şi monotonă este funcţia identică. (*Claudiu Mîndrilă*)

Concursul de matematică ,,Florica T. Câmpan"

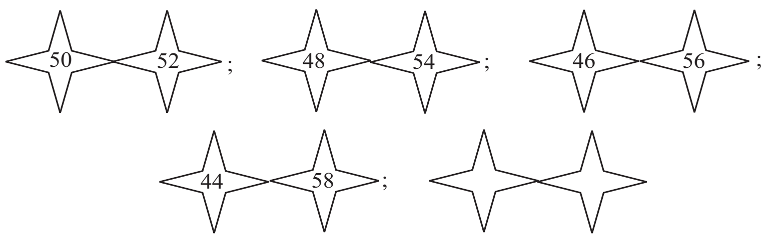
Ediţia a XIV-a, Iaşi, 26 aprilie 2014

Clasa I

I. 1. Descoperă regula şi completează:

9; 2; 2; 5;	3; 0; 0; 3;
7; 3; 3; 1;	8; 4; 4; $\square$;
9; 1; 1; 7;	7; 2; 2; $\square$.

2. Găseşte regula şi completează perechea de numere care lipseşte din şirul:



3. Completaţi cu semnele ,,+" sau ,,−" astfel încât să obţineţi rezultatul:

$$2\square 22\square 22\square 2\square 2\square 22 = 20$$

II. 1. George a citit 22 de pagini, depăşind cu două pagini jumătatea cărţii. Câte pagini are cartea?

2. Ioana are 10 ani, iar mama sa are 34 de ani. Câţi ani va avea mama când Ioana va avea 25 de ani?

III. 1. Pe o cărare de munte urcă 27 de elevi în şir, unul după altul. Ştiind că Bogdan este al 17-lea, iar Ana încheie şirul, să se afle câţi elevi îi despart.

2. Ana are un şirag cu 15 mărgele albe şi roşii. Ştim că cele albe sunt de la 5 la 10. Câte mărgele albe sunt? Câte mărgele roşii sunt?

Clasa a II-a

I. 1. Adăugaţi la cel mai mic număr impar de trei cifre succesorul celui mai mare număr scris cu două cifre diferite.

2. Se dă şirul : $5, 11, 23, 47, \ldots, \ldots, \ldots$
a) Completaţi şirul cu încă trei termeni .
b) Aflaţi suma celor şapte termeni ai şirului.

II. 1. Diana are 32 de beţişoare roşii, albastre şi verzi. Ştiind că 25 beţişoare nu sunt roşii şi 24 nu sunt verzi, să se afle:
a) câte beţişoare sunt de fiecare culoare;
b) dacă introduce beţişoarele într-un săculeţ, care este cel mai mic număr de beţişoare pe care le poate extrage, fără a se uita, pentru a fi sigură că a extras un beţişor roşu.

2. In călătoria spre Tărâmul Viselor, Sophie a fost însoţită de uriaşul Mup. In timp ce Mup făcea 4 paşi, Sophie făcea 15. Dacă uriaşul Mup a făcut în total 20 de paşi, află câţi paşi a făcut Sophie.

III. 1. Două veveriţe pornesc în sensuri diferite. Trec una pe lângă cealaltă, oprindu-se la o distanţă de 3 m una de alta. Care a fost distanţa dintre cele două puncte de pornire dacă prima veveriţă a parcurs 30 m, iar a doua cu 10 m mai puţin?

2. Veveriţele Chip şi Dale locuiesc pe aceeaşi stradă. Numărând de la un capăt al străzii, casa lui Chip este a 27-a. Dacă numărăm din celălalt capăt al străzii, casa ei este a 13-a. Casa lui Dale se află exact la mijlocul străzii. Câte case sunt între casa lui Chip şi casa lui Dale?

Clasa a III-a

I a) Ce număr lipseşte?

?	12	7
6	10	14
13	8	9

b) Ce valoare are b dacă $5 + 8 \cdot b = \overline{aa}$?
c) Analizând numerele din primele două triplete, determinaţi numerele care lipsesc din al treilea triplet: $(23, 38, 27), (15, 30, 19), (x, y, 2009)$.

II. Pe un platou se află de 3 ori mai multe roşii decât ardei. La masă sunt 3 persoane şi fiecare ia câte un ardei şi câte o roşie. Pe platou rămân de 4 ori mai multe roşii decât ardei. Câţi ardei şi câte roşii se aflau la început pe platou?

III. Mihai, fratele mai mare al Oanei din clasa a III-a, are pe birou mai multe cărţi. Oana deschide cărţile şi observă că fiecare dintre acestea are ultima pagină numerotată cu un număr de trei cifre a căror produs este 24. Care este cel mai mare număr de cărţi pe care le-ar putea avea Mihai pe birou?

Clasa a IV-a

I. a) La adunarea a trei numere, Victor face din neatenţie câteva greşeli: la primul număr în loc de cifra 0 de la ordinul sutelor pune 7, la al doilea număr în loc de cifra 8 de la ordinul unităţilor pune 0, iar la al treilea număr, la ordinul miilor în loc de cifra 9 pune 2. Făcând suma noilor numere obţine 34567. Puteţi spune care este suma numerelor iniţiale? Justificaţi!

b) Doi buni prieteni, Artur şi Victoraş, se întâlnesc, iar Artur constată că dacă adună o treime din timpul care a trecut din ziua respectivă cu două cincimi din timpul care a mai rămas până la sfârşitul ei se obţine ora la care s-au întâlnit. Îl puteţi ajuta pe Victoraş să afle care a fost ora la care s-au întâlnit?

II. Determinaţi câte numere de şase cifre conţin în scrierea lor secvenţa 102 (un exemplu de astfel de număr este 4**102**63).

III. Pe ecranul unui calculator, într-un tabel, sunt scrise iniţial numerele 2,0,1,4, iar la fiecare pas se măreşte cu 5 cel mai mic număr scris la pasul anterior, ca în modelul următor:

Numere iniţiale	**2**	**0**	**1**	**4**
pasul 1	2	**5**	1	4
pasul 2	2	5	**6**	4
pasul 3	**7**	5	6	4
pasul 4	7	5	6	**9**
...	...	...	...	...
pasul n				

a) Determinaţi n ştiind că la pasul n apar pe ecranul calculatorului numere care au suma egală cu 207.

b) După câţi paşi apare prima dată în tabel numărul 2014?

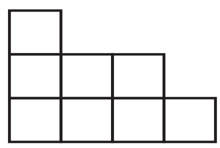
(*Cătălin Budeanu* şi *Gabriel Popa*)

Clasa a V-a

I. Două comisii, A şi B, lucrează la un proiect. Prima comisie are 13 membri, iar cea de-a doua are 6 membri. Fiecare dintre cele 19 persoane primeşte câte 60 de lei pe zi în primele 30 de zile lucrate şi câte 90 de lei pe zi începând cu cea de-a 31-a zi în care lucrează. Comisia A lucrează x zile, iar comisia B lucrează $2x$ zile. Suma totală de bani necesară pentru a plăti comisia A este egală cu suma totală necesară pentru a plăti comisia B. Determinaţi valorile posibile ale lui x.

(*Adrian Zanoschi*)

II. Toate cele 8 pătrate mici din desenul alăturat au latura de 1 cm.



a) Număraţi câte dreptunghiuri cu perimetrul de 8 cm pot fi identificate în figură. (Pătratele sunt şi ele dreptunghiuri!)

b) Determinaţi care este numărul minim de segmente cu lungimea de 1 cm care trebuie şterse din desen, astfel încât figura să nu mai conţină niciun pătrat cu latura de 1 cm.

(*Petru Asaftei* şi *Gabriel Popa*)

III. Într-o clasă sunt 7 elevi care colecţionează cărţi rare. Nu există doi elevi care să aibă o aceeaşi carte şi nici doi elevi care să aibă acelaşi număr de cărţi.

Profesorul de matematică determină, pentru fiecare pereche de copii, care este numărul maxim de posibilităţi în care aceştia pot schimba între ei câte o carte şi notează numerele astfel determinate într-un tabel. De exemplu, dacă Andrei ar avea 20 cărţi şi Sabina ar avea 17 cărţi, va trece în tabel numărul 340. Profesorul observă că tabelul conţine numere diferite două câte două.

a) Stabiliţi câte numere se află în tabel.

b) Determinaţi numărul de cărţi din colecţia fiecărui elev, ştiind că media aritmetică a celor 7 numere este 17, cel mai mic număr din tabel este 143, iar cel mai mare număr din tabel este 420. (*Adrian Zanoschi*)

Clasa a VI-a

I. Un profesor de matematică tocmai explica unui elev al său că, într-o problemă cu date de naştere, o notaţie de forma 17.12.78 poate avea semnificaţia ,,17 decembrie 1978". Curios ca toţi copiii, elevul profită de situaţie şi îl întrebă pe profesor care este ziua lui de naştere şi ce vârstă are. Zâmbind, profesorul îi răspunse: ,,Acum suntem în ianuarie 2014 şi, dacă te gândeşti la descompunerea sa în factori primi, acest număr ascunde informaţiile la tot ce m-ai întrebat!". Folosind acest răspuns, aflaţi:

a) care este ziua de naştere a profesorului;

b) care este vârsta profesorului (exprimată doar în ani) la data când a avut loc discuţia.

II. Se consideră o foaie de hârtie de formă pătrată, care se taie în exact 2014 pătrate mai mici. Vom spune că un pătrat dintre cele 2014 este ,,boss" dacă niciun alt pătrat nu este mai mare ca el. La fel, vom spune că un pătrat dintre cele 2014 este ,,baby" dacă nici un alt pătrat nu este mai mic ca el. Arătaţi că:

a) este posibil un mod de tăiere prin care să se obţină exact trei pătrate ,,boss";

b) este posibil un mod de tăiere prin care să se obţină exact patru pătrate ,,baby";

c) este posibil un mod de tăiere prin care să se obţină exact un pătrat ,,boss".

III. Într-o pauză, Lucian se joacă desenând pe o foaie diverse figuri şi îndoind apoi foaia după o dreaptă, pentru ca figura desenată să se imprime pe partea cealaltă după îndoitură. El desenează un segment $[AB]$ şi, după îndoire, constată că pe foaie s-a imprimat un alt segment, pe care îl notează $[A'B']$, unde A' este urma lăsată de punctul A. După aceea, observă că segmentele $[AB]$ şi $[A'B']$ se intersectează într-un punct pe care îl notează M şi, totodată, dreptele AB' şi BA' se intersectează şi ele într-un punct pe care-l notează P. Gabriel, colegul lui de bancă, îi atrage atenţia spunând: ,,Cred că nu ai respectat ceva la îndoire, pentru că punctele M şi P nu sunt pe îndoitură". Lucian, privind cu atenţie desenul, răspunde: ,,Ai dreptate. Mai mult, dacă aş fi îndoit corect, cred că $[PM$ ar fi fost bisectoare pentru unghiul $\widehat{APB}$". Dovediţi că observaţiile celor doi copii sunt ambele adevărate.

(*Silviu Boga* şi *Doru Buzac*)

Clasa a VII-a

I. Pe ecranul unui calculator este scris numărul $1\underbrace{22\ldots2}_{2014}\underbrace{000\ldots0}_{2014}$. În fiecare minut, pe ecran apare câte un nou număr, prin eliminarea unei cifre de 2 şi a unei cifre de 0 din numărul scris anterior, până când numărul rămas pe ecran are o singură cifră.

a) Arătaţi că niciunul dintre numerele scrise pe ecran nu este pătrat perfect.

b) Arătaţi că $\underbrace{11\ldots1}_{n+1}{}^2 - \underbrace{11\ldots1}_{n}{}^2$ este divizibil cu $2 \cdot 10^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^2$.

c) Arătaţi că suma tuturor numerelor scrise pe ecran este pătrat perfect.

II. O broască pleacă din originea axei numerelor şi înaintează prin salturi după următoarea regulă: de fiecare dată sare pe cel mai apropiat număr natural multiplu de 3 sau pe cel mai apropiat multiplu de 13. Un traseu este o succesiune de salturi făcute după regula stabilită, între 0 şi 39. Care este numărul maxim de trasee pe care le poate urma broasca?

III. Un proprietar deţine un teren intravilan în formă de triunghi şi un teren extravilan foarte întins.

a) Dacă într-un triunghi ABC, punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor sale, calculaţi raportul dintre aria triunghiului MNP şi aria triunghiului ABC.

b) Pe terenul extravilan sunt amplasaţi 2014 ţăruşi astfel încât triunghiul determinat de oricare trei dintre aceştia are aria de cel mult 1 ha. Să se arate că se poate delimita un triunghi de arie cel mult 4 ha în care să se găsească toţi ţăruşii.

c) Proprietarul vrea să împrejmuiască terenul intravilan, având suprafaţa de 2 dam^2. Arătaţi că nu sunt suficienţi 6 dam de gard.

Clasa a VIII-a

I. De ziua ei, mama i-a făcut Irinei un tort în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 40 cm respectiv 30 cm şi înălţimea de 10 cm.

a) Află câţi centilitri are acest tort.

b) Pentru a servi invitaţii, se taie tortul în bucăţi având formă de prismă patrulateră regulată cu latura bazei de 5 cm şi înălţimea egală cu cea a paralelipipedului. Câte felii de tort a obţinut Irina?

c) Mama a glazurat tortul cu un strat de frişcă, având grosimea de 1,5 cm. Câţi centilitri de frişcă a folosit ea?

d) Care este probabilitatea ca, luând o felie de tort, aceasta să aibă cât mai puţină frişcă? (*Marius Farcaş* şi *Veronica Plăeşu*)

II. Se ştie că preţul unui diamant este direct proporţional cu pătratul masei lui. Întâmplător, diamantul s-a despicat în două bucăţi şi preţul lui total s-a micşorat cu 18%. Care este raportul maselor bucăţilor obţinute?

III. Un corp geometric cu suprafaţa de 400 dm^2 este format din 400 pietre, fiecare cu suprafaţa de 400 cm^2. Pietrele sunt îmbinate perfect (fără goluri interioare) cu un adeziv din care se foloseşte 0,04 g la fiecare 400 mm^2. Aflaţi cantitatea de adeziv folosită.

Olimpiada de Matematică a Studenţilor din Sud-Estul Europei (SEEMOUS), Ediţia a VIII-a, Iaşi, 7 martie 2014

Universitatea Tehnică ,,Gh. Asachi" din Iaşi a fost gazdă a celei de a VIII-a ediţii a competiţiei **SEEMOUS**. Au concurat 25 de echipe, reunind 99 studenţi, din ţările: *Bulgaria, Grecia, România, Rusia, Turcia, Turkmenistan* şi *Ucraina.*

Studenţii concurenţi au avut de rezolvat 4 probleme în 5 ore. *Locul I pe naţiuni a revenit României, locul I pe universităţi a fost adjudecat de Naţional and Kapodistrian University of Athens din Grecia, iar locul I individual absolut a fost obţinut de studentul Eduard Valentin Curcă de la Universitatea ,,Al. I. Cuza" din Iaşi.*

După concurs au participat la o excursie cu obiectivele: Ruginoasa (palatul domnitorului Alexandru Ioan Cuza) şi Târgu Neamţ (cetatea Neamţului, mănăstirea Agapia).

Detalii pot fi găsite la adresa: `http://math.etti.tuiasi.ro/seemous`

Probem 1. Let n be a nonzero natural number and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ be a function such that $f(2014) = 1 - f(2013)$. Let $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ be real numbers not equal to each other. If

$$\begin{vmatrix} 1+f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ f(x_1) & 1+f(x_2) & f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & 1+f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \ldots & 1+f(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

prove that f is not continuous.

Dimitris GEORGIOU, Grecia

Problem 2. Consider the sequence (x_n) given by

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 1 + \sqrt{x_n^2 + 2x_n + 5}}{2}, \quad n \geq 1.$$

Prove that the sequence $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^2 - 1}$, $n \geq 1$ is convergent and find its limit.

Pirmyrat GURBANOV, Turkmenistan

Problem 3. Let $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ and $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ such that $A - A^* = 2aI_n$, where $A^* = (\overline{A})^t$ and $\overline{A}$ is the conjugate of the matrix A.

(a) Show that $|\det A| \geq |a|^n$.

(b) Show that if $|\det A| = |a|^n$, then $A = aI_n$.

Vasile POP, România

Problem 4. a) Prove that $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{x(x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2}$.

b) Find the limit $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(n \displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{x(x^2+1)} dx - \frac{\pi}{2} \right)$.

Vladimir BABEV, Bulgaria

PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2014

Clasele primare

P.283. *Scrieţi* $+$ *sau* $-$ *în fiecare pătrăţel din* $1\square 2\square 3\square 4 = 17\square 1\square 2\square 4$ *astfel încât să obţineţi o egalitate. Câte soluţii există? Explicaţi!*

(*Clasa I*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

Soluţie. Expresia $1\square 2\square 3\square 4$ are valoarea maximă 10, când în fiecare casetă scriem semnul $+$. Expresia $17\square 1\square 2\square 4$ are valoarea minimă 10, când în fiecare casetă scriem semnul $-$. În concluzie, avem o singură soluţie: $1+2+3+4=17-1-2-4$.

P284. *Se consideră şirul de cifre:* $0,1,2,3,2,1,0,1,2,3,2,1,0,\ldots$ *De câte ori apare cifra* 1 *în primele* 60 *de cifre scrise?*

(*Clasa I*) **Teodor Pătraşcu, elev, Iaşi**

Soluţie. În primele 60 de cifre scrise, gruparea $0,1,2,3,2,1$ se repetă de 10 ori. Cifra 1 apare de $\underbrace{2+2+\ldots+2}_{\text{de 10 ori}} = 20$ ori.

P285. *Considerăm şirul crescător al numerelor de două cifre cu cifra unităţilor* 5. *Cât trebuie să adăugăm la suma unităţilor numerelor din şir pentru a obţine numărul din mijlocul lui?*

(*Clasa I*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

Soluţie. Şirul crescător al numerelor de două cifre cu cifra unităţilor 5 este $15,25,35,45,55,65,75,85$ şi 95. Suma unităţilor acestor numere este 45. Pentru a obţine numărul 55, la suma unităţilor trebuie să adăugăm 10.

P286. *Refaceţi adunarea* $\overline{2**}+\overline{3**}=678$, *ştiind că este cu trecere peste ordinul unităţilor şi al zecilor. Scrieţi toate soluţiile.*

(*Clasa a II-a*) **Teodora Pricop, elevă, Iaşi**

Soluţie. Deoarece cifra unităţilor sumei este 8, înseamnă că termenii sumei sunt de forma $\overline{2*9}$, $\overline{3*9}$. Soluţiile sunt: $289+389=678$, $279+399=678$, $299+379=678$.

P287. *Pe un jeton sunt scrise numerele* $1,2,3,4,5$ *într-o ordine dată, fără să se repete. Pentru fiecare două numere alăturate se face suma lor. Se adună cele patru rezultate obţinute şi suma lor este ,,codul jetonului". Cum trebuie scrise numerele pentru a obţine un jeton cu codul* 25*? (Este suficient un singur exemplu.)*

(*Clasa a II-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. O scriere poate fi $1,3,5,2,4$. Într-adevăr, $1+3=4$, $3+5=8$, $5+2=7$, $2+4=6$, $4+8+7+6=25$.

P288. *Câte numere de două cifre trebuie alese astfel încât să fim siguri că printre ele găsim două numere cu aceeaşi sumă a cifrelor.*

(*Clasa a II-a*) **Marian Ciuperceanu, Craiova**

Soluţie. Sumele cifrelor numerelor de două cifre sunt: $1, 2, 3, \ldots, 18$. Dacă luăm 19 numere de două cifre, atunci găsim printre ele două numere care au aceeaşi sumă a cifrelor, conform principiului cutiei.

P289. *Pentru fiecare şapte mere pe care le culege, un băiat primeşte de la bunicul lui două nuci. Este posibil ca, la sfârşit, după ce a cules ultimele şapte mere şi a primit două nuci, să aibă* 234 *fructe? Dar* 431*?*

(*Clasa a III-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fructele băiatului pot fi grupate câte $7 + 2 = 9$. Observăm că $9 \times 26 = 234$, $431 = 9 \times 47 + 8$. Poate să aibă 234 fructe, dar 431 nu.

P290. *Un salariat are tichete valorice de* $1, 3, 9$ *şi* 27 *lei, cel puţin câte unul de fiecare fel. Cum poate să achite suma de* 79 *lei utilizând fiecare tichet cel puţin o dată?*

(*Clasa a III-a*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. $79 = 2 \times 27 + 2 \times 9 + 2 \times 3 + 1$.

P291. *Un elev trebuie să rezolve* 42 *de probleme în cinci zile. În fiecare zi rezolvă mai multe probleme decât în ziua precedentă, iar în ziua a patra rezolvă de cinci ori mai multe probleme decât în prima zi. Care este numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în a cincea zi?*

(*Clasa a III-a*) **Alexandra-Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă în prima zi ar rezolva 3 probleme, atunci numărul total de probleme rezolvate este minim $3 + 4 + 5 + 15 + 16 = 43 > 42$, imposibil.

Rămân situaţiile: a) $1 < 2 < 3 < 5 < 31$; b) $2 < 3 < 4 < 10 < 23$. În concluzie, numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în a cincea zi este 31.

P292. *Un elev are* 11 *bile albe numerotate de la* 1 *la* 11*,* 11 *bile verzi numerotate de la* 12 *la* 22 *şi* 11 *bile negre numerotate de la* 23 *la* 33*. Vom numi tripletă orice grupă de trei bile având culori diferite, cu numerele scrise pe ele în ordine crescătoare. Câte triplete cu proprietatea că suma numerelor de pe bilele componente este* 51 *se pot forma?*

(*Clasa a III-a*) **Adelin Bechet, elev, Iaşi**

Soluţie. Tripletele sunt: $(1, 22, 28), (1, 21, 29), \ldots, (1, 17, 33)$; $(2, 22, 27), (2, 21, 26), \ldots, (2, 16, 33)$; $\ldots$; $(11, 17, 23), (11, 16, 24), \ldots, (11, 12, 29)$. Numărul acestor triplete este $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 91$.

P293. *Ştiind că* $\overline{xy} + \overline{mn} = 35$ *şi* $\overline{zt} + \overline{uv} = 75$*, să se afle câtul împărţirii numărului* $\overline{xyzt} + \overline{mnuv}$ *la* 5.

(*Clasa a IV-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

Soluţie. $\overline{xy} \times 100 + \overline{mn} \times 100 = 35 \times 100 = 3500$; $\overline{xyzt} + \overline{mnuv} = \overline{xy00} + \overline{mn00} + \overline{zt} + \overline{uv} = 3500 + 75 = 3575$; $3575 : 5 = 715$.

P294. *Câte numere de trei cifre au cel puţin una dintre cifre* 9*?*

(*Clasa a IV-a*) **Mariana Manoli, elevă, Iaşi**

Soluţie. Toate numerele de trei cifre sunt în număr de $999 - 100 + 1 = 900$. Toate numerele de trei cifre care nu conţin cifra 9 sunt în număr de $8 \times 9 \times 9 = 648$. Numerele de trei cifre care au cel puţin una din cifre 9 sunt în număr de $900 - 648 = 252$.

P295. *Câţiva elevi au organizat o excursie de trei zile. În prima seară dorm câte patru în cameră, în a doua seară câte trei, iar în ultima seară fiecare are camera sa.*

Ştiind că au fost închiriate 32 de camere în cele trei zile, iar în a doua seară într-o cameră au fost cazaţi numai doi elevi, să se afle câţi elevi au participat la excursie.
(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Da a este numărul elevilor, atunci $a : 4 + (a + 1) : 3 + a = 32 \Leftrightarrow 3a + 4a + 4 + 12a = 384 \Leftrightarrow a = 20$ (elevi).

P296. *Pentru un număr natural n, $n \geq 1$, notăm cu $S(n)$ suma cifrelor numărului n (de exemplu $S(235) = 2 + 3 + 5 = 10$). Câte numere de forma $\overline{abc}$ îndeplinesc condiţia $S(S(\overline{abc})) = 10$?*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Avem $S(\overline{abc}) \leq 27$. Singurul număr mai mic decât 27 care are suma cifrelor 10 este 19, deci $a + b + c = 19$. Dacă $a = 1$, atunci $b + c = 18$ şi $b = c = 9$ (1 caz). Dacă $a = 2$, atunci $b + c = 17$ şi ($b = 9$, $c = 8$ sau $b = 8$, $c = 9$) (2 cazuri).

Continuând astfel, ajungem la faptul că, dacă $a = 9$, atunci $b + c = 10$ şi avem 9 cazuri. În concluzie, avem $1+2+3+\ldots+9 = 45$ numere de trei cifre care îndeplinesc condiţia din enunţ.

Clasa a V-a

V.172. *Se consideră numerele naturale $x = 2013^{2013} - 3$ şi $y = 2014^{2013} - 4$. Arătaţi că x şi y au cel puţin patru divizori comuni.*
Gheorghe Iacob, Paşcani

Soluţie. Se constată uşor că atât x cât şi y au ultima cifră 0, prin urmare $1, 2, 5$ şi 10 sunt divizori ai ambelor numere.

V.173. *Determinaţi numerele naturale m şi n pentru care $2^m + 2^n = 33554433$.*
Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Suma $2^m + 2^n$ fiind impară, numerele 2^m şi 2^n vor avea parităţi diferite, prin urmare unul dintre ele va fi egal cu 1, iar celălalt cu 33554432. Obţinem soluţiile $(m, n) \in \{(0, 25); (25, 0)\}$.

V.174. *Determinaţi numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc} = c^2(a-1)^2$.*
Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Cum c este ultima cifră a unui pătrat perfect, rezultă că $c \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Cazurile $c = 0$ şi $c = 1$ se elimină imediat. Dacă $c = 4$, obţinem că $\overline{ab4} = 16(a - 1)^2$; urmărind utima cifră, deducem că $a = 3$ sau $a = 9$, valori pentru care nu se verifică egalitatea. Procedând în aceeaşi manieră, nu găsim soluţii pentru $c = 9$, pentru $c = 5$ obţinem $a = 6$, $b = 2$, iar pentru $c = 6$ obţinem $a = 5$, $b = 7$. În concluzie, $\overline{abc} \in \{576, 625\}$.

V.175. *Arătaţi că numărul $A = 2^{2014} + 2^{2013} + 2^{2012} + 2^3$ se divide cu 15.*
Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

Soluţie. Observăm că $A = 2^{2012} \cdot 7 + 8 = 16^{503} \cdot 7 + 8 = (15 + 1)^{503} \cdot 7 + 8 = (M_{15} + 1) \cdot 7 + 8 = M_{15} + 7 + 8 = M_{15}$, de unde cerinţa problemei.

V.176. *Pe tablă sunt scrise numerele naturale $1, 2, 3, \ldots, 41$. Andrei alege de pe tablă un număr de la 1 la 7. Apoi, Bianca alege un număr mai mare decât cel al lui Andrei, astfel încât diferenţa dintre numărul ales de ea şi cel ales de Andrei este cel mult egală cu 7. Urmează Andrei, care alege un număr mai mare decât cel ales de*

Bianca, astfel încât diferenţa dintre numărul ales de el şi cel ales de Bianca este cel mult egală cu 7 *ş.a.m.d. Elevul care este obligat să aleagă numărul* 41 *pierde jocul. Arătaţi că Bianca are strategie de câştig.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. Indiferent de numerele pe care le alege Andrei, Bianca poate alege, de fiecare dată când îi vine rândul, numerele $8, 16, 24, 32, 40$. La al şaselea pas, Andrei va fi obligat să aleagă numărul 41, pierzând jocul.

V.177. *Determinaţi cel mai mic număr natural n (scris în baza 10) cu proprietatea că atât n, cât şi $n+3$, au suma cifrelor numere divizibile cu* 7.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Notăm cu $u(n)$ şi $s(n)$ ultima cifră, respectiv suma cifrelor numărului natural n. Dacă $u(n) \leq 6$, atunci $s(n+3) - s(n) = 3$, număr care nu se divide cu 7.

Dacă $u(n) = 7$ şi $n = \overline{a_1 \dots a_s \underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ de } 9} 7}$, $a_s \neq 9$, atunci $n+3 = \overline{a_1 \dots (a_s+1) \underbrace{0 \dots 00}_{k+1 \text{ de } 0}}$, prin urmare $s(n) - s(n+3) = 9k+6$. Cea mai mică valoare a lui k pentru care $9k+6$ se divide cu 7 este $k = 4$. Se observă că numărul $n = 699997$ este cel mai mic dintre cele având forma dorită şi suma cifrelor divizibilă cu 7.

Dacă $u(n)=8$ şi $n=\overline{a_1 \dots a_s \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ de } 9} 8}$, $a_s \neq 9$, atunci $n+3 = \overline{a_1 \dots (a_s+1) \underbrace{0 \dots 0}_{k \text{ de } 0} 1}$, prin urmare $s(n) - s(n+3) = 9k+6$. Cea mai mică valoare a lui k pentru care $9k+6$ se divide cu 7 este $k = 4$. Se observă că numărul $n = 599998$ este cel mai mic dintre cele având forma dorită şi suma cifrelor divizibilă cu 7.

Dacă $u(n) = 9$ şi $n = \overline{a_1 \dots a_s \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ de } 9}}$, $a_s \neq 9$, atunci $n+3 = \overline{a_1 \dots (a_s+1) \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 2}$, prin urmare $s(n) - s(n+3) = 9k-3$. Cea mai mică valoare a lui k pentru care $9k-3$ se divide cu 7 este $k = 5$. Se observă că numărul $n = 499999$ este cel mai mic dintre cele având forma dorită şi suma cifrelor divizibilă cu 7.

Dintre numerele 699997, 599998 şi 499999, cel mai mic este 499999.

V.178. *Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care n^3 divide $n!$ (unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$).*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Vom arăta că orice număr de forma $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ are proprietatea dorită. Observăm că $2 < 3 < 2k < 3k < 6k$ şi $2 \cdot 3 \cdot 2k \cdot 3k \cdot 6k = (6k)^3$, prin urmare $(6k)^3$ divide $(6k)!$. Astfel, există o infinitate de numere naturale care verifică cerinţa problemei.

Clasa a VI-a

VI.172. *Demonstraţi că nu există numere întregi distincte a, b, şi c pentru care $\{a, b, c\} = \{a-b, b-c, c-a\}$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că există a, b, c întregi distincte pentru care $A = B$, unde $A = \{a, b, c\}$ şi $B = \{a-b, b-c, c-a\}$. În particular, $a+b+c = (a-b)+(b-c)+(c-a)$, prin urmare $a+b+c = 0$; putem deci considera $A = \{a, b, -a-b\}$ şi $B = \{a-b, a+2b, -2a-b\}$. Cum $a \in B$, rezultă că $a = a-b$ sau $a = a+2b$ sau

$a = -2a - b$. Dacă $a = a - b$, atunci $b = 0$, deci $B = \{a, a, -2a\}$, imposibil. Dacă $a = a + 2b$, obţinem din nou că $b = 0$, deci aceeaşi contradicţie. Dacă $a = -2a - b$, atunci $b = -3a \neq 0$, prin urmare $A = \{a, -3a, 2a\}$, $B = \{4a, -5a, a\}$ şi egalitatea $A = B$ va fi imposibilă. În concluzie, presupunerea făcută este falsă, deci $A \neq B$.

VI.173. *Fie $a, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, astfel încât la împărţirea lui a cu n se obţine restul $n - 1$, iar la împărţirea lui a prin $n + 1$ se obţine restul n. Aflaţi restul împărţirii lui a prin $n(n + 1)$.*

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

Soluţie. Din $a = nc_1 + (n - 1)$ şi $a = (n + 1)c_2 + n$, deducem că $a + 1 \vdots n$ şi $a + 1 \vdots n + 1$. Însă $(n, n + 1) = 1$, prin urmare $a + 1 \vdots n(n + 1)$, aşadar restul împărţirii lui a prin $n(n + 1)$ este $n(n + 1) - 1$.

VI.174. *Demonstraţi că nu există numere naturale a, b şi c având proprietatea că $a^2 + b^2 - 8c = 6$.*

Viorica Momiţă, Iaşi

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că ar exista $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^2 + b^2 = 8c + 6$; evident că a şi b vor avea aceeaşi paritate. Dacă a, b sunt pare, atunci $a^2 = M_4$, $b^2 = M_4$, deci $a^2 + b^2 = M_4 \neq 8c + 6$. Dacă a, b sunt impare, atunci $a = M_8 + 1$, $b = M_8 + 1$, deci $a^2 + b^2 = M_8 + 2 \neq 8c + 6$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, prin urmare este adevărată concluzia.

VI.175. *Determinaţi cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{71}$ şi $b = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{48}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $d = (a, b)$, atunci d este un număr impar. Observăm că d divide $a - b = 2^{49}(1 + 2 + \ldots + 2^{22})$, prin urmare d divide $n = 1 + 2 + \ldots + 2^{22}$. Apoi, d divide $b - n = 2^{23}(1 + 2 + \ldots + 2^{25})$, deci d divide $m = 1 + 2 + \ldots + 2^{25}$. În continuare, $d | m - n$ şi $m - n = 2^{23}(2^3 - 1)$, aşadar $d | 7$. Pe de altă parte, $a = (1 + 2 + 2^2) + 2^3(1 + 2 + 2^2) + \ldots + 2^{69}(1 + 2 + 2^2) = 7(1 + 2^3 + \ldots + 2^{69})$ şi $b = (1 + 2 + 2^2) + 2^3(1 + 2 + 2^2) + \ldots + 2^{46}(1 + 2 + 2^2) = 7(1 + 2^3 + \ldots + 2^{46})$, adică $7 | a$ şi $7 | b$. Obţinem astfel că $(a, b) = 7$.

VI.176. *Determinaţi cel mai mic număr natural (scris în baza 10) care se termină în 2012 şi se divide cu 2014.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Căutăm numărul minim $N = 10000a + 2012 = 2014c$, unde $a, c \in \mathbb{N}$. Dacă $b = c - 1$, obţinem ecuaţia diofantică $10000a - 2014b = 2$, care are o infinitate de soluţii; cea mai mică valoare a lui a se determină cu ajutorul algoritmului lui Euclid. Observăm că $(10000, 2014) = 2$, şi avem relaţile: $10000 = 2014 \cdot 4 + 1944$; $2014 = 1944 \cdot 1 + 70$; $1944 = 70 \cdot 27 + 54$; $70 = 54 \cdot 1 + 16$; $54 = 16 \cdot 3 + 6$; $16 = 6 \cdot 2 + 4$; $6 = 4 \cdot 1 + 2$; $4 = 2 \cdot 2 + 0$. De aici,

$$\begin{aligned} 1944 &= 10000 - 4 \cdot 2014; \\ 70 &= 5 \cdot 2014 - 100000; \\ 54 &= 28 \cdot 10000 - 139 \cdot 2014; \\ 16 &= 144 \cdot 2014 - 29 \cdot 10000; \end{aligned}$$

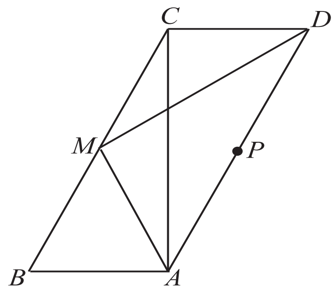
$$6 = 1115 \cdot 10000 - 571 \cdot 2014;$$
$$4 = 1286 \cdot 2014 - 259 \cdot 10000;$$
$$2 = 374 \cdot 10000 - 1857 \cdot 2014.$$

Astfel, $N = 10000 \cdot 374 + 2012 = 3742012$ este numărul căutat.

VI.177. *Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $m(\widehat{B}) = 60°$. Considerăm punctul D astfel încât $CD \| AB$, $CD = AB$, iar B şi D sunt separate de dreapta AC. Arătaţi că există un singur punct $M \in (BC)$ astfel încât $MA \perp MD$.*

Petru Asaftei, Iaşi

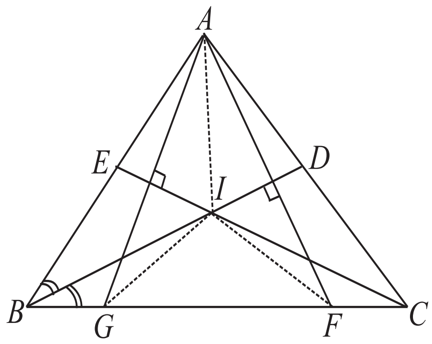
Soluţie. Fie P mijlocul segmentului AD; atunci $MA \perp MD$ dacă şi numai dacă $MP = \frac{1}{2}AD$. Se observă uşor că $AD = BC$, iar $AB = \frac{1}{2}BC$, prin urmare $MA \perp MD$ dacă şi numai dacă $MP = AB$, condiţie echivalentă cu faptul că triunghiul CMP este echilateral (deoarece $PC = PM = \frac{1}{2}AD$, iar $m(\widehat{MCP}) = 60°$). Astfel, concluzia problemei se impune: unicul punct M pentru care $MA \perp MD$ este mijlocul segmentului BC.



VI.178. *Fie ABC un triunghi în care unghiul $\widehat{BAC}$ este cel mai mare, iar BD şi CE sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$, respectiv $\widehat{ACB}$ ($D \in AC, E \in AB$). Notăm cu I intersecţia dreptelor BD şi CE şi cu F şi G simetricele punctului A faţă de BD, respectiv CE. Arătaţi că $m(\widehat{FIG}) = 180° - m(\widehat{BAC})$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece $\triangle ABF$ este isoscel, punctul F este situat pe latura BC; analog, G se află tot pe BC. Punctul I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, deci AI este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Din congruenţa triunghiurilor BAI şi BFI (L.U.L.) obţinem că $m(\widehat{BFI}) = m(\widehat{BAI}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC})$; la fel se arată că $m(\widehat{CGI}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC})$. Astfel, $m(\widehat{GIF}) = 180° - (m(\widehat{BFI}) + m(\widehat{CGI})) = 180° - m(\widehat{BAC})$.



Clasa a VII-a

VII.172. *Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că $0,3 < \{\sqrt{n}\} < 0,(3)$.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Înlocuind $n = 0, 1, 2, \ldots$ în relaţia dată, constatăm că prima valoare convenabilă este $n = 11$.

VII.173. *Determinaţi numerele naturale n pentru care $5^n - 3^n = 544$.*

Ionel Tudor, Călugăreni şi Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie. Cum $5^n - 3^n = (5-3)(5^{n-1} + 5^{n-2}\cdot 3 + \ldots + 3^{n-1})$ şi, pentru $n \geq 5$, $5^{n-1} + 5^{n-2}\cdot 3 + \ldots + 3^{n-1} > 625 > 272$, rezultă că $n \leq 4$. Facem verificările şi obţinem că unica soluţie este $n = 4$.

VII.174. *Pentru a, b, c, d numere reale pozitive, considerăm numerele* $A = \dfrac{1}{a+2b+c} - \dfrac{1}{b+2c+d} + \dfrac{1}{c+2d+a} - \dfrac{1}{d+2a+b}$ *şi* $B = |b-d| - |a-c|$. *Demonstraţi că A şi B au acelaşi semn.*

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Traian Tămîian, Carei

Soluţie. Efectuând calculele, obţinem că

$$A = \frac{2(a+b+c+d)\cdot[(b-d)^2 - (a-c)^2]}{(a+2b+c)(b+2c+d)(c+2d+a)(d+2a+b)}.$$

Cum semnul parantezei pătrate de la numărător este acelaşi cu semnul lui B, concluzia se impune.

VII.175. *Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care $2^m + 2^n$ este pătrat perfect.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $m = n$, atunci $2^m + 2^n = 2^{n+1}$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

Dacă $m > n$, atunci $2^m + 2^n = 2^n(2^{m-n} + 1)$ este pătrat perfect când $n = 2k$ şi $2^{m-n} + 1 = a^2$, cu $k, a \in \mathbb{N}$. Din $(a-1)(a+1) = 2^{m-n}$ rezultă că $a - 1 = 2^\alpha$, $a + 1 = 2^\beta$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha < \beta$, $\alpha + \beta = m - n$. Deducem că $2^\beta - 2^\alpha = 2$, deci $2^\alpha(2^{\beta-\alpha} - 1) = 2$, de unde $\alpha = 1$, $\beta = 2$ şi atunci $m - n = 3$. Analog se tratează cazul $n > m$.

În concluzie, perechile căutate sunt cele de forma $(2k+1, 2k+1)$ sau $(2k, 2k+3)$ sau $(2k+3, 2k)$, unde $k \in \mathbb{N}$.

VII.176. *Demonstraţi că* $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} + \sqrt{\dfrac{xy}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2}$, *oricare ar fi numerele reale pozitive x şi y.*

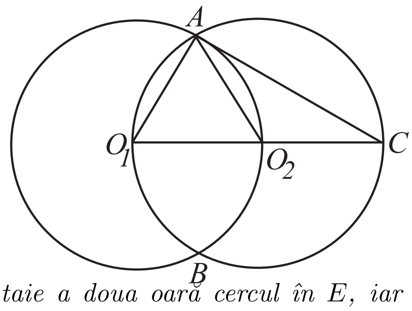
Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Cu substituţia $y = tx$, $t > 0$, inegalitatea se rescrie sub forma $\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t+1} + \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+1}} \leq \sqrt{2}$. Prin ridicare la pătrat, aceasta este echivalentă cu $\dfrac{t^2+1}{(t+1)^2} + \dfrac{t}{t^2+1} + \dfrac{2\sqrt{t}}{t+1} \leq 2$, $\forall t > 0$. Efectuând calculele, suma primilor doi termeni se dovedeşte a fi cel mult 1, iar $\dfrac{2\sqrt{t}}{t+1} \leq 1$; adunând, obţinem inegalitatea dorită. Egalitate avem pentru $t = 1$, deci când $x = y$.

VII.177. *Fie $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ două cercuri de centre O_1, respectiv O_2, având razale egale şi astfel încât $O_1 \in \mathcal{C}_2$. Notăm cu A şi B punctele de intersecţie dintre cele două cercuri şi cu C punctul în care tangenta în A la $\mathcal{C}_1$ taie a doua oară $\mathcal{C}_2$. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.*

Dumitru Săvulescu şi Marian Voinea, Bucureşti

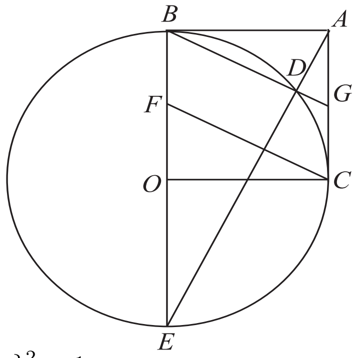
Soluţie. Cum O_1A, O_1O_2 şi O_2A sunt raze în cele două cercuri congruente, triunghiul AO_1O_2 va fi echilateral. Unghiul drept $\widehat{O_1AC}$ este înscris într-un semicerc al lui $\mathcal{C}_2$, deci punctele O_1, O_2 şi C sunt coliniare, iar arcul mic $\widehat{AC}$ din $\mathcal{C}_2$ va avea măsura $2 \cdot 60° = 120°$. Evident că arcul mic $\widehat{AB}$ din $\mathcal{C}_2$ are măsura $120°$ şi, de aici, concluzia problemei.



VII.178. *Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, R)$ şi tangentele AB şi AC perpendiculare, duse din punctul A exterior cercului. Paralela prin B la AC taie a doua oară cercul în E, iar AE taie a doua oară cercul în D. Demonstraţi că paralela prin C la BD trece prin mijlocul segmentului OB.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Fie $\{G\} = BD \cap AC$ şi $CF \| BD$, $F \in BE$. Este evident că BE este diametru al cercului, $ABOC$ este pătrat, iar $BD \perp AE$. Aplicând teorema catetei în $\triangle BAE$, obţinem că $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AB^2}{BE^2} = \dfrac{1}{4}$, deci $\dfrac{AG}{BE} = \dfrac{1}{4}$ şi atunci G va fi mijlocul lui AC. Pe de altă parte, $BGCF$ este paralelogram, prin urmare $BF = GC = \dfrac{1}{2}BO$.



Clasa a VIII-a

VIII.172. *Determinaţi numerele reale x şi y pentru care*

$$\{x\}^2 + \{y\}^2 = 0,2 \quad \text{şi} \quad \{-x\}^2 + \{-y\}^2 = 1.$$

Bogdan Chiriac, Bacău

Soluţie. Nu putem avea $\{x\} = 0$ sau $\{y\} = 0$. Cum $\{-a\} = 1 - \{a\}$, $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, a doua relaţie devine $(1 - \{x\})^2 + (1 - \{y\})^2 = 1$, adică $2 - 2(\{x\} + \{y\}) + 0,2 = 1$, prin urmare $\{x\} + \{y\} = 0,6$. Înlocuind $\{y\} = 0,6 - \{x\}$ în prima relaţie, obţinem că $\{x\}^2 - 0,6 \cdot \{x\} + 0,08 = 0$, de unde $\{x\} = 0,4$ sau $\{x\} = 0,2$. Soluţiile sistemului sunt perechile $(a + 0,4; b + 0,2)$ şi $(a + 0,2; b + 0,4)$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$.

VIII.173. *Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(x, y, z) = x^2 + xy + xz + yz$, dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $xyz(x + y + z) = 1$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Din $xyz(x + y + z) = 1$ obţinem că $x^2 + xy + xz = \dfrac{1}{yz}$ şi atunci $E(x, y, z) = \dfrac{1}{yz} + yz \geq 2$. Însă $E(\sqrt{2} - 1, 1, 1) = 2$, prin urmare $E_{\min} = 2$.

VIII.174. *Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(a, b, c) = \dfrac{(a + b)^2}{3bc + 1} + \dfrac{(b + c)^2}{3ca + 1} + \dfrac{(c + a)^2}{3ab + 1}$, dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu $ab + bc + ca = 3$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Utilizând inegalitatea lui Bergström, obţinem:

$$E(a,b,c) \geq \frac{(2a+2b+2c)^2}{12} = \frac{a^2+b^2+c^2+6}{3} \geq \frac{ab+bc+ca+6}{3} = 3.$$

Cum $E(1,1,1)=3$, rezultă că $E_{\min}=3$.

VIII.175. *Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive, demonstraţi că*

$$\frac{1}{(a+b)^2+9} + \frac{1}{(b+c)^2+9} + \frac{1}{(c+a)^2+9} \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Se arată uşor că

$$\frac{1}{(a+b)^2+9} \leq \frac{1}{6(a+b)} \leq \frac{1}{24}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

cu egalitate când $a=b=\dfrac{3}{2}$. Scriind încă două inegalităţi analoage şi sumând, obţinem concluzia. Egalitatea se obţine pentru $a=b=c=\dfrac{3}{2}$.

VIII.176. *Fie x,y numere reale pozitive astfel încât $x^3+y^3=axy$, cu $a>0$. Demonstraţi că:*

a) $x+y \leq a$; b) $x^2+y^2 \leq \dfrac{a^2}{2}$.

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. a) Înmulţind ambii membri ai inegalităţii $x^2+y^2-xy \geq xy$ cu $x+y$ şi ţinând seama de ipoteză, obţinem că $axy \geq xy(x+y)$, de unde $a \geq x+y$. Egalitatea se atinge când $x=y$.

b) Din $C-B-S$ rezultă că $(x+y)(x^3+y^3) \geq (x^2+y^2)^2$. Atunci $a \cdot axy \geq (x+y)(x^3+y^3) \geq (x^2+y^2)^2 \geq (x^2+y^2)\cdot 2xy$ şi, de aici, concluzia. Egalitatea se atinge când $x=y$.

VIII.177. *Se consideră prisma triunghiulară dreaptă $ABCDEF$ şi punctul O situat în interiorul ei. Demonstraţi că media aritmetică ponderată a distanţelor de la O la planele (BCE), (ACF), (ABE), (ABC) şi (DEF) cu ponderile a,b,c,p respectiv p, este constantă (unde a,b,c,p notează uzual elementele triunghiului ABC).*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

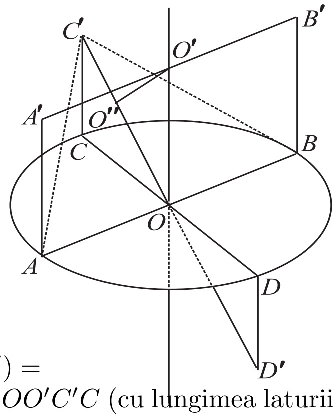
Soluţie. Fie (MNP) planul care trece prin O şi este paralel cu bazele, cu $M \in AD$, $N \in BE$ şi $P \in CF$; atunci $MN=c$, $NP=a$, $MP=b$. Notăm $x=d(O,(BCD))=d(O,NP)$, $y=d(O,(ACF))=d(O,MP)$, $z=d(O,(ABE))=d(O,MN)$, $u=d(O,(ABC))$, $v=h-u=d(O,(DEF))$, unde h este înălţimea prismei, iar r este raza cercului înscris în $\triangle ABC$. Cum $\mathcal{A}_{MNP}=\mathcal{A}_{ONP}+\mathcal{A}_{OPM}+\mathcal{A}_{OMN}$, obţinem că $2rp=ax+by+cz$. Media ponderată dorită este

$$M=\frac{x\cdot a+y\cdot b+z\cdot c+u\cdot p+v\cdot p}{a+b+c+2p}=\frac{2r_p+h_p}{4p}=\frac{r}{2}+\frac{h}{4}=\text{constant}.$$

VIII.178. *Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O,R)$ şi doi diametri perpendiculari AB şi CD. Pe perpendicularele pe planul cercului duse în extremităţile A, B, C, D se iau punctele A', B', C', respectiv D' astfel încât $AA' = BB' = CC' = DD' = R$, A' şi B' să fie de aceeaşi parte a planului cercului, iar C' şi D' de părţi diferite ale lui. Calculaţi, în funcţie de R, distanţa dintre dreptele $A'B'$ şi $C'D'$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Mai întâi, observăm că dreptunghiul $AA'BB'$ şi paralelogramul $CC'DD'$ au planele perpendiculare, iar intersecţia lor este dreapta Ox (perpendiculara în O pe cerc).



Deoarece $A'B' \| AB$, rezultă că dreapta $A'B'$ este paralelă cu planul (ABC'), plan ce conţine dreapta $C'D'$. Fie O' intersecţia dreptelor $A'B'$ şi Ox. Avem că $d(A'B', C'D') = d(O', (ABC'))$.

Să notăm cu O'' proiecţia punctului O' pe dreapta $C'D'$ şi să arătăm că $O'O'' \perp (ABC')$. Într-adevăr, din faptul că $AB \perp (CC'DD')$ rezultă că $AB \perp O'O''$, deci $O'O'' \perp AB$. Cum avem şi $O'O'' \perp C'D'$, deducem că $O'O'' \perp (ABC')$.

Constatăm, din cele stabilite mai sus, că $d(A'B', C'D') = O'O''$. Dar $O'O''$ este jumătate din diagonala pătratului $OO'C'C$ (cu lungimea laturii R). Deci $O'O'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ şi $d(A'B', C'D') = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$.

Clasa a IX-a

IX.146. *Fie M, N, P, Q mijloacele a patru laturi consecutive ale unui poligon cu $n \geq 4$ laturi. Dacă $MNPQ$ este paralelogram, arătaţi că $n = 4$.*

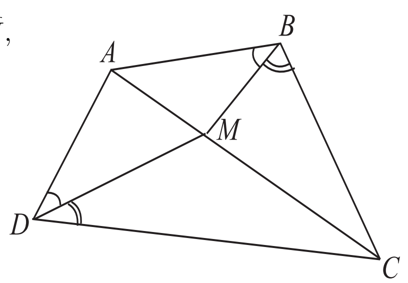
Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD respectiv DE. Avem: $MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \vec{r}_M + \vec{r}_p = \vec{r}_N + \vec{r}_Q \Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D = \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E \Leftrightarrow \vec{r}_A = \vec{r}_E \Leftrightarrow A = E \Leftrightarrow n = 4$.

IX.147. *Fie M un punct în interiorul patrulaterului convex $ABCD$ astfel încât unghiurile $\widehat{AMB}$ şi $\widehat{CMD}$ sunt neascuţite, iar triunghiurile AMD şi BMC sunt neobtuzunghice. Notăm cu R_1, R_2, R_3 şi R_4 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM, BCM, CDM, respectiv DAM. Dacă $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$, arătaţi că $ABCD$ este romb.*

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Nicuşor Minculete, Braşov

Soluţie. Cum $AM = 2R_1 \sin\widehat{ABM} = 2R_4 \sin\widehat{ADM}$, unghiurile $\widehat{ABM}$, $\widehat{ADM}$ sunt ascuţite sau drepte şi $R_1 = R_4$, rezultă că $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ADM}$. Analog se arată că $\widehat{CBM} \equiv \widehat{CDM}$, prin urmare $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}$. În acelaşi mod obţinem că $\widehat{BAD} \equiv \widehat{BCD}$, aşadar $ABCD$ este paralelogram.



Întrucât $AB = 2R_1 \sin \widehat{AMB}$, $CD = 2R_3 \sin \widehat{CMD}$, $AB = CD$, $R_1 = R_3$ şi unghiurile $\widehat{AMB}$ şi $\widehat{CMD}$ sunt ambele neascuţite, deducem că $\widehat{AMB} \equiv \widehat{CMD}$. Similar, $\widehat{AMD} \equiv \widehat{BMC}$; atunci $2m(\widehat{AMB}) + 2m(\widehat{BMC}) = 2\pi$, de unde rezultă că punctele A, M, C sunt coliniare şi, analog, punctele B, M şi D sunt coliniare, iar $AC \cap BD = \{M\}$. Avem că $AB = 2R_1 \sin \widehat{AMB}$, iar $BC = 2R_2 \sin(\pi - \widehat{AMB}) = 2R_2 \sin \widehat{AMB}$; cum $R_1 = R_2$, deducem că $AB = BC$ şi, astfel, $ABCD$ va fi chiar romb.

IX.148. *Arătaţi că într-un triunghi oarecare avem:* $\cos A \cos B \cos C \leq \dfrac{\sqrt{3}S}{18R^2}$.

Andi Gabriel Brojbeanu, elev, Târgovişte

Soluţie. Fie D, E, F picioarele înălţimilor coborâte din A, B, respectiv C şi H ortocentrul triunghiului ABC. Se obţine uşor că $EF = R \sin 2A$ (de exemplu, cu teorema sinusului aplicată în $\triangle AEF$, care este înscris în cercul de diametru $AH = 2R \cos A$), $DF = R \cos 2B$ şi $DE = R \cos 2C$. Pentru semiperimetrul şi aria triunghiului ortic deducem: $p' = \dfrac{S}{R}$ şi $S' = 2S \cos A \cos B \cos C$. Ca urmare, $r' = 2R \cos A \cos B \cos C$.

Aplicând inegalitatea lui Mitrinović relativ la triunghiul ortic DEF, avem că $p' \geq 3\sqrt{3}r'$, ceea ce este echivalent cu inegalitatea de demonstrat.

Avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul dat este echilateral.

IX.149. *Considerăm şirul* $(a_n)_{n\geq 0}$ *definit prin:* $a_0 = x \in \mathbb{R}$, $3a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 18$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Demonstraţi că există o infinitate de valori iraţionale ale lui x pentru care toţi termenii şirului* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sunt numere naturale.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. Relaţia de recurenţă se poate scrie sub forma $\dfrac{1}{3}(a_{n+1}-3) = (\dfrac{1}{3}(a_n-3))^2$; atunci şirul $b_n = \dfrac{1}{3}(a_n - 3)$ are proprietatea că $b_{n+1} = b_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, prin urmare $b_n = b_0^{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $a_n = 3\left[\dfrac{1}{3}(x-3)\right]^{2^n} + 3$. Alegând $x = 3a\sqrt{3} + 3$, $a \in \mathbb{N}^*$, avem că $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ şi $a_n = 3(a^{2^n} \cdot 3^{2^{n-1}} + 1) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

IX.150. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, *cu* $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ *care au proprietatea că* $f(1 + f(2)) = f(2 + f(3)) = f(3 + f(4))$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Egalitatea $f(1+f(2)) = f(2+f(3))$ conduce la $(5a+b+1)(3a+b+5ab+2ac+13a^2) = 0$, iar din $f(2 + f(3)) = f(3 + f(4))$ se obţine că $(7a + b + 1)(5a + b + 7ab + 2ac + 25a^2) = 0$. Tripletele $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ căutate sunt soluţiile sistemelor

I. $\begin{cases} 5a + b + 1 = 0 \\ 7a + b + 1 = 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 5a + b + 1 = 0 \\ 5a + b + 7ab + 2ac + 25a^2 = 0 \end{cases}$;

III. $\begin{cases} 7a + b + 1 = 0 \\ 3a + b + 5ab + 2ac + 13a^2 = 0 \end{cases}$; IV. $\begin{cases} 3a + b + 5ab + 2ac + 13a^2 = 0 \\ 5a + b + 7ab + 2ac + 25a^2 = 0 \end{cases}$.

Autorul rezolvă sistemele cu ajutorul calculatorului, obţinând soluţiile
$(1, -6, 9)$; $(-1, 4, -2)$; $(1 - 8, 16)$; $(-1, 6, -7)$; $(1, -7, 13)$; $(-1, 5, -5)$.

Clasa a X-a

X.146. *Pe laturile triunghiului ABC ca baze, se construiesc triunghiurile isoscele asemenea MAB, NAC şi PBC astfel încât M şi N se află în exteriorul triunghiului ABC, iar P se află în interiorul acestuia.*

a) *Arătaţi că patrulaterul $AMPN$ este paralelogram.*

b) *Demonstraţi că $AMPN$ este romb dacă şi numai dacă $AB = AC$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţia 1 (Gheorghe Iurea). În raport cu un reper oarecare în planul complex, notăm cu x afixul punctului X. Fie $m(\widehat{ANC}) = m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BPC}) = t$ şi $z = \cos t + i \sin t$. Din $c - n = z(a - n)$ obţinem că $n = \dfrac{c - az}{1 - z}$; analog, $m = \dfrac{a - bz}{1 - z}$ şi $p = \dfrac{c - bz}{1 - z}$. Se observă că $a + p = m + n$, prin urmare $AMPN$ este paralelogram. Avem: $AMPN$ romb $\Leftrightarrow AM = AN \Leftrightarrow |m - a| = |n - a| \Leftrightarrow \dfrac{|a - b|}{|1 - z|} = \dfrac{|a - c|}{|1 - z|} \Leftrightarrow AB = AC$.

Soluţia 2 (a autorului). Deoarece $\widehat{MBP} \equiv \widehat{ABC}$ şi $\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{BP}{BC}$, rezultă că $\triangle MBP \sim \triangle ABC$; analog se arată că $\triangle NPC \sim \triangle ABC$, aşadar $\triangle MBP \sim \triangle NPC$. Însă $BP = PC$, deci $\triangle MBP \equiv \triangle NPC$. Deducem că $NP = MB = MA$ şi $MP = NC = AN$, prin urmare patrulaterul $AMPN$ are laturile opuse egale, adică este paralelogram. Întrucât $\triangle MAB \sim \triangle NAC$, avem: $AMPN$ romb $\Leftrightarrow AM = AN \Leftrightarrow \dfrac{MA}{NA} = 1 \Leftrightarrow \triangle MAB \equiv \triangle NAC \Leftrightarrow AB = AC$.

X.147. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia*

$$\frac{1}{1 + 2^x} + \frac{1}{1 + 3^x} + \frac{1}{1 + 5^x} = 1 + \frac{1}{1 + 30^x}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Cu notatiile $a = 2^x$, $b = 3^x$, $c = 5^x$, $a, b, c > 0$, ecuaţia devine succesiv:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 + a} - \frac{1}{1 + abc} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (bc - 1)\left(\frac{a}{(1 + a)(1 + abc)} - \frac{1}{(1 + b)(1 + c)}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (bc - 1)(ab - 1)(ac - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Rezultă că $6^x = 1$ sau $10^x = 1$ sau $15^x = 1$, prin urmare singura soluţie este $x = 0$.

X.148. *Determinaţi funcţiile $f : (1, \infty) \to (1, \infty)$ cu proprietatea că $f(x^y) = (f(x))^y$, $\forall x \in (1, \infty)$, $\forall y \in (0, \infty)$.*

Ion Nedelcu, Ploieşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Fie $x \in (1, \infty)$ şi $y = \dfrac{1}{\ln x} \in (0, \infty)$; cum $x^y = e$, rezultă că $(f(x))^{\frac{1}{\ln x}} = f(e)$, $\forall x \in (1, \infty)$, deci $f(x) = a^{\ln x}$, unde $a = f(e) > 1$. Notând $\alpha = \ln a > 1$, am obţinut că $f(x) = x^{\ln a} = x^{\alpha}$, $\forall x \in (1, \infty)$, iar funcţiile de acest tip verifică ecuaţia funcţională din enunţ.

X.149. *Afixele vârfurilor unui triunghi echilateral sunt numerele complexe a, b şi c. Considerăm numărul complex $z = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{b-c} + \dfrac{c}{c-a}$. Demonstraţi că partea reală a lui z este $\dfrac{3}{2}$.*

Sven Cortel, elev, Satu Mare

Soluţie. Trebuie să arătăm că $2z - 3 \in i\mathbb{R}$, adică $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{b+c}{b-c} + \dfrac{c+a}{c-a} \in i\mathbb{R}$. Fie q afixul centrului Q al triunghiului echilateral ABC din enunţ, iar M, N şi P sunt mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB. Cum $QM \perp BC$, obţinem că $\dfrac{q - \frac{b+c}{2}}{b-c} \in i\mathbb{R}$. Scriem încă două relaţii similare şi, prin sumare, rezultă că

$$q\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a}\right) \in i\mathbb{R}.$$

Suma din prima paranteză este egală cu $\dfrac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. Deoarece $\triangle ABC$ este echilateral, numărătorul acestei fracţii este 0, şi de aici, concluzia problemei.

X.150. *Spunem că o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este ,,aproape identică" dacă există o funcţie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $f(f(n)) + g(f(n)) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

a) *Dacă funcţia f este aproape identică, arătaţi că funcţia asociată g este definită prin $g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

b) *Daţi exemplu de funcţie aproape identică, alta decât funcţia identică.*

c) *Demonstraţi că singura funcţie aproape identică şi monotonă este funcţia identică.*

Claudiu Mîndrilă, Târgovişte

Soluţie. a) Fie f o funcţie aproape identică. Dacă $f(n) = f(m)$, atunci $f(f(n)) + g(f(n)) = f(f(m)) + g(f(m))$, prin urmare $n = m$, deci f este injectivă. Notăm $h = f \circ f$; funcţia h este injectivă şi $h(n) = -g(f(n)) \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se arată prin inducţie, folosind această relaţie, faptul că h este funcţia identică. Atunci f va fi bijectivă şi, cum $g(f(n)) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, urmează că $g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) De exemplu, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + (-1)^n$.

c) Funcţia f fiind injectivă, monotonia va fi strictă. Codomeniul $\mathbb{N}$ având un cel mai mic element, f nu poate strict descrescătoare, aşadar va fi strict crescătoare. Prin inducţie, se arată că $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Clasa a XI-a

XI.146. *Dacă x este număr real pozitiv, arătaţi că*

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+(x+1)^2} < \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}^2(x+1) - \operatorname{arctg}^2 x\right) < \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{1+x^2}.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$, având derivata $f'(x) = \dfrac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Aplicând teorema lui Lagrange, există $\overline{x} \in (x, x+1)$ pentru care

$\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}^2(x+1) - \operatorname{arctg}^2 x) = \frac{\operatorname{arctg} \overline{x}}{1+\overline{x}^2}$. Ţinând seama de faptul că funcţia arctg este strict crescătoare, se arată imediat că $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+(x+1)^2} < \frac{\operatorname{arctg} \overline{x}}{1+\overline{x}^2} < \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{1+x^2}$.

XI.147. *Considerăm şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin:* $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.*

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Gheorghe Szöllösy, Sighetu Marmaţiei

Soluţie. Luând $y_n = nx_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ verifică recurenţa $y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{n^2}{y_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $y_1 = x_1 > 0$. Se arată, prin inducţie, că $y_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Folosind inegalitatea mediilor, obţinem că $y_{n+1} \geq \sqrt{y_n \cdot \frac{n^2}{y_n}} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem că $y_n > n$, $\forall n \geq 2$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Pe de altă parte, $y_{n+1} - y_n = \frac{n^2 - y_n^2}{2y_n} < 0$, $\forall n \geq 2$, deci $(y_n)_{n\geq 2}$ este descrescător. Contradicţia la care am ajuns arată că există $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$ pentru care $y_{n_0} \leq n_0$. Prin inducţie, obţinem că $y_n \leq n$, $\forall n \geq n_0$, prin urmare $n-1 \leq y_n \leq n$, $\forall n \geq n_0$. Astfel, $\frac{n-1}{n} \leq x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

XI.148. *Dacă* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *sunt şiruri de numere reale,* $(x_n)_{n\geq 1}$ *crescător, astfel încât* $nx_{n+2} - (n+1)x_{n+1} \leq y_n \leq nx_{n+1} - (n+1)x_n$, $\forall n \geq 1$, *atunci şirul* $\frac{y_n}{n^2}$ *este convergent.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie. Împărţind prin $n(n+1)$ relaţia din enunţ, obţinem

$$(*) \qquad \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{n+1} - \frac{x_{n+1}}{n(n+1)} \leq \frac{y_n}{n(n+1)} \leq \frac{x_{n+1} - x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n(n+1)}, \ \forall n \geq 1.$$

Notăm $b_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{n}$, $n \geq 1$; acest şir va fi descrescător, cu termeni pozitivi, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$. Din lema Stolz-Cesàro,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{(n+1)(n+2) - n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{2(n+1)} = \frac{\ell}{2}.$$

Folosind teorema cleştelui şi relaţia (*), rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{n(n+1)} = \frac{\ell}{2}$, aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{n^2} = \frac{\ell}{2}$.

XI.149. *Dreapta* $y = kx$, $k > 0$, *intersectează hiperbola* $xy = a$, $a > 0$, *în punctul de abscisă pozitivă* X. *Tangenta în* X *la hiperbolă taie axa* Ox *în punctul* Y. *Determinaţi valorile lui* k *pentru care triunghiul* OXY *este echilateral.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Obţinem, după calcule, că $X\left(\sqrt{\frac{a}{k}}, k\sqrt{\frac{a}{k}}\right)$, ecuaţia tangentei în X la hiperbolă este $y-k\sqrt{\frac{a}{k}}=-k\left(x-\sqrt{\frac{a}{k}}\right)$, iar $Y\left(2\sqrt{\frac{a}{k}},0\right)$. Triunghiul OXY este echilateral dacă şi numai dacă $OX=OY=XY$, adică $\sqrt{\frac{a(k^2+1)}{k}}=2\sqrt{\frac{a}{k}}$, de unde $k=\sqrt{3}$.

XI.150. *Determinaţi matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu $A^3 = \begin{pmatrix} 20 & 4 & a \\ -32 & 0 & b \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, ştiind că polinomul $f(X) = \det(XI_3 - A)$ are toate rădăcinile reale.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f; atunci $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = tr(A^3) = 24$ şi $x_1x_2x_3 = \det A = \sqrt[3]{(\det A)^3} = 8$, prin urmare $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = 0$. Rezultă că $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) = 0$, deci una dintre cele două paranteze se va anula.

Dacă $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, atunci $tr\, A = 0$, aşadar $f = X^3 - mX - 8$, $m \in \mathbb{R}$. Cum $f(A) = O_3$, deducem că $mA = A^3 - 8I_3 \overset{not.}{=} B$. Avem că $B = \begin{pmatrix} 12 & 4 & a \\ -32 & -8 & b \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $\det B = -128$ şi $\det B = m^3 \det A$; obţinem că $m = -2\sqrt[3]{2}$, prin urmare $A = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}B$.

Dacă $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3 = 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, deci $\operatorname{tr} A = 6$ şi $f(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$. Întrucât $f(A) = O_3$, rezultă că $6A^2 - 12A = B$, de unde $12A^2 + BA = 6A^3$. Din aceste ultime două egalităţi obţinem că $(24I_3 + B) \cdot A = 4(B + 12I_3)$ şi, prin trecere la determinanţi, ajungem la contradicţia $55 = 56$.

Clasa a XII-a

XII.146. *Se consideră şirul $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{pn}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ este fixat. Demonstraţi că nu există polinoame $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea că $\frac{f(n)}{g(n)} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Gabriela Drînceanu şi Răzvan Drînceanu, Craiova

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că există $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $\frac{f(n)}{g(n)} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Însă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{Q}$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \pm\infty$, în timp ce $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln p \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, contradicţie.

XII.147. *Calculaţi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\sin 4x}}}dx$.*

$\boxed{\textbf{Bogdan Victor Grigoriu}}$

Soluţie. Avem $\sqrt{2+2\sin 4x} = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\left|\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; $\sqrt{2+\sqrt{2+2\sin 4x}} = \sqrt{2(1+\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right))} =$

$\sqrt{4\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)} = 2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Atunci $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)} dx =$ $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{16}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\operatorname{ctg}^2\dfrac{3\pi}{16}\right)$.

XII.148. *Fie $a, b \in [1, \infty)$, $a < b$ şi funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, astfel încât $f(a) = f(b)$. Demonstraţi că* $\min\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq \dfrac{2b}{b-a} \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Integrând prin părţi, obţinem că $\displaystyle\int_a^b xf''(x)dx = xf'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)dx =$ $bf'(b)-af'(a)$. Pe de altă parte, conform teoremei de medie, $\displaystyle\int_a^b xf''(x)dx = (b-a)c\cdot$ $f''(c)$, cu $c \in (a, b)$. Rezultă că $(b-a)\cdot c\cdot|f''(c)| = |bf'(b)-af'(a)| \leq b\cdot|f'(b)|+a\cdot|f'(a)|$. Cum $c > a \geq 1$, avem că $(b-a)c \cdot |f''(c)| \geq (b-a)|f''(c)| \geq (b-a) \min\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Apoi, $b \cdot |f'(b)| + a \cdot |f'(a)| \leq b \cdot |f'(b)| + b|f'(a)| \leq 2b \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Am arătat astfel că $(b-a) \min\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq 2b \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, de unde concluzia problemei.

XII.149. *Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia* $x^7 - 5x^6 + 11x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 13x^2 + 5x - 3 = 0$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Ecuaţia se factorizează sub forma $(x^2+1)[(x-1)^5-2]=0$ şi are soluţiile complexe $\pm i$, respectiv $1 + \varepsilon_k \cdot \sqrt[5]{2}$, unde $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{5} + i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$, $k = \overline{0, 4}$.

XII.150. *Fie G un grup comutativ de ordin* 2014 *şi $A = \{f_n : G \to G | f_n(x) = x^n, n = \overline{1, 2013}\}$. Determinaţi numărul automorfismelor lui A.*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Cum orice funcţie f_n este morfism, rămâne să vedem în ce condiţii f_n este bijecţie. Observăm că $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$; din teorema lui Cauchy, există elementele a, b, c ale lui G de ordine 2, 19 respectiv 53. Atunci $a \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_2$; $b \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_{19}$; $c \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_{53}$, deci o funcţie f_n de indice n cu $(n, 2014) \neq 1$ nu poate fi injectivă. În cazul în care $(n, 2014) = 1$, funcţia f_n este injectivă şi, implicit, bijectivă. În concluzie, numărul automorfismelor din A este $\varphi(2014) = 2014\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{19}\right)\left(1-\dfrac{1}{53}\right) = 936$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2014

A. Nivel gimnazial

G256. *Fie $p \geq 3$ un număr prim. Arătaţi că numărul $p \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, se scrie în mod unic ca sumă (având măcar doi termeni) de numere naturale consecutive.*

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. Căutăm $a, t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$, astfel încât $p \cdot 2^n = a + (a+1) + \ldots + (a+t-1)$; atunci $p \cdot 2^{n+1} = t(2a+t-1)$. Numerele $t \geq 2$ şi $2a+t-1$ având parităţi diferite, avem situaţiile: 1) $t = p$, $2a+t-1 = 2^{n+1}$, deci $a = \dfrac{2^{n+1}-p+1}{2}$; 2) $2a+t-1 = 1$, $t = p \cdot 2^{n+1}$, imposibil; 3) $2a+t-1 = p$, $t = 2^{n+1}$, deci $a = \dfrac{p-2^{n+1}+1}{2}$. Cum $a \in \mathbb{N}$, dacă $p \leq 2^{n+1}$ convine doar primul caz, iar dacă $p > 2^{n+1}$ convine doar cel de-al treilea. În concluzie, scrierea dorită există şi este unică.

G257. *Fie $a, n \in \mathbb{N}$, a impar şi $n \geq 2$. Aflaţi restul împărţirii numărului a^n prin $\dfrac{a^2+1}{2}$.*

Lucian Tuţescu, Craiova şi Dumitru Săvulescu, Bucureşti

Soluţie. Dacă $n = 2$, atunci $a^2 = \dfrac{a^2+1}{2} + \dfrac{a^2-1}{2}$, cu $\dfrac{a^2-1}{2} < \dfrac{a^2+1}{2}$, deci restul împărţirii este $\dfrac{a^2-1}{2}$ (şi câtul este 1). Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^n = a^{2k} = \left(2 \cdot \dfrac{a^2+1}{2} - 1\right)^{2k} = M_{\frac{a^2+1}{2}} + 1$. Restul împărţirii va fi 1 dacă $a \geq 3$, iar când $a = 1$ restul căutat este 0.

Fie $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$; atunci $a^n = a^{4k} \cdot a = (M_{\frac{a^2+1}{2}} + 1)a = M_{\frac{a^2+1}{2}} + a$. Restul dorit este a dacă $a \geq 3$, respectiv 0 când $a = 1$.

În sfârşit, fie $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$; atunci $a^n = a(a^2)^{2k+1} = a\left(2\dfrac{a^2+1}{2} - 1\right)^{2k+1} = a\left(M_{\frac{a^2+1}{2}} - 1\right) = M_{\frac{a^2+1}{2}} - a = M_{\frac{a^2+1}{2}} - \dfrac{a^2+1}{2} + \dfrac{a^2+1}{2} - a = M_{\frac{a^2+1}{2}} + \dfrac{(a-1)^2}{2}$. Restul dorit este $\dfrac{(a-1)^2}{2}$.

G258. *Determinaţi numerele $\overline{abcde}$ (în baza 10), ştiind că $a+b+c = e$ şi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{10}{e}$.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Înmulţind membru cu membru relaţiile din enunţ, obţinem că $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + \dfrac{a+b+c}{d} = 10$. Însă $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$ (cu egalitate când $a = b = c$) şi atunci $a+b+c \leq d \leq 9$. Cifrele a, b, c fiind în mod necesar nenule, rezultă că $a+b+c \in \{3, 4, \ldots, 9\}$; presupunem, pentru început, că $a \leq b \leq c$. Dacă $a+b+c = 3$, atunci $a = b = c = 1$ şi $d = e = 3$. Dacă $a+b+c = 4$, atunci $a = b = 1$, $c = 2$, deci $4 \cdot \dfrac{5}{2} + \dfrac{4}{d} = 10$, de unde $\dfrac{4}{d} = 0$, imposibil. Continuând în aceeaşi manieră, găsim numerele $11133, 22266$ şi 33399.

G259. *Descompuneţi numărul $5^{2015} - 1$ în produs de trei factori mai mari decât 5^{400}.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Notăm $m = 5^{201}$, $p = 5m^2 = 5^{403}$; atunci $5^{2015} - 1 = p^5 - 1 = (p-1)(p^4+p^3+p^2+p+1)$. Însă $p^4+p^3+p^2+p+1 = (p^2+3p+1)^2 - 5p(p+1)^2 =$

$(p^2+3p+1)^2 - 25m^2(p+1)^2 = A \cdot B$, unde $A = p^2+3p+1-5m(p+1)$, iar $B = p^2+3p+1+5m(p+1)$. Astfel, $5^{2015}-1 = (p-1)\cdot A \cdot B$ şi se observă uşor că fiecare dintre cei trei factori este mai mare decât 5^{400}.

G260. *Fie a, b, c şi d numere naturale nenule disctincte, astfel încât numărul $abcd$ să fie pătrat perfect. Demonstraţi că numărul $a^4+b^4+c^4+d^4$ se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie. Este adevărată identitatea $a^4+b^4+c^4+d^4 = (a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+(ab-cd)^2+(ab-cd)^2+(2k)^2$, unde $k^2 = abcd$, $k \in \mathbb{N}^*$. Din faptul că a, b, c, d sunt distincte, primele două paranteze vor fi nenule. În cazul în care $ab-cd=0$, vom avea că $ad-bc \neq 0$ (situaţia $ab-cd=0=ad-bc$ conduce la $b=d$, imposibil) şi atunci $a^4+b^4+c^4+d^4 = (a^2-d^2)^2+(b^2-c^2)^2+(ad-bc)^2+(ad-bc)^2+(2k)^2$.

G261. *Determinaţi numerele $x \in [1,\infty)$ cu proprietatea că $[(x-1)^3] = [x-1]^3 = [(x-1)(x-2)(x-3)]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.*

Alexandru Blaga, Satu Mare

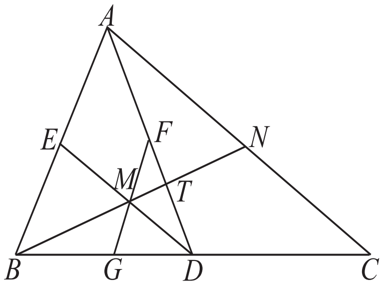
Soluţie. Dacă $x \in [1,2)$, atunci $[(x-1)^3] = [x-1]^3 = 0$ şi, cum $0 \le (x-1)(x-2)(x-3) = 4(x-1)\dfrac{2-x}{2}\cdot\dfrac{3-x}{2} \le \dfrac{4}{27}\left(x-1+\dfrac{2-x}{2}+\dfrac{3-x}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{2}$, avem că $[(x-1)(x-2)(x-3)] = 0$. Rezultă că orice număr $x \in [1,2)$ convine. Se verifică faptul că $x=2$ nu convine. Dacă $x \in (2,3]$, atunci $[(x-1)^3] \ge 1$, în timp ce $[(x-1)(x-2)(x-3)] \le 0$. Dacă $x \in (3,4]$, atunci $[(x-1)^3] \ge 8$, iar $[(x-1)(x-2)(x-3)] \le 6$. Dacă $x \in (n,n+1]$, cu $n \ge 4$, atunci $[(x-1)^3] \ge (n-1)^3$, în timp ce $[(x-1)(x-2)(x-3)] \le n(n-1)(n-2)$, iar $(n-1)^3 > n(n-1)(n-2)$.

În final, numerele căutate sunt cele din intervalul $[1,2)$.

G262. *Fie ABC un triunghi, iar D, F şi N mijloacele segmentelor BC, AD respectiv AC. Considerăm punctele $E \in (AB)$ şi $G \in (BD)$ şi notăm $\{M\} = DE \cap FG$. Dacă punctele B, M şi N sunt coliniare, arătaţi că dreptele AD şi EG sunt paralele.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Aplicăm de trei ori teorema lui Menelaus: în $\triangle ADC$ (cu transversala $B-T-N$, unde $\{T\} = BN \cap AD$), în $\triangle BDT$ (cu transversala $G-M-F$) şi în $\triangle ABT$ (cu transversala $E-M-D$). Obţinem: $\dfrac{AT}{TD}\cdot\dfrac{DB}{BC}\cdot\dfrac{CN}{NA} = 1$, de unde $\dfrac{AT}{TD} = 2$ şi, de aici, $\dfrac{DF}{FT} = 3$ şi $\dfrac{AD}{DT} = 3$; $\dfrac{BG}{GD}\cdot\dfrac{DF}{FT}\cdot\dfrac{TM}{MB} = 1$, deci $\dfrac{BG}{GD} = \dfrac{MB}{3MT}$; în sfârşit, $\dfrac{BE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DT}\cdot\dfrac{TM}{MB} = 1$, prin urmare $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{MB}{3MT}$.

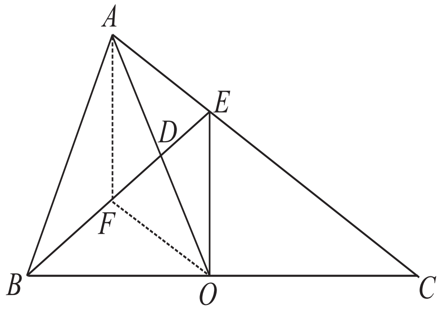


Deducem că $\dfrac{BG}{GD} = \dfrac{BE}{EA}$ şi, conform reciprocei teoremei lui Thales, $AD \| EG$.

G263. *Se consideră triunghiul ABC, O – mijlocul laturii BC, D – mijlocul segmentului AO, iar $BD \cap AC = \{E\}$. Demonstraţi că $OE = 2DE$ dacă şi numai dacă unghiul $\widehat{A}$ este drept.*

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

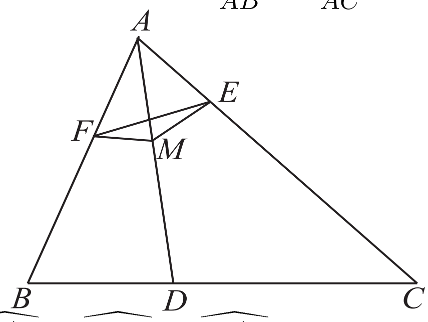
Soluţie. Notăm cu F simetricul punctului E faţă de D. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle AOC$ cu transversala $B-D-E$, obţinem că $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{1}{2}$. Apoi, cu teorema lui Menelaus în $\triangle BCE$ cu transversala $A-D-O$, găsim că $\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{1}{3}$; de aici, rezultă că F este mijlocul lui BE. Pe de altă parte, $AEOF$ este paralelogram (diagonalele se înjumătăţesc), prin urmare $AF=EO$. Avem: $OE=2DE \Leftrightarrow AF=FE \Leftrightarrow AF=\dfrac{1}{2}BE \Leftrightarrow$ $m(\widehat{A})=90^\circ$, deoarece mediana unui triunghi este egală cu jumătatea laturii pe care cade dacă şi numai dacă pleacă dintr-un unghi drept.



G264. *Considerăm triunghiul ABC, D un punct situat pe latura BC, iar E şi F sunt puncte pe AC, respectiv AB, astfel încât EF este antiparalelă la BC. Cercurile circumscrise triunghiurilor BDF şi CDE se intersectează a doua oară în punctul M. Demonstraţi că $ME=MF$ dacă şi numai dacă AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.*

Bogdan Ioniţă, Bucureşti şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece EF şi BC sunt antiparalele, avem că $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$, deci $AE\cdot AC=AF\cdot AB$, adică punctul A are aceeaşi putere faţă de cercurile circumscrise triunghiului BDF şi CDE. Deducem că axa radicală a celor două cercuri este AD, iar punctul M va fi situat pe dreapta AD. Din inscriptibilitatea patrulaterelor $BDMF$ şi $CDME$ rezultă că $m(\widehat{FME})+m(\widehat{FAE}) = m(\widehat{FMA})+m(\widehat{EMA})+m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})+m(\widehat{BAC})=180^\circ$, aşadar patrulaterul $AFME$ este inscriptibil. Atunci $\widehat{MFE}\equiv\widehat{MAE}$ şi $\widehat{MEF}\equiv\widehat{MAF}$, prin urmare $ME=MF$ dacă şi numai dacă AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.



G265. *Considerăm triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}$. Cercul $\mathcal{C}_1$ este tangent cercului $\mathcal{C}$ şi segmentelor AB şi BC în punctele M, L şi respectiv K. Dreapta AC intersectează cercurile circumscrise triunghiurilor AML şi CMK în R şi S, iar punctele E şi F sunt mijloacele arcelor $\widehat{RM}$ şi $\widehat{SM}$. Arătaţi că punctele A, C, E şi F sunt conciclice.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

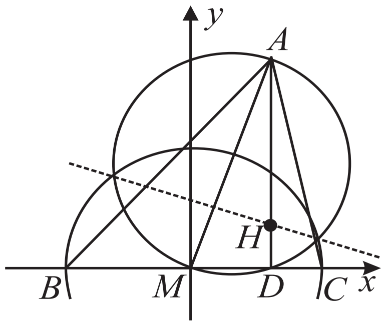
Soluţie. Notăm cu P al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor AML şi CMK. Avem: $m(\widehat{BLP})+m(\widehat{BKP})=m(\widehat{AMP})+m(\widehat{CMP})=180^\circ-m(\widehat{B})=m(\widehat{BLK})+m(\widehat{BKL})$. Deducem că $P\in KL$ şi $m(\widehat{AMP})=m(\widehat{BLK})=90^\circ-\dfrac{1}{2}m(\widehat{B})$, iar $m(\widehat{CMP})=m(\widehat{BKL})=90^\circ-\dfrac{1}{2}m(\widehat{B})$, adică MP este bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$. Din ipoteză, CF şi AE sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ACM}$, respectiv $\widehat{CAM}$, aşadar dreptele MP, AE şi CF sunt concurente într-un punct I. Folosind puterea punctului faţă de cerc, obţinem că $MI \cdot IP = AI \cdot IE = CI \cdot IF$, prin urmare punctele A, C, E şi F vor fi conciclice.

B. Nivel liceal

L256. *Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Arătaţi că axa radicală a cercurilor de diametre BC şi AM trece prin ortocentrul triunghiului ABC.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţia 1 (dată de autorul problemei şi de **Corneliu-Mănescu-Avram**, Ploieşti)**.** Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $AB > AC$. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$ şi notăm cu H punctul în care AD intersectează axa radicală din enunţ. Raportăm planul la un reper cu originea în M şi care are dreapta BC ca axă Ox; fie $A(a, b)$, cu $b > 0$. Cercul de diametru BC este $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$, iar cercul de diametru AM este $\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. Ecuaţia axei radicale este $ax + by = 1$, prin urmare $x_H = a$ şi $y_H = \dfrac{1-a^2}{b}$. Pentru $a \neq \pm 1$, panta dreptei CH este $m_{CH} = -\dfrac{a+1}{b}$, panta dreptei AB este $m_{AB} = \dfrac{b}{a+1}$, prin urmare $CH \perp AB$ şi, astfel, H este ortocentrul $\triangle ABC$. Dacă $a = 1$, atunci $C = H$ şi proprietatea este evidentă; analog pentru $a = -1$.



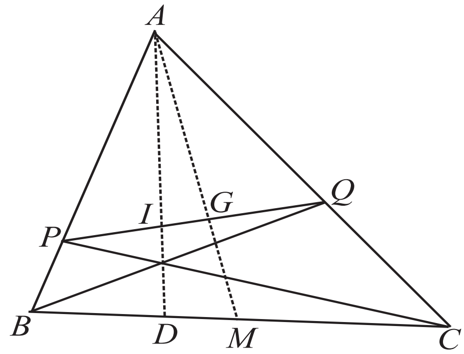
Soluţia 2 (dată de **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş, **Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Neculai Stanciu**, Buzău şi **Daniel Văcaru**, Piteşti)**.** Fie H ortocentrul triunghiului şi P mijlocul medianei AM. Trebuie să arătăm că punctul H are aceeaşi putere faţă de cele două cercuri, deci că $HP^2 - \dfrac{1}{4}AM^2 = HM^2 - \dfrac{1}{4}BC^2 (1)$. Teorema medianei aplicată în triunghiurile AHM, BHC şi ABC arată că $4HP^2 = 2AH^2 + 2HM^2 - AM^2$, $4HM^2 = 2BH^2 + 2CH^2 - BC^2$, respectiv $4AM^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Înlocuind în (1) şi efectuând callculele, această relaţie revine la $2(AH^2 + a^2) = BH^2 + b^2 + CH^2 + c^2$ şi această egalitate este adevărată, deoarece $AH = 2R\cos A$, $a = 2R\sin A$ şi $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

L257. *Fie ABC un triunghi în care $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ şi $c < a < b$. Dreapta lui Nagel (determinată de centrul cercului înscris şi de centrul de greutate) intersectează laturile AB şi AC în punctele P, respectiv Q. Demonstraţi că dreptele BQ şi CP se intersectează pe bisectoarea din A dacă şi numai dacă a este media armonică a numerelor b şi c.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie I centrul cercului înscris, G centrul de greutate, $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei din A şi M mijlocul lui BC. Avem: $BD = \dfrac{ac}{b+c}$, $CD = \dfrac{ab}{b+c}$, $DM = BM - BD = \dfrac{a(b-c)}{2(b+c)}$ şi, folosind teorema lui Van Aubel, obţinem că $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{b+c}{a}$, iar

$\dfrac{AG}{GM} = 2$. Notăm $x = \dfrac{AP}{PB}$, $y = \dfrac{AQ}{QC}$. Aplicând relaţia (R_2) din *RecMat 2/2011*, p. 108 pentru $\triangle ABM$, apoi pentru $\triangle ADC$, obţinem:



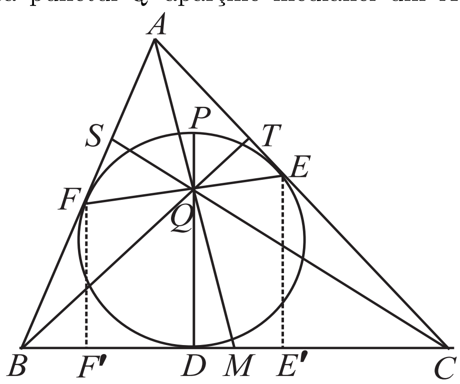
$$\frac{AI}{ID} = \frac{BM \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{AG}{GM}}{BD \cdot \dfrac{AP}{PB} + DM \cdot \dfrac{AG}{GM}} \Rightarrow x = \frac{b-c}{a-c},$$

respectiv $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{DC \cdot \frac{AI}{ID} \cdot \frac{AQ}{QC}}{DM \cdot \frac{AI}{ID} + MC \cdot \frac{AQ}{QC}} \Rightarrow y = \dfrac{b-c}{b-a}$. Cu teorema lui Ceva (directă şi reciprocă), rezultă că dreptele BQ, CP şi AD sunt concurente dacă şi numai dacă $\dfrac{DB}{DC} \cdot \dfrac{QC}{QA} \cdot \dfrac{PA}{PB} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{b-a}{b-c} \cdot \dfrac{b-c}{a-c} = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{2bc}{b+c}$.

L258. *Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor BC, CA şi AB în punctele D, E respectiv F. Perpendiculara în D pe BC taie EF în punctul Q şi cercul înscris în P. Dacă $\{T\} = BQ \cap AC$ şi $\{S\} = CQ \cap AB$, demonstraţi că punctele S, P şi T sunt coliniare.*

Bogdan Ioniţă, Bucureşti

Soluţia 1 (dată de autorul problemei şi de **Neculai Roman**, Mirceşti)**.** Folosim notaţiile uzuale în triunghi. Demonstrăm că punctul Q aparţine medianei din A a triunghiului ABC. Fie $\{M\} = AQ \cap BC$, $E' = Pr_{BC}E$ şi $F' = Pr_{BC}F$. Avem: $F'D = BD - BF' = (p-b) - (p-b)\cos B = 2(p-b)\sin^2 \dfrac{B}{2} = \dfrac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ac}$ şi, analog, $E'D = \dfrac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ab}$. Aplicând relaţia (R_2) din *RecMat 1/2005*, p. 15, obţinem că $\dfrac{AF}{AB} \cdot \dfrac{BM}{MC} \cdot \dfrac{AC}{AE} \cdot \dfrac{QE}{QF} = 1$, deci $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{c}{p-a} \cdot \dfrac{p-a}{b} \cdot \dfrac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ac} \cdot \dfrac{ab}{2(p-a)(p-b)(p-c)} = 1$, aşadar $BM = MC$.



Folosind acum relaţia (R_2) din *RecMat 1/2005*, p. 15, rezultă că $\dfrac{AQ}{QM} = \dfrac{a\frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{p-a}{p-b} + \frac{a}{2} \cdot \frac{p-a}{p-c}} = \dfrac{2(p-a)}{a}$. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle AMC$, cu transversala $B - Q - T$, avem că $\dfrac{BM}{BC} \cdot \dfrac{TC}{TA} \cdot \dfrac{QA}{QM} = 1$, deci $\dfrac{TA}{TC} = \dfrac{p-a}{a}$. Analog se arată că $\dfrac{AS}{SB} = \dfrac{p-a}{a}$, prin urmare $ST \| BC$.

Rămâne de demonstrat că distanţa dintre dreptele paralele BC şi ST este $2r$. Acest lucru revine la $\dfrac{p-a}{a} = \dfrac{h_a - 2r}{2r} \Leftrightarrow \dfrac{p}{a} = \dfrac{h_a}{2r} \Leftrightarrow 2pr = ah_a$, egalitate adevărată.

Soluţia 2 (**Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti)**.** Raportăm planul la un reper cartezian având cercul înscris în triunghi drept cerc unitate şi axa Ox paralelă cu BC; avem: $B(b,-1)$, $C(c,-1)$, $D(0,-1)$, $P(0,1)$, cu $b<-1$, $c>1$. Apoi, $E(e,\sqrt{1-e^2})$, $F(f,\sqrt{1-f^2})$, cu $0<e<1$, $-1<f<0$. Ecuaţiile tangentelor la cerc prin E şi F sunt $ex+\sqrt{1-e^2}\cdot y=1$, $fx+\sqrt{1-f^2}\cdot y=1$ şi impunem condiţiile ca ele să treacă prin B, respectiv prin C; obţinem $e=\dfrac{2c}{c^2+1}$, $f=\dfrac{2b}{b^2+1}$, iar ecuaţia dreptei EF va fi $(b+c)x+(bc-1)y=bc+1$.

Perpendiculara în D pe BC are ecuaţia $x=0$ şi taie EF în $Q\left(0,\dfrac{bc+1}{bc-1}\right)$. Dreptele AC şi BQ au ecuaţiile $2cx+(c^2-1)y=c^2+1$, respectiv $2cx+(bc-1)y=bc+1$ şi se intersectează în $T\left(\dfrac{1}{c},1\right)$. Analog, se obţine că $S\left(\dfrac{1}{b},1\right)$. Se constată că punctele S,P,T aparţin dreptei $y=1$ (tangenta la cercul înscris paralelă cu BC) ceea ce încheie soluţia problemei.

L259. *Considerăm mulţimea $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$. Pentru orice submulţime nevidă X a lui A, definim*

$$M(X)=\{t|t=xy,x\in X,y\in Y=A\backslash X\}.$$

Arătaţi că $\max\limits_{\emptyset\neq X\subset A}|M(X)|=24.$

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $a=|X|$, $b=|Y|$, cu $a,b=\overline{1,10}$, $a+b=10$; atunci $|M(X)|\le ab$. Dacă $a\le 4$, atunci $ab\le 24$, prin urmare $M(X)$ ar putea avea 25 de elemente numai dacă $a=b=5$ şi toate produsele xy cu $x\in X$, $y\in Y$ sunt distincte. Vom arăta că acest lucru nu este posibil.

Fie $X\subset A$ cu $|X|=5$. Deosebim situaţiile:

i) Atât X, cât şi Y conţin elemente de forma n şi $2n$: există $x,2x\in X$ şi $y,2y\in Y$; atunci $x\cdot 2y=y\cdot 2x$, deci $|M(X)|\le 24$.

ii) Cel puţin una dintre mulţimile X şi Y (fie aceasta X) nu conţine nicio o pereche de forma $(n,2n)$. Dacă X conţine cel puţin două numere pare $2x,2y$, atunci $x,y\in Y$ şi avem $2x\cdot y=2y\cdot x$, deci $|M(X)|\le 24$. Dacă X nu conţine numere pare, atunci $X=\{1,3,5,7,9\}$, $Y=\{2,4,6,8,10\}$ şi $1\cdot 6=3\cdot 2$, deci $|M(X)|\le 24$. În sfârşit, dacă X conţine un singur număr par, luăm fiecare situaţie în parte. De exemplu, dacă $X=\{8,\ldots\}$ şi $Y=\{2,4,6,8,10,\ldots\}$, avem cazurile: 1) $1,3\in X$; atunci $2,6\in Y$ şi $1\cdot 6=3\cdot 2$, deci $|M(X)|\le 24$; 2) $1\in X,3\in Y$; atunci $X=\{8,1,5,7,9\}$, $Y=\{2,4,6,10,2\}$ şi $1\cdot 10=5\cdot 2$, deci $|M(X)|\le 24$; 3) $1,3\in Y$; atunci $X=\{8,3,5,7,9\}$, $Y=\{2,4,6,10,1\}$ şi $3\cdot 10=5\cdot 6$, deci $|M(X)|\le 24$. Analog se procedează în celelalte situaţii.

Am arătat că $|M(X)|\le 24$. Considerând $X=\{2,3,4,6,10\}$ şi $Y=\{1,5,7,8,9\}$, se constată că $|M(X)|=24$, prin urmare $\max\limits_{\emptyset\neq X\subset A}|M(X)|=24$.

Notă. Au rezolvat problema **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău.

L260. *Spunem că numerele raţionale nenule $a_1,a_2,\ldots,a_n$ formează un grup unit dacă $a_1+2a_2+\ldots+na_n=0$ şi $n!\cdot a_1a_2\cdots a_n$ este număr natural pătrat perfect.*

Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care există grupuri unite cu n elemente.

Alexandru Blaga, Satu Mare

Soluţia 1 (a autorului)**.** Vom arăta că există grupuri unite cu n termeni pentru toate numerele n de forma $n = 3p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Pentru $p = 1$, putem considera $a_1 = 4$, $a_2 = -1$, $a_3 = -\frac{2}{3}$. Apoi, când $k = \overline{1,p}$, luăm $a_{3k+1} = \frac{1}{3k+1} \cdot a_1$, $a_{3k+2} = \frac{2}{3k+2} \cdot a_2$, $a_{3k+3} = \frac{3}{3k+3} \cdot a_3$ şi avem: $a_1 + 2a_2 + \ldots + 3pa_{3p} = p(a_1 + 2a_2 + 3a_3) = 0$, $(3p)! \cdot a_1 a_2 \ldots a_{3p} = (a_1 \cdot 2a_2 \cdot 3a_3)^p$, număr care este pătrat perfect.

Soluţia 2 (**Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş, **Gheorghe Stoica**, Petroşani)**.** Fie $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $a_i = (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$, $i = \overline{1,4k}$. Avem $\sum\limits_{i=1}^{4k} i a_i = 0$ şi $(4k)! \prod\limits_{i=1}^{4k} \left((-1)^i \cdot \frac{1}{i}\right) = 1$ este pătrat perfect.

Soluţia 3 (**Daniel Văcaru**, Piteşti, **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău)**.** Considerăm $n = 4k$ şi $a_1 = 4k$, $a_{4k} = -1$, $a_2 = 4k - 1$, $a_{4k-1} = -2, \ldots, a_{2k} = 2k+1$, $a_{2k+1} = -2k$. Evident că prima relaţie este îndeplinită, iar $n! a_1 a_2 \ldots a_n = (-1)^{2k} (n!)^2 = (n!)^2$.

L261. *Într-un şir de numere reale, un termen se numeşte acceptabil dacă poate fi scris ca suma câtorva termeni (nu neapărat distincţi) ai şirului.*

a) *Dacă toţi termenii şirului sunt numere naturale, cel puţin două relativ prime, atunci toţi termenii şirului, cu excepţia unui număr finit, sunt acceptabili.*

b) *Daţi exemplu de şir care nu are niciun termen acceptabil.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. a) Fie p, q termeni ai şirului, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare avem că $n = xp + yp$, cu $x, y \in \mathbb{N}$. Rezultă că toţi termenii $x_i \geq n$ sunt acceptabili.

b) Considerăm $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_i + x_j > 2 \geq x_k$, $\forall i, j, k \in \mathbb{N}^*$, şirul considerat nu are termeni acceptabili.

Notă. Au rezolvat problema **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău.

L262. *Considerăm şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = 0, x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, iar $x_{n+4} = 2x_{n+3} + x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n$. Arătaţi că $\frac{x_1^2}{1^2} + \frac{x_2^2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{n^2} = \frac{x_n x_{n+1}}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Se arată prin inducţie că $x_n = nF_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde F_n este al n-lea termen al şirului Fibonacci. Atunci relaţia de demonstrat revine la $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ şi se demonstrează uşor, tot prin inducţie.

Notă. Am primit soluţii corecte de la **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş, **Daniel Văcaru**, Piteşti, **Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti, **Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Neculai Stanciu**, Buzău şi **Gheorghe Stoica**, Petroşani.

L263. *Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci este adevărată inegalitatea*

$$\frac{8}{9}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)}\geq\frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Folosind identităţile $\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$ şi $(\sum a^3)-3abc=\frac{1}{2}(\sum a)(\sum(a-b)^2)$, inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv:

$$\begin{aligned}\frac{8}{9}\left(\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\right)&\geq\frac{1}{6}-\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)}\\ \Leftrightarrow\frac{4}{9}\sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}&\geq\frac{1}{12}\cdot\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}\sum(a-b)^2\\ \Leftrightarrow 16\sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}&\geq 3\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}\sum(a-b)^2.\end{aligned}$$

Observăm că este suficient să demonstrăm că

$$\frac{16(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\geq\frac{3(a+b+c)(a-b)^2}{a^3+b^3+c^3}. \tag{1}$$

Dacă $a=b$, în (1) avem egalitate. Presupunem că $a\neq b$ şi atunci inegalitatea (1) devine

$$16(a^3+b^3+c^3)\geq 3(a+b+c)(c^2+ab+bc+ca)\Leftrightarrow$$

$$13(a^3+b^3+c^3)+3(a^3+b^3)\geq 3c^2(a+b)+3\sum a\sum ab. \tag{2}$$

Cu inegalitatea lui Cebîşev şi binecunoscuta $\sum a^2\geq\sum ab$, obţinem:

$$9\sum a^3\geq 3\sum a\sum a^2\geq 3\sum a\sum ab, \tag{3}$$

iar cu inegalitatea $MA\geq MG$ avem

$$a^3+c^3+c^3\geq 3ac^2, \tag{4}$$

$$b^3+c^3+c^3\geq 3bc^2. \tag{5}$$

Adunând inegalităţile (3), (4), (5) şi $6a^3+6b^3>0$, rezultă exact inegalitatea (2). Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Notă. S-a primit soluţie corectă de la **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş.

L264. *Dacă $A, B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ sunt două matrice care comută şi $det(A^2-AB+B^2)-det(A^2+AB+B^2)+2=6detAB$, arătaţi că $det(A-B)=0$.*

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Considerăm polinomul $f(X) = \det(A + XB) = \det A + aX + bX^2 + (\det B)X^3 \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă $\varepsilon \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ este rădăcină cubică a unităţii, atunci $E = \det(A^2 - AB + B^2) - \det(A^2 + AB + B^2) = \det(A + \varepsilon B)\det(A + \overline{\varepsilon}B) - \det(A - \varepsilon B) \cdot (A - \overline{\varepsilon}B) = f(\varepsilon)f(\overline{\varepsilon}) - f(-\varepsilon)f(-\overline{\varepsilon})$. După efectuarea calculelor, găsim că $E = 4\det A \cdot \det B - (2a\det A + 2b \cdot \det B + 2ab)$. Condiţia din enunţ devine $(a + \det B)(b + \det A) = 1$ şi, cum $a, b, \det A$ şi $\det B$ sunt numere întregi, atunci $a = 1 - \det B$ şi $B = 1 - \det A$ sau $a = -1 - \det B$ şi $b = -1 - \det A$. În fiecare caz, obţinem că $\det(A - B) = f(-1) = 0$.

L265. *Fie $a_1, \ldots, a_m$ elementele idempotente din inelul $\mathbb{Z}_n$. Câte dintre sumele $a_i + a_j$, $1 \leq i < j \leq n$, sunt tot elemente idempotente?*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ descompunerea în produs de factori primi a lui n, unde $p_1 < \ldots < p_k$ sunt numere prime şi $a_1, \ldots, a_k$ sunt numere întregi pozitive. Se ştie că inelul $\mathbb{Z}_n$ este izomorf cu produsul direct $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_k^{a_k}}$, prin urmare putem rezolva problema cu acelasi enunţ referitoare la acest inel. Elementele idempotente ale produsului direct sunt de forma $(x_1, \ldots, x_k)$, unde fiecare x_i este 0 sau 1 în inelul $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ (nu vom folosi notaţii speciale pentru elementele din inele de clase de resturi). Prin urmare $(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k)$ este tot element idempotent, dacă $x_i + y_i$ este 0 sau 1 în $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Distingem două cazuri. Întâi, să presupunem că $p_1^{a_1}$ nu este egal cu 2 (adică fie că n este impar, fie că, dacă este par, atunci se divide cu 4), ceea ce înseamnă că $1 + 1 \neq 0$ în $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}}$. De asemenea, $1 + 1 \neq 0$ în fiecare $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ (căci $p_2, \ldots, p_k$ sigur nu sunt egale cu 2). Asta înseamnă că fiecare sumă $x_i + y_i$ poate fi egală cu 0 sau 1 în trei moduri ($x_i = y_i = 0$, sau $x_i = 0$ şi $y_i = 1$, sau $x_i = 1$ şi $y_1 = 0$), prin urmare $(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k)$ poate fi element idempotent în 3^n moduri, deci numărul perechilor ordonate $(x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)$ de elemente idempotente din $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_k^{a_k}}$ a căror sumă este tot un element idempotent este

$$\frac{3^k - 1}{2} + 1 = \frac{3^k + 1}{2},$$

deoarece suma $(0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0)$ este singura care se numără o singură dată.

Al doilea caz este cel în care $p_1^{a_1} = 2$, adică atunci când n se divide cu 2, dar nu cu 4. În acest caz, $x_1 + y_1$ poate fi 0 sau 1 în patru moduri (practic în toate cazurile, deoarece $1 + 1 = 0$ în $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} = \mathbb{Z}_2$), iar singurele sume numărate astfel doar o dată sunt $(0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0)$ şi $(1, 0, \ldots, 0) + (1, 0, \ldots, 0)$. Aşadar acum există

$$\frac{4 \cdot 3^{k-1}}{2} + 2 = 2 \cdot 3^{k-1} + 1$$

perechi distincte de elemente idempotente a căror sumă este tot un element idempotent.

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P297. Completaţi cu cifre căsuţele goale din şirul $1, 2, \square, 5, 6, \square, 9$, astfel încât cele şapte numere rezultate să fie în ordine crescătoare.
(*Clasa I*) **Cătălina Bulei, elevă, Iaşi**

P298. Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la 6, o singură dată fiecare. În câte moduri se pot şterge două numere astfel încât suma celor rămase să fie pară?
(*Clasa I*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

P299. Tabloul alăturat are 50 linii. De câte ori apare în el numărul 19? Explicaţi răspunsul dat.
(*Clasa I*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

P300. Aflaţi numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc} + \overline{bc} = 756$ şi $\overline{cba} + \overline{ba} = 952$.
(*Clasa a II-a*) **Maria Boutiuc, elevă, Iaşi**

P301. În desenul alăturat, pe fiecare linie sunt scrise numere consecutive astfel încât $a + d = 13$, $e + h = 21$, $i + l = 29$. Să se afle suma tuturor numerelor scrise în tabel.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

(*Clasa a II-a*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

P302. Scrieţi cel mai mare număr format din trei cifre nenule care are suma dintre cifra zecilor şi cifra unităţilor 8, iar suma dintre cifra sutelor şi cea a zecilor 9.
(*Clasa a II-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

P303. Câte numere de forma $\overline{abc}$ îndeplinesc condiţia $a \times \overline{bc} = c \times \overline{ba}$?
(*Clasa a III-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

P304. Suma unor numere naturale este 350, iar produsul lor este 35. Să se afle aceste numere.
(*Clasa a III-a*) **Iustina Diaconu, elevă, Iaşi**

P305. O familie compusă din părinţi şi doi copii merge la teatru. Ei au ocupat patru locuri consecutive pe acelaşi rând astfel încât copiii să nu stea unul lângă celălalt. În câte moduri se pot aşeza membrii familiei pe cele patru locuri?
(*Clasa a III-a*) **Dumitriţa Grigoriu, elevă, Iaşi**

P306. Spunem că două numere sunt ,,asociate" dacă suma lor se împarte exact la 2 sau la 3 sau la 5. Găsiţi toate numerele asociate cu 11 aflate între 10 şi 36.
(*Clasa a III-a*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

P307. Să de determine câte perechi de numere consecutive formate din câte trei cifre au proprietatea că primul număr se împarte exact la trei, iar al doilea se împarte exact la patru.
(*Clasa a IV-a*) **Ionuţ Airinei, elev, Iaşi**

P308. O suprafaţă dreptunghiulară de 2m× 3m se acoperă cu plăci dreptunghiulare de gresie de 25 cm × 50 cm. Se poate face lucrarea numai cu plăci întregi?
(*Clasa a IV-a*) **Marian Ciuperceanu, Craiova**

[1] Se primesc soluţii până la data de 15 ianuarie 2015.

P309. Să se găsească un număr care, adunat cu suma cifrelor sale, să dea 78912.
(*Clasa a IV-a*) **Maria Boutiuc, elevă, Iaşi**

P310. Se consideră numerele $1, 2, 3, \ldots, 9$.

a) Să se arate că numărul $1 + 2 + 3 + \ldots + 9$ se împarte exact la 3.

b) Să se arate că există cel puţin o aranjare pe dreaptă a numerelor $1, 2, 3, \ldots, 9$ astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să nu se împartă exact la 3.
(*Clasa a IV-a*) **Iulia Sticea, elevă, Iaşi**

Clasa a V-a

V.179. Arătaţi că numărul $n = 1023 \cdot 1024 + 2^{30} - 2^{20}$ se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

Viorica Dogaru, Giurgiu

V.180. Determinaţi numerele $\overline{ab}$ cu proprietatea că 2014 se divide cu $a^2 + b^2$.

Gheorghe Iacob, Paşcani

V.181. Anul naşterii unei persoane este $\overline{abcd}$, unde $b = d^2$ şi $a + b = 10$. Stabiliţi ce vârstă va avea persoana în anul $2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

V.182. Găsiţi cele mai mici cinci numere naturale n pentru care numărul $A = \frac{17}{14} + \frac{1717}{1414} + \ldots + \frac{1717\ldots17}{1414\ldots14}$ (suma are n termeni) este pătrat perfect.

Vasile Chiriac, Bacău

V.183. Stabiliţi dacă fracţia $\frac{2013^{2014} + 2014^{2013}}{2013^{2013} + 2014^{2014}}$ este subunitară, echiunitară sau supraunitară.

Diana Gregoretti, Galaţi

V.184. Fie $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care orice submulţime cu n elemente a lui E conţine două elemente a căror sumă se divide cu 3.

Viorica Momiţă, Iaşi

V.185. Pe o tablă uriaşă sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 1000, în ordine crescătoare. Cei n elevi dintr-un grup primesc numere de ordine de la 1 la n şi, în ordinea stabilită, şterg numere de pe tablă astfel: dacă un elev are număr impar, şterge toate numerele aflate pe poziţii impare în şirul de pe tablă; dacă are număr par, şterge toate numerele aflate pe poziţii pare în şirul de pe tablă. Cel de-al n-lea elev şterge ultimul număr aflat pe tablă. Stabiliţi care este acest ultim număr şters.

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.179. Măsurile a cinci unghiuri în jurul unui punct sunt exprimate, în grade, prin numerele a, b, c, d şi e. Dacă $0,75 \cdot a$; $0,6 \cdot b$ şi $0,(3) \cdot c$ sunt direct proporţionale cu $3, 3$ şi 2, iar $0,8(3) \cdot c$; $0,(5) \cdot d$ şi $0,2(7) \cdot e$ sunt invers proporţionale cu $2, 2$ şi 3, determinaţi numerele a, b, c, d şi e.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

VI.180. Determinaţi numerele naturale x şi y pentru care $x^2 + xy = y + 2014$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

VI.181. Fie a, b, c numere naturale cu proprietatea că $a^2+b^2+c^2 = ab+5bc+ca$. Arătaţi că $(a + b)(b + c)(c + a)$ este un număr divizibil cu 8.

Denisa Alexandra Luchian, elevă, Iaşi

VI.182. Se consideră numerele prime distincte p, q, r şi s, astfel încât $(r+s, q) = 1$. Aflaţi numerele naturale nenule x, y şi z astfel încât $(x + z, y) = 1$, iar $\dfrac{py}{q} = \dfrac{rz}{s} = x$.

Petru Asaftei, Iaşi

VI.183. Arătaţi că şirul $133, 13333, 1333333, \ldots$ conţine numai numere compuse.

Elena Iurea, Iaşi

VI.184. Fie $A_{2n} = \underbrace{1010\ldots10}_{2n\text{ cifre}}$ şi $B_{4n} = \underbrace{11001100\ldots1100}_{4n\text{ cifre}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c ale numerelor A_{4n} şi B_{4n}.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

VI.185. În triunghiul ABC cu $m(\widehat{B}) = 15°$ şi $m(\widehat{C}) = 30°$, mediatoarea laturii AB intersectează BC în M. Pe latura AB se consideră punctul N astfel încât $m(\widehat{AMN}) = 15°$. Arătaţi că CN este bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.179. Perechile de numere reale (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) sunt soluţii ale ecuaţiei $x^2 - 2y^2 = 1$. Arătaţi că $x_1x_2 + 2y_1y_2 \neq 0$.

Petru Asaftei, Iaşi

VII.180. Fie a, x, y astfel încât $a > 0$ şi $0 \le x, y \le a$. Arătaţi că $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - y^2} \ge \sqrt{a^2 - (x + y - a)^2}$. În ce condiţii are loc egalitatea?

Dorina Goiceanu şi Nicoleta Bran, Craiova

VII.181. Fie $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^2 + 2y$ este pătrat perfect. Arătaţi că $x^2 + y$ se poate scrie ca suma pătratelor a două numere naturale.

Aurel Chiriţă, Slatina

VII.182. Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil şi punctele M, N, P astfel încât $\{M\} = AC \cap BD$, $\{N\} = AB \cap CD$ şi $\{P\} = AD \cap BC$. Arătaţi că $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{NA}{NC} \cdot \dfrac{PA}{PC}$.

Silviu Boga, Iaşi

VII.183. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{B}) = 15°$ şi $m(\widehat{C}) = 30°$. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului. Mediatoarea laturii BC taie AB în E. Paralela prin E la OC taie BC în H. Demonstraţi că $OH \perp AB$.

Mirela Marin, Iaşi

VII.184. Se consideră triunghiul ascuţiunghic ABC, cu $AB < AC$. Fie A' piciorul bisectoarei din A, iar D este un punct pe segmentul AA' astfel încât $BA' = BD$. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABA', arătaţi că:

a) $\dfrac{AD}{AA'} = \dfrac{AB}{AC}$; b) $HD \perp AC$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

VII.185. Fie ABC un triunghi şi D, E, F puncte situate pe laturile BC, CA, respectiv AB. Paralela prin A la DE intersectează dreapta FD în punctul M. Să se demonstreze că punctul M aparţine liniei mijlocii paralele cu BC dacă şi numai dacă cevienele AD, BE şi CF sunt concurente.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a VIII-a

VIII.179. Tetraedrul $OABC$ are $OA = OB = a$, $AB = b$, iar măsura unghiului diedru dintre planele (OAB) şi (ABC) este de $u°$. Determinaţi distanţa de la punctul O la planul (ABC).

Adrian Corduneanu, Iaşi

VII.180. Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor AD, respectiv $A'D'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $\{S\} = BD' \cap (CMN)$, demonstraţi că punctele C, S, N sunt coliniare.

Mirela Marin, Iaşi

VII.181. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $a = (\sqrt{2014} + +1)(\sqrt{2014} - \sqrt{n})$ este raţional.

Ionel Tudor, Călugăreni

VII.182. Determinaţi numerele naturale $m \geq 2$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m^n - 1$ divide $7^n - 1$.

Gabriel Nemţaru, Melineşti, Dolj

VII.183. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z \geq 3$. Arătaţi că $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 3 \geq 3(x + y + z)$.

Mihai Dicu şi Lucian Tuţescu, Craiova

VII.184. Dacă $a, b, c \in [0, 1]$ nu sunt toate nule, arătaţi că $\dfrac{ab}{abc + ab + c} + \dfrac{bc}{abc + bc + a} + \dfrac{ca}{abc + ca + b} \leq 1$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

VII.185. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^{2n-1} \cdot c + a^{n-1} \cdot b + 1 < 0$. Demonstraţi că $(a - c)^2 > (a + b + c)(a - b + c)$.

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.151. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bc + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Fie S şi P suma, respectiv produsul soluţiilor ecuaţiei $f(x) = 0$, iar $\alpha = f(S)$, $\beta = f(P)$. Găsiţi soluţiile ecuaţiei $\alpha(x - P)(1 - x) = \beta x$.

Cătălin Calistru, Iaşi

IX.152. Fie $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ şi numere $a_i \in (0, \infty)$, $x_i \in [0, \infty)$, $i = \overline{1, n}$. Arătaţi că

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{a_i} \geq \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i x_j (x_i + x_j)}{a_i + a_j}.$$

Alexandru Blaga, Satu Mare

IX.153. Arătaţi că $\sum \dfrac{a^2}{r_a r_b} \geq 4$, notaţiile fiind cele uzuale în triunghi.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

IX.154. Arătaţi că $\dfrac{3R}{2r} \geq \dfrac{l_a}{l_b} + \dfrac{l_b}{l_c} + \dfrac{l_c}{l_a}$, notaţiile fiind cele uzuale în triunghi.

Vasile Jiglău, Arad

IX.155. Fie triunghiul ABC în care $AB = AC = b$, $BC = a$, $m(\widehat{BAC}) = 100°$. Arătaţi că $a^4 + 2b^4 + 2a^3b - 5ab^3 - 3a^2b^2 = 0$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Clasa a X-a

X.151. Fie $x, y, z \in (1, \infty)$ şi $a > 0$ astfel încât $\lg x\sqrt{\lg y \cdot \lg z} + \lg y\sqrt{\lg x \cdot \lg z} + \lg z\sqrt{\lg x \cdot \lg y} \geq a$. Arătaţi că $xyz \geq 10^{\sqrt{3a}}$.

Lucian Tuţescu şi Camelia Dană, Craiova

X.152. a) Arătaţi că $\dfrac{7}{6} < \lg 16 < \dfrac{4}{3}$.

b) Determinaţi primele două cifre şi ultimele două cifre ale numărului 16^6, fără a-l calcula.

Ionel Tudor, Călugăreni

X.153. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este dat, determinaţi numerele reale a şi b pentru care numărul complex $z = \dfrac{a - i}{b + i}$ este rădăcină nereală de ordin n a unităţii.

Dan Popescu, Suceava

X.154. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte. Arătaţi că

$$\max\left(\frac{1}{|z_1 - z_2|}, \frac{1}{|z_2 - z_3|}, \frac{1}{|z_3 - z_1|}\right) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3 + 3\max(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2)}.$$

Marcel Chiriţă, Bucureşti

X.155. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ având proprietăţile

(i) f este injectivă şi g este surjectivă;

(ii) $f(0) = g(0) = 0$;

(iii) $|f(m) - f(n)| \leq |g(m) - g(n)|, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţi că cele două funcţii sunt egale.

Claudiu Mîndrilă, elev, Târgovişte

Clasa a XI-a

XI.151. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin: $x_0 = 0$, $x_{n+1} = (n+1)^{x_n}$. Determinaţi numerele naturale n pentru care $x_{n+2} = x_{n+1}^3 + x_n$.

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

XI.152. Calculaţi $L_\alpha = \lim\limits_{x\to\infty} ((x+1)^\alpha \ln(x+1) - x^\alpha \ln x)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Stelian Piscan, Giurgiu

XI.153. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir şi propoziţiile: (P_1) ,,Şirul $(a_{n+1}-a_n)_{n\geq 1}$ este convergent"; (P_2) ,,Şirul $(\max(a_n, a_{n+1}))_{n\geq 1}$ este convergent"; (P_3) ,,Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent". Arătaţi că:

a) (P_1) nu implică (P_3);
b) (P_2) nu implică (P_3);
c) (P_1) şi (P_2) implică (P_3).

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.154. Determinaţi numerele reale x cu proprietatea că $9^x + 25^x = 15^x + \dfrac{19}{225}$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

XI.155. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $AB = BA$ şi numărul $a \in \left(\dfrac{1}{4}, \infty\right)$. Dacă $\det(A^2 + AB + aB^2) = 0$, arătaţi că $\det(A+B) = \det A + a\det B$.

Dan Popescu, Suceava

Clasa a XII-a

XII.151. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f=\dfrac{1}{2}+3X-4X^3$ şi $g\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right) = 0$. Demonstraţi că f divide g.

Constantin Dragomir, Piteşti

XII.152. Pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm cu $\sigma(n)$ suma divizorilor pozitivi ai lui n şi cu $\varphi(n)$ numărul numerelor din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ care sunt relativ prime cu n. Pentru $n \in \{p^\alpha | p = \text{prim}, \alpha \in \mathbb{N}$, caculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\sigma(n)\cdot\varphi(n)}}{n}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.153. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ fixat. Determinaţi funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(x) \cdot f(x) + \lambda(f(x))^2 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sven Cortel, elev, Satu-Mare

XII.154. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $x^2 f(x) \geq e^{\frac{1}{x}}$, $\forall x \in (0, \infty)$. Arătaţi că funcţia f nu are primitive.

Florin Nicolaescu, Balş

XII.155. Determinaţi funcţiile continue $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $\max\{f(a), g(a)\} \leq \displaystyle\int_0^a f(x)\cdot g(x)dx$, $\forall a \in [0, \infty)$.

Florin Stănescu, Găeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G266. Determinaţi numărul natural n minim având proprietatea: oricare ar fi mulţimea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$, există $B, C \subset A$ astfel încât $|B| = |C| = 3$, $B \cap C = \emptyset$ şi $S_B + S_C \vdots 3$. (Am notat cu S_M suma elementelor mulţimii M.)

Cristian Lazăr, Iaşi

G267. Demonstraţi că nu există numere naturale x, y prime între ele, de parităţi diferite, pentru care numărul $a = xy^3 - yx^3$ să fie pătrat perfect.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G268. Considerăm numărul $a = 0,149162536\ldots$, obţinut prin scrierea (după virgulă) a tuturor pătratelor perfecte, unul după altul. Demonstraţi că a este iraţional.

Radu Miron, elev, Iaşi

G269. Arătaţi că $A = \frac{1}{25}(9^{8n+4} + 5 \cdot 9^{6n+3} + 33 \cdot 9^{4n+2} + 5 \cdot 9^{2n+1} + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, este număr natural compus.

Lucian Tuţescu, Craiova

G270. Scrieţi în ordine crescătoare numerele 2014!, $(201!)^{4!}$ şi $(20!)^{14!}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G271. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Arătaţi că

$$\frac{x(y^2+z^2)}{y^2-yz+z^2} + \frac{y(z^2+x^2)}{z^2-zx+x^2} + \frac{z(x^2+y^2)}{x^2-xy+y^2} \geq 6xyz.$$

Cătălin Cristea, Craiova

G272. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq 9\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) - \frac{21}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

G273. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu laturile opuse neparalele şi fie O un punct în interiorul acestuia. Arătaţi că există un unic paralelogram $MNPQ$ având centrul O şi vârfurile pe dreptele AB, BC, CD respectiv DA.

Ovidiu Pop, Satu Mare

G274. Triunghiul dreptunghic neisoscel ABC are ipotenuza BC fixă, iar punctul E este situat pe cateta mai lungă astfel încât $AE = |AB - AC|$. Demonstraţi că mediatoarea segmentului AE trece printr-un punct fix.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G275. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, iar M este mijlocul muchiei AD. Planul perpendicular în B pe MB intersectează planul $(B'AC)$ după dreapta d. Notăm cu S proiecţia punctului B pe dreapta d. Determinaţi tangenta unghiului dintre dreptele AB' şi BS.

Gabriel Popa, Iaşi

B. Nivel liceal

L266. Fie n un număr natural nenul, $p = 2^{2^n} + 1$ un număr prim Fermat şi d cel mai mare divizor impar al numărului $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$. Să se demonstreze că există numărul natural a astfel încât $d \equiv a^2 (\bmod\, p)$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

L267. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $18^a + 20^a + 30^a = 19^a + 24^a + 25^a$.

Radu Miron, elev, Iaşi

L268. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, are loc inegalitatea

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{(a + b + c)^2} + \frac{2a}{2a + b + c} + \frac{2b}{a + 2b + c} + \frac{2c}{a + b + 2c} \geq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L269. Arătaţi că $a^{\sin x} \cdot (a + 1)^{\cos x} < a^2$, $\forall a, x \in \mathbb{R}$, $a \geq 2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L270. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ şi fie P un punct fixat pe înălţimea AD. O dreaptă variabilă care trece prin P intersectează laturile AB şi AC în punctele $E \in [AB]$, respectiv $F \in [AC]$. Determinaţi valorile extreme ale ariei triunghiului AEF, funcţie de $a = BC$, $b = AB = AC$ şi $d = AP$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

L271. Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{bc}{(p - a)^2} + \frac{ac}{(p - b)^2} + \frac{ab}{(p - c)^2} \geq \frac{20R - 4r}{3r}.$$

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

L272. Determinaţi valorile numărului real k pentru care există un patrulater convex $ABCD$ având lungimile laturilor a, b, c, d şi aria S, astfel încât $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 = 4kS$.

Marcel Chiriţă, Bucureşti

L273. Fie triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi A_1 centrul cercului tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $[AB$, $[AC$. În mod analog definim punctele B_1 şi C_1. Arătaţi că:

$$\sqrt{I_aA_1 \cdot I_bB_1 \cdot I_cC} + \sqrt{I_bB_1 \cdot I_cC_1 \cdot I_aA} + \sqrt{I_cC_1 \cdot I_aA_1 \cdot I_bB} = \sqrt{I_aA \cdot I_bB \cdot I_cC}.$$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L274. Fie punctele $A_1, \ldots, A_n$ şi $B_1, \ldots, B_n$ aparţinând unei elipse $\mathcal{E}$ cu centrul O. Să se arate că există un punct $M \in \mathcal{E}$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 - \sum_{k=1}^{n} MB_k^2 = \sum_{k=1}^{n} OA_k^2 - \sum_{k=1}^{n} OB_k^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L275. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ două matrice de ordinul al treilea astfel încât $AB - BA$ să fie inversabilă. Demonstraţi că

$$Tr(AB(AB - BA)^{-1}) = 1 + S(AB(AB - BA)^{-1}),$$

unde $Tr\, M$ este urma matricei M, iar $S(M)$ este suma minorilor elementelor de pe diagonala principală a lui M.

Marian Tetiva, Bârlad

Training Problems for Mathematical Contests

A. Junior Highschool Level

G266. Find the minimal natural number n with property that for any set $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{N}$, there exist $B, C \subset A$ such that $|B| = |C| = 3, B \cap C = \theta$, and $S_B + S_C \vdots 3$ (S_M is the sum of the elements from M).

Cristian Lazăr, Iaşi

G267. Prove that do not exist mutually prime natural numbers x, y of different parity so that the number $a = xy^3 - yx^3$ be a perfect square.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G268. Consider the number $a = 0.149162536\ldots$ obtained by writing (after the decimal point) all the perfect squares, one after the other. Prove that a is an irrational number.

Radu Miron, elev, Iaşi

G269. Show that $A = \dfrac{1}{25}(9^{8n+4} + 5 \cdot 9^{6n+3} + 33 \cdot 9^{4n+2} + 5 \cdot 9^{2n+1} + 1), n \in \mathbb{N}^*$, is a composed natural number.

Lucian Tuţescu, Craiova

G270. Write, in increasing order, the numbers 2014!, $(201!)^{4!}$ and $(20!)^{14!}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G271. Let x, y, z be positive real numbers such that $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Prove that

$$\frac{x(y^2 + z^2)}{y^2 - yz + z^2} + \frac{y(z^2 + x^2)}{z^2 - zx + x^2} + \frac{z(x^2 + y^2)}{x^2 - xy + y^2} \geq 6xyz.$$

Cătălin Cristea, Craiova

G272. If a, b, c are positive real numbers, show that

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq 9\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) - \frac{21}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

G273. The convex quadrilateral with non-parallel opposite sides $ABCD$ is considered and let O be an interior point to it. Show that there exists a unique parallelogram $MNPQ$ of centre O with its vertices on the lines AB, BC, CD and respectively DA.

Ovidiu Pop, Satu Mare

G274. The non-isosceles right-angled triangle ABC has the fixed hypotenuse BC, and the point E is situated on the longer cathetus such that $AE = |\, AB - AC\,|$. Show that the perpendicular on the middle of the segment AE passes through a fixed point.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G275. It is considered the cube $ABCDA'B'C'D'$, and M is midpoint of the edge AD. The perpendicular plane at B onto MB cuts the plane $(B'AC)$ along the straight line d. Let us denote by S the projection of point S onto the line d. Determine the tangent of the angle between the lines AB' and BS.

Gabriel Popa, Iaşi

B. Highschool Level

L266. Let n be a nonzero natural number, $p = 2^{2^n} + 1$ a Fermat prime number and $d =$ the largest odd divisor of the number $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$. Prove that a natural number a exists such that $d \equiv a^2 (\bmod\, p)$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

L267. Determine $a \in \mathbb{R}$ with the property that $18^a + 20^a + 30^a = 19^a + 24^a + 25^a$.

Radu Miron, elev, Iaşi

L268. Prove that the positive real numbers a, b, c satisfy the inequality

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{(a+b+c)^2} + \frac{2a}{2a+b+c} + \frac{2b}{a+2b+c} + \frac{2c}{a+b+2c} \geq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L269. Show that $a^{\sin x} \cdot (a+1)^{\cos x} < a^2$, $\forall a, x \in \mathbb{R}$, $a \geq 2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L270. It is considered the isosceles triangle ABC with $AB = AC$ and let P be a fixed point on the altitude AD. A variable line passing through P meets the sides AB and AC at the points $E \in [AB]$, respectively $F \in [AC]$. Determine the extremum values of the area of triangle AEF, as a function of $a = BC$, $b = AB = AC$ and $d = AP$

Adrian Corduneanu, Iaşi

L271. Prove that the following inequality holds in any triangle:

$$\frac{bc}{(p-a)^2} + \frac{ac}{(p-b)^2} + \frac{ab}{(p-c)^2} \geq \frac{20R - 4r}{3r}.$$

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

L272. Determine the values of the real number k such that a convex quadrilateral $ABCD$ with the side lengths a, b, c, d and area S, satisfies the equation $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 = 4kS$.

Marcel Chiriţă, Bucureşti

L273. Let the triangle ABC be inscribed in the circle $\mathcal{C}$ and let A_1 be the center of the circle which is tangent (from the exterior) to circle $\mathcal{C}$ and to the halflines $[AB$, $[AC$. The next points B_1 and C_1 are analogously defined. Show that

$$\sqrt{I_a A_1 \cdot I_b B_1 \cdot I_c C} + \sqrt{I_b B_1 \cdot I_c C_1 \cdot I_a A} + \sqrt{I_c C_1 \cdot I_a A_1 \cdot I_b B} = \sqrt{I_a A \cdot I_b B \cdot I_c C}.$$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L274. Let the points $A_1, \ldots, A_n$ and $B_1, \ldots, B_n$ be situated on an ellipse $\mathcal{E}$ with its center at O. Show that there exists a point $M \in \mathcal{E}$ such that

$$\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 - \sum_{k=1}^{n} MB_k^2 = \sum_{k=1}^{n} OA_k^2 - \sum_{k=1}^{n} OB_k^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L275. Let $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ be two matrices of order three such that $AB - BA$ is invertible. Prove that

$$Tr\,(AB(AB - BA)^{-1}) = 1 + S(AB(AB - BA)^{-1}),$$

where $Tr\,M$ is the trace of matrix M, and $S\,(M)$ is the sum of the minors of the entries on the principal diagonal of matrix M.

Marian Tetiva, Bârlad

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după jumătate de an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.

Pagina rezolvitorilor

CÂMPULUNG MUSCEL

Colegiul Naţional ,,Dinicu Golescu". **Clasa a XI-a** (prof. PETRIŞOR Constantin). NECULA Emanuel: XI(146-150), XII(146,148-150), L(262,264).

CRAIOVA

Colegiul Naţional ,,Fraţii Buzeşti". **Clasa a IX-a** (prof. TUŢESCU Lucian). GURIŢĂ Vladimir: VII(172-174,176), VIII(173,175,176), IX(148,149); NICOLĂESCU Andrei Eugeniu: VII(172,173,175), VIII(173-176), IX(148,149), X(147,149); PĂTRAŞCU Cristian: VII(172,173,175,176), VIII.174, IX(146,148); SPĂTARU Andrei Raul: VII(172,173,175,176), VIII.174, IX(148,149). **Clasa a X-a** (prof. TUŢESCU Lucian). TURCU Andrei George: VIII(173,174), IX.146, X(146,147,149).

IAŞI

Şcoala nr. 3 ,,Al. Vlahuţă". **Clasa a II-a** (prof.înv.primar MAXIM Gabriela). BARGAN Giulia: P(283-287;289,290); BUDEANU Maria: P(283-287;289,290); COSTEA Marta: P(283-287;289,290); GAVRIL Ştefan: P(283-287;289,290); OBREJA Alexia: P(283-287;289,290). **Clasa a VII-a** (prof. MARIN Mirela). CIOBANU Viviana: VI(173,178), VII.177, VIII(173,175); HERGHILIGIU-HENEA Mălina: VI(173, 178), VII.177, VIII(173,175); SÎRCU Cătălin: VI(173,178), VII.177, VIII(173,175).

Şcoala nr. 22 ,,B.P. Hasdeu". **Clasa a IV-a** (prof.înv.primar DOHOTARIU Liliana). BÂRLEANU Briana: P(283-287,289-291,295); BUNEA Ioana: P(283-287,289-293,295); CHICHIRĂU Ana-Maria: P(283-285,290,292,295); CIOBANU Marcu: P(283-286,289,293); CRUCEANU Casandra: P(284,286-291); CULCEA Armina: P(283-287,289,290,295); FURNICĂ Andrei: P(283,285,286,290,292); GĂINĂ Diana: P(283, 284,287,290,294); GRAUR Ioana: P(283-285,287,289,290,292,295); HARPA Vlad: P(283-288); LUPU Andrei: P(290-293,295); MANEA Tudor: P(283-285,287,292,295); NEPOTU Tudor: P(283-286,289,290,292,295); PETRINGEL Maria: P(283-287,290, 291,293); POPA Mihnea: P(283-287,289-296); TENEA Carina Ioana: P(283,284,287, 290,292); URSULEANU Matei: P(283-287,290,291,295).

Şcoala nr. 26 ,,George Coşbuc". **Clasa a V-a** (prof. MOMIŢĂ Viorica). CIOPEICĂ Sebastian Andrei: P(293-295), V(172-175); DURACU Mădălina-Elena: P(293-296), V(172,175); MANOLE Alexandra: P(293-296), V(172-175); RĂILEANU Ana Maria: P(293-295), V(172,173,175); VASILE Raluca-Andreea: P(293-296), V(172-175).

Şcoala nr. 33 ,,M. Kogălniceanu". **Clasa a IV-a** (înv. SÎRBU Lenuţa). CIOCOIU Alexandru Boris: P(293-296), V(176,177), VI.173.

Liceul Economic ,,Virgil Madgearu". **Clasa a IX-a** (prof. OLENIUC Claudia). ALEXA Narcisa-Gabriela: VIII(173,175,176,178), IX.146; BABII Paula Georgiana: VIII(173,175,176,178), IX.146; BÂZDÂGĂ Monica: VIII(173,175,176,178), IX.146; CIOMAGA Denisa-Mihaela: VIII(173,175,176,178), IX.146; COTEŢ Violeta: VIII(173,175,176,178), IX.146; DRUŢĂ Victoria: VIII(173,175,176,178), IX.146; GĂINĂ Mădălina: VIII(173,175,176,178), IX.146; MORĂRIŢA Mădălina: VIII(173,175, 176,178), IX.146; NEDELCU Iulia: VIII(173,175,176,178), IX.146; ROTARU Bianca: VIII(173,175,176,178), IX.146; STURZU Robert-Ştefan: VIII(173,175,176,178), IX.146;

TURBATU Alexandru: VIII(173,175,176,178), IX.146; ŢIMPĂU Andreea: VIII(173, 175,176,178), IX.146; UNGUREANU Anthilula: VIII(173,175,176,178); IX.146; ZAHARIA Cătălina: VIII(173,175,176,178), IX.146; ZARĂ Ioana-Gabriela: VIII(173,175, 176,178), IX.146. **Clasa a X-a** (prof. OLENIUC Claudia). JOLDESCU Petronela Lavinia: VIII(173,175,176,178), IX.146; LEAHU Ana: VIII(173,175,176,178), IX.146; LUNGU Adelina-Veronica: VIII(173,175,176,178), IX.146; PLOP Cosmin Alexandru: VIII(173,175,176,178), IX.146. **Clasa a XI-a** (prof. OLENIUC Claudia). ANICULĂESEI Alexandra: IX(146,147,149,150), XI.146; GHERGHEL Petruţa: IX(146,147, 149,150), XI.146; LUNGU Laurenţiu Adrian: IX(146,147,149,150), XI.146; MARIN Ileana: IX(146,147,149,150), XI.146; PLĂCINTĂ Cătălina-Aledxandra: IX(146,147, 149,150), XI.146; RĂUŢĂ Cosmin: IX(146,147,149,150), XI.146; RUSU AnaMaria: IX(146,147,149,150), XI.146; ŞCRAB Bianca-Maria: IX(146,147,149,150), XI.146.

Colegiul Naţional ,,Emil Racoviţă". **Clasa a VI-a** (prof. LOGHIN Raluca). OLENIUC Iulian: P(293,294), V(173,174), VI.176, VIII.175.

Colegiul Naţional Iaşi. **Clasa a VI-a** (prof. POPA Gabriel). STOLERU Cristina: V(172-175), VI(172-174). **Clasa a VII-a** (prof. LAZĂR Cristian). POPA Ioana-Maria: VII(172-178), VIII(172-176), G(256-264). **Clasa a VIII-a** (prof. POPA Gabriel). AŞTEFANEI Cosmin: VIII(172-178), G(256-264); OBADĂ Ştefan: VIII(172 -178), G(256-264).

ROŞIORI (BACĂU)

Şcoala Gimnazială nr. 1. **Clasa a V-a** (prof. CICEU Nela). PLOŞNIŢĂ Daniel-Cătălin: P(294,296), V(172,174,178), VI(173,176), ROMAN Vasile: P(293,296), V(172, 173,175), VI(173,174). **Clasa a VI-a** (prof. CICEU Nela). HÎRŢESCU Ciprian Gabriel: VI(173,174,176), VII(173,175), G263.

TRUŞEŞTI (BOTOŞANI)

Grup Şcolar ,,Demostene Botez". **Clasa a IX-a** (prof. CULIDIUC Cătălin). HĂLĂUCĂ Andrei: VII.173, VIII(172,175,176), IX(146,150).

ŢIGĂNAŞI (IAŞI)

Şcoala Gimnazială cu clasele I-VIII ,,M. Kogălniceanu". **Clasa a V-a** (prof. IACOB Aida-Andreea). DUCA Anamaria: P(293,296), V(172-175,178), VI.173; DUCA Ema-Ştefania: P(293,296), V(172-175,178), VI.173; DUCA Roxana Georgiana: P(293, 296), V(172-175,178), VI.173; SANDU Marta: P(293,296), V(172-175,178), VI.173. **Clasa a VI-a** (prof. IACOB Aida-Andreea). DUCA Adriana: V(172-175,178), VI.173; DUCA Denis Alexandru: V(172-175,178), VI.173; GĂNEANU Maria-Teodora: V(172-175,178), VI.173; MANDACHE Marius Iulian: V(172-175,178), VI.173; UNGUREANU Ionuţ Daniel: V(172-175,178), VI.173; POSTOLACHE Patricia: V(172-175,178), VI.173. **Clasa a VII-a** (prof. IACOB Aida-Andreea). CAZADOI Cristina Ioana: V(172-175,178), VI.173; DUCA Cristina Mihaela: V(172-175,178), VI.173; GAVRIL Mirabela: V(172-175,178), VI.173; GAVRILAŞ Mădălina Mihaela: V(172-175,178), VI.173; SANDU Ana-Paula: V(172-175,178), VI.173;; SANDU Rebeca: V(172-175,178), VI.173.

Elevi rezolvitori premiaţi

Colegiul Naţional ,,Dinicu Golescu", Câmpulung Muscel

NECULA Emanuel (cl. a XI-a): 2/2013(13p), 1/2014(11p), 2/2014(11p).

Colegiul Naţional ,,Fraţii Buzeşti", Craiova

NICOLĂESCU Andrei Eugeniu (cl. a IX-a): 1/2013(8p), 1/2014(10p), 2/2014(11p).
TURCU Andrei George (cl. a X-a): 1/2013(9p), 1/2014(7p), 2/2014(6p).

Şcoala Gimnazială cu clasele I-VIII ,,M. Kogălniceanu", Ţigănaşi (Iaşi)

SANDU Marta (cl. a V-a): 2/2013(6p), 1/2014(5p), 2/2014(8p).
DUCA Adriana (cl. a VI-a): 2/2013(5p), 1/2014(7p), 2/2014(6p).
DUCA Denis Alexandru (cl. a VI-a): 2/2013(5p), 1/2014(7p), 2/2014(6p).
GĂNEANU Maria-Teodora (cl. a VI-a): 2/2013(5p), 1/2014(7p), 2/2014(6p).
CAZADOI Cristina Ioana (cl. a VII-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(6p).
SANDU Ana-Paula (cl. a VII-a): 1/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(6p).

Şcoala nr. 26 ,,George Coşbuc", Iaşi

CIOPEICĂ Sebastian Andrei (cl. a V-a): 2/2013(5p), 1/2014(7p), 2/2014(8p).
MANOLE Alexandra (cl. a V-a): 2/2013(9p), 1/2014(7p), 2/2014(8p).
RĂILEANU Ana Maria (cl. a V-a): 2/2013(9p), 1/2014(6p), 2/2014(6p).

Liceul Economic ,,Virgil Madgearu", Iaşi

GHERGHEL Petruţa (cl. a XI-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).
JOLDESCU Petronela Lavinia (cl. a X-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).
LUNGU Adelina-Veronica (cl. a X-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).
MARIN Ileana (cl. XI-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).
PLĂCINTĂ Cătălina-Alexandra (cl. a XI-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).
PLOP Cosmin Alexandru (cl. a X-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).
ŞCRAB Bianca-Maria (cl. a XI-a): 2/2013(5p), 1/2014(5p), 2/2014(5p).

Colegiul Naţional Iaşi.

POPA Ioana-Maria (cl. a VII-a): 2/2013(13p), 1/2014(20p), 2/2014(16p).

Premiu pe anul 2014 acordat de Asociaţia ,,Recreaţii Matematice"

Se acordă un premiu în valoare de 200 lei elevului

Andi Gabriel BROJBEANU

pentru următoarele Note:
- *Caracterizare a unor proprietăţi de perpendicularitate în care sunt implicate punctele* O, I, H, G, O_9 (2/2013, p. 106),
- *Câteva proprietăţi remarcabile ale triunghiului dreptunghic* (1/2014, p. 30),
- *Procedeu de demonstrare a unor inegalităţi bazat pe inegalitatea lui Schur* (2/2014, p. 19).

Revista semestrială **RECREAŢII MATEMATICE** este editată de **ASOCIAŢIA „RECREAŢII MATEMATICE”**. Apare la datele de 1 martie şi 1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenţilor şi tuturor celor pasionaţi de matematica elementară.

În atenţia tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacţiei spre publicare (note şi articole, chestiuni de metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi concis; ele trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se recomandă ca textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie originale şi să nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.** Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie însoţite de fişierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunţ şi demonstraţie/ rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoţite de numele autorului, şcoala şi localitatea unde lucrează/învaţă.

Redacţia va decide asupra oportunităţii publicării materialelor primite.

În atenţia elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacţiei soluţii corecte la problemele din rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregătirea concursurilor** vor fi menţionate în **Pagina rezolvitorilor**. Elevii menţionaţi de trei ori vor primi o **diplomă** şi un **premiu în cărţi**. Elevii rezolvitori vor ţine seama de regulile:

1. Pot trimite soluţii la **minimum cinci probleme propuse în numărul prezent şi cel anterior al revistei** (pe o foaie va fi redactată o singură problemă).

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluţii la problemele propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase mai mici şi imediat anterioare. Cei din clasa a **V**-a pot trimite soluţii la problemele propuse pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor **I-IV** pot trimite soluţii la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi orice clasă mai mare. Orice elev poate trimite soluţii la problemele de concurs (tip **G** şi **L**).

3. Vor fi menţionate următoarele date personale: numele şi prenumele, clasa, şcoala şi localitatea, precum şi numele profesorului cu care învaţă.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau va fi adus direct) la adresa Redacţiei:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: t_birsan@yahoo.com

CUPRINS

ISSN 1582 – 1765 **10 lei**

9 771582 176513