Prof. Constantin Corduneanu la a 75-a aniversare

La 26 iulie a. c., prof. **C. Corduneanu** împlineşte vârsta de 75 ani. Născut la 26 iulie 1928 la Iaşi, domnia sa a urmat şcoala primară în satul Potângeni, com. Movileni, jud. Iaşi, unde părinţii săi erau învăţători. Studiile liceale le-a făcut la Liceul Militar (Iaşi şi Predeal) în perioada 1940–1947. Citām dintr-un interviu al d-sale, acordat ziarului *"Curierul Românesc"*: *"Am avut şansa de a studia în acea şcoală de elită, unde profesorul de istorie era doctor la Oxford, cel de chimie era de asemenea doctor în chimie şi inginer chimist, cel de geografie era simultan şi asistent universitar, cel de franceză era doctor în filologie, cu stagiu de specializare în Franţa, devenind apoi şeful catedrei de limbă franceză la Universitatea din Iaşi. Profesorul de matematică fusese şi cadru universitar (conferenţiar suplinitor). Când am păşit pragul universităţii ieşene, opţiunile mele de viitor erau deja clare."* În clasa a VII-a de liceu (1947), a luat premiul I pe ţară la concursul anual, pe care îl organiza atunci *Gazeta matematică*.

După trecerea bacalaureatului în 1947, se înscrie la secţia de matematică a Fac. de Ştiinţe din Iaşi, promovând primii doi ani de studii într-un singur an, astfel că în 1950 este declarat absolvent. Fiind un student eminent, în ultimul an de facultate a fost numit preparator, regulamentul în vigoare la acea vreme permiţând acest lucru.

Despre perioada studenţiei şi despre profesorii săi, precum şi despre activitatea din cadrul Seminarului Matematic "Al. Myller", spunea: *"A fost o altă şansă a vieţii mele să am posibilitatea să mă formez ca specialist într-o atmosferă de înaltă ţinută ştiinţifică şi să fiu sprijinit, în momente critice ale vieţii, de către profesorii mei"* (citat din acelaşi interviu). Dintr-o scrisoare redactată în urma plecării sale din ţară, cităm: *"Rămânem şi noi, cei dinafară, datori foştilor profesori, care ne-au pregătit atât de solid pentru viaţă. Toată activitatea noastră este pătrunsă de simţul respectabilităţii faţă de bunul nume pe care matematica românească l-a dobândit şi continuă, credem, să-l păstreze. Este tributul pe care-l datorăm memoriei profesorilor noştri, singurii cu adevărat făuritori ai viitorului nostru, în condiţii care nu au fost tocmai prielnice".*

A urcat cu rapiditate treptele ierarhiei universitare, în 1965 fiind profesor titular. Între anii 1954–1968, a fost, în paralel, cercetător principal şi apoi şef de sector la Institutul de Matematică al Academiei, filiala Iaşi. În 1961 este distins cu *premiul Ministerului Educaţiei şi Învăţământului*, iar în 1964 primeşte *premiul "Gh. Lazăr" al Academiei.*

A fost rector al Institutului Pedagogic din Suceava (1964–1967), decan al Fac. de Matematică din Iaşi (1968–1972) şi prorector al Univ. "Al. I. Cuza" (1972–1977). În 1974, a fost ales *membru corespondent al Academiei Române* (secţia matematică).

Desfiinţarea Institutului de Matematică şi deteriorarea continuă a climatului politic, social şi cultural din ţara noastră l-au determinat să emigreze în străinătate (1977). După un an petrecut la *Univ. din Kingston* (Rhode Island) şi altul la *Univ. din Knoxville* (Tennessee), se stabileşte definitiv la *Univ. of Texas at Arlington*, unde a funcţionat până la pensionare. Îi place să spună că a avut 4000 studenţi în România şi aproximativ 3000 în America, perioada activităţii sale universitare fiind de 47 ani.

Activitatea ştiinţifică a prof. **C. Corduneanu** s-a desfăşurat fără întrerupere, fiind continuată şi în prezent. Este autorul a peste 150 de articole, publicate în reviste de mare prestigiu din ţară şi din străinătate. La Iaşi, a înfiinţat Seminarul special de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale şi integrale, d-sa fiind iniţiatorul acestei direcţii de cercetare la Iaşi. Mulţi tineri s-au format în ambianţa acestui Seminar, fiindu-i recunoscători profesorului lor.

Domeniul de cercetare a prof. **C. Corduneanu** este teoria ecuaţiilor diferenţiale, integrale şi integro-diferenţiale, în care a abordat probleme de existenţă, comportare asimptotică, periodicitate, aproape-periodicitate şi stabilitate a soluţiilor unor astfel de ecuaţii. Merită subliniată introducerea "metodei comparaţiei" în teoria stabilităţii, studiul sistematic al teoriei admisibilităţii operatorilor integrali, metoda frecvenţială în studiul stabilităţii ecuaţiilor integrale Volterra etc. Pentru a ne face o idee despre opera matematică a d-sale, amintim doar monografiile pe care le-a publicat până în prezent:

1. *Funcţii aproape periodice*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1961;
2. *Almost Periodic Functions*, Interscience Publ., New-York, 1968; Chelsea Publ. Company, New-York, 1989;
3. *Principles of Differential Equations and Integral Equations*, Allyn and Bacon, Boston, 1971; Chelsea Publ. Company, New-York, 1977; 1988;
4. *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*, Academic Press, New-York, 1973;
5. *Integral Equations and Applications*, Cambridge Univ. Press, 1991;
6. *Functional Equations with Causal Operators*, Taylor and Francis, London 2002.

Monografia *"Funcţii aproape periodice"* a fost prima pe plan mondial consacrată acestui important subiect. Cele două ediţii în limba engleză ale ei au fost completate şi dezvoltate cu noi capitole; la cea de a doua ediţie engleză şi-au adus contribuţia şi renumiţii profesori ieşeni *N. Gheorghiu* şi *V. Barbu*. Se cuvine a adăuga că prof. **C. Corduneanu** a fost primul matematician din Iaşi, ale cărui cărţi au fost publicate la edituri din străinătate dacă avem în vedere perioada postbelică. Mulţi matematicieni din ţară şi de peste hotare citează şi folosesc contribuţiile originale ale d-sale în lucrările lor de specialitate. Dintre cei din ultima categorie amintim pe *L. Cesari, R. Conti, J. Massera, J. J. Schäffer, N. Rouche, W. Coppel* şi *Ph. Hartman.*

Prof. **C. Corduneanu** a fost şi este membru în comitetul de redacţie al unor importante reviste de matematică din ţara noastră şi din alte ţări. Este editor al revistei *Libertas Mathematica* fondată în anul 1981 şi ajunsă anul acesta la al XXIII-lea număr. Este membru al Academiei Româno-Americane de Ştiinţe şi Arte (SUA), fiind chiar preşedintele acestei instituţii, în perioada 1995–1998. Este *Doctor Honoris Causa al universităţilor din Iaşi, Constanţa şi Braşov.* Are o prezenţă activă la multe manifestări ştiinţifice din ţară şi din America. Este invitat de numeroase universităţi pentru a ţine conferinţe şi a prezenta comunicări.

A încurajat revista *Recreaţii matematice*, susţinând necesitatea unei astfel de publicaţii, ori de câte ori venea la Iaşi.

La a 75-a aniversare, revista Recreaţii matematice urează acad. prof. **C. Corduneanu** *"La mulţi ani şi multe succese în activitatea sa viitoare!"*.

Redacţia revistei

A. N. Kolmogorov - 100 de ani de la naştere

Andrei Nicolaevici Kolmogorov este unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului al XX-lea şi unul dintre cei mai fertili matematicieni ai tuturor timpurilor. În peste 300 de lucrări ştiinţifice, manuale şi monografii, Kolmogorov acoperă aproape toate domeniile matematicii, exceptând teoria numerelor. În lucrările sale atacă numai subiecte fundamentale şi care deschid noi domenii de investigaţie. O listă neexhaustivă a direcţiilor cercetărilor sale cuprinde: *teoria seriilor trigonometrice, teoria mulţimilor, teoria măsurii, teoria integrării, logica constructivă (intuiţionistă), topologia, teoria aproximării, teoria probabilităţilor, teoria proceselor stochastice, teoria informaţiei, statistică matematică, sisteme dinamice, teoria automatelor, teoria algoritmilor, lingvistică matematică, mecanică cerească, teoria turbulenţelor, ecuaţii diferenţiale, problema a 13-a a lui Hilbert, balistică, aplicaţii ale matematicii în biologie, geologie şi cristalizarea metalelor.*

S-a născut la 25 aprilie 1903 în oraşul Tambov (Rusia). Rămâne orfan de mamă încă de la naştere. Era de origine aristocrată prin mama sa; tatăl său, inginer agronom, avea o vastă cultură generală. În 1920 a intrat la Universitatea din Moscova, urmând şi absolvind cursurile facultăţii de matematică - mecanică. În formarea lui A. N. Kolmogorov un rol important a avut seminarul condus de *V. V. Stepanov* consacrat seriilor trigonometrice şi şcoala de analiză matematică creată la Moscova de *N. N. Luzin.* În 1931 devine profesor al acestei universităţi. S-a stins din viaţă la Moscova la 20 octombie 1982 după o bogată activitate ştiinţifică şi didactică de aproape şapte decenii.

În lucrările sale, **A. N. Kolmogorov** prezintă într-o unitate surprinzătoare chestiuni din domenii aparent deosebite ale matematicii. Încă din studenţie a obţinut rezultatele care au produs o puternică impresie în lumea matematicienilor. În 1922 a construit un exemplu de serie Fourier - Lebesgue divergentă aproape peste tot şi un altul de serie divergentă în fiecare punct. Sub influenţa lucrărilor lui *M. S. Suslin* şi *N. N. Luzin*, în acelaşi an, face un studiu asupra operaţiilor cu mulţimi introducând o clasă foarte largă de operaţii.

Începând din 1924 interesul lui **A. N. Kolmogorov** se îndreaptă spre teoria probabilităţilor, domeniu în care va deveni o autoritate de necontestat. Folosind metode noi, în particular aşa numita *inegalitate a lui Kolmogorov*, stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru *legea numerelor mari* şi demonstrează *legea logaritmului iterat.* Încă din 1909, *E. Borel* a înţeles importanţa teoriei măsurii pentru construcţia fundamentelor teoriei probabilităţilor. Ideile sale au fost dezvoltate de *A. Lomnicki* într-un articol din 1923 şi au devenit obiectul cercetărilor lui Kolmogorov în 1929 care, în lucrarea *"Teoria generală a măsurii şi calculul probabilităţilor"*, propune primul sistem axiomatic al teoriei probabilităţilor fundamentat pe teoria măsurii şi teoria funcţiilor de variabilă reală. Această axiomatizare capătă forma finală, acceptată astăzi unanim, în monografia *"Noţiunile fundamentale ale teoriei probabilităţilor"* apărută în 1933, editura Springer. Referindu-se la lucrarea *"Metode analitice în teoria probabilitiţălor"* (1931), unul dintre elevii străluciţi ai lui Kolmogorov, *B. V. Gnedenko*, afirmă: *"Teoria actuală a proceselor aleatoare Markov sau, aşa cum le numşte Kolmogorov, proceselor fără postacţiune, a fost fundamentată* *de Kolmogorov în această lucrare. A apărut un domeniu al matematicii cu aplicaţii în fizică, biologie, chimie, activitatea inginerească. Gândirea lui Kolmogorov a acţionat în diverse domenii în care a pus probleme noi şi a dat răspunsuri unor chestiuni principiale".*

Pentru preocupările sale de teoria informaţiei unii matematicieni l-au numit pe **A. N. Kolmogorov** *"Newton al secolului XX"*. În teoria algoritmică a informaţiei a introdus noţiunea de ε-*entropie* a unei mulţimi dintr-un spaţiu metric, care are aplicaţii în probleme privind superpoziţiile (compunerile) de funcţii şi i-a permis să revină asupra *problemei a 13-a a lui Hilbert: "O funcţie continuă de trei variabile poate fi reprezentată ca o superpoziţie de funcţii continue de două variabile?"*. În 1956 Kolmogorov a demonstrat că orice funcţie continuă de mai multe variabile se reprezintă ca o superpoziţie de funcţii continue de trei variabile. În 1957, *V. I. Arnold*, probabil cel mai renumit dintre elevii lui Kolmogorov, a demonstrat că orice funcţie continuă de trei variabile se reprezintă ca o superpoziţie de funţii continue de două variabile. În acelaşi an, Kolmogorov arată că o funcţie continuă de un număr oarecare de variabile se reprezintă ca o superpoziţie de funcţii continue de o variabilă reală la care se adaugă operaţia de adunare (funcţie continuă de două variabile). Creator al teoriei algoritmice a informaţiei, Kolmogorov a introdus noţiunea centrală a acestei teorii, aceea de *complexitate* a unui obiect matematic (numită astăzi *complexitate Kolmogorov*).

În 1925 **A. N. Kolmogorov** a publicat un articol despre *legea terţului exclus*. Acest articol a intrat în fondul de aur al logicii matematice fiind prima lucrare pe plan mondial a logicii matematice. În 1932 dezvoltă semantica logicii intuiţioniste a lui *A. Heyting* dând acesteia aspectul de *logică constructivă*. În 1952 a dat definiţiile cele mai generale ale noţiunilor de *obiect constructiv* şi *algoritm*. În anii 60 a reuşit să atragă un număr mare de cercetătorii în studiul limbii şi literaturii prin metode matematice.

A. N. Kolmogorov a creat puternice şcoli de cercetare matematică din care s-au ridicat un număr impresionant de matematicieni de mare valoare, dar în acelaşi timp a acordat o atenţie deosebită şi învăţământului preuniversitar. Din iniţiativa sa a fost înfiinţată la Moscova şcoala internat numărul 18 (cunoscută sub numele de *"şcoala Kolmogorov"*), un liceu de matematică unde erau selectaţi copiii talentaţi la matematică, care se remarcau la olimpiade, de pe teritoriul întregii foste Uniuni Sovietice.

A fost *membru al Academiei de Ştiinţe din ţara sa* (1939), *al academiilor din Olanda, Anglia, Franţa, SUA, Germania, Polonia, India, România* (1956) ş. a., *doctor honoris causa* al multor universităţi din întreaga lume, *membru de onoare* al unor societăţi prestigioase. A fost *laureat al premiului de stat* şi de şapte ori *laureat al premiului Lenin*, cel mai prestigios premiu din fosta Uniune Sovietică.

În 1963 a primit cea mai înaltă distincţie internaţională care se acordă matematicienilor, *premiul Bolzano*.

Prof. dr. Petru MINUŢ

Inegalităţi pentru mediane, bimediane, bisectoare

Dan Ştefan MARINESCU şi Viorel CORNEA[1]

Vom demonstra pentru început următoarea

Lemă. *Fie ABC un triunghi şi $M \in (BC)$ astfel încât $\dfrac{BM}{BC} = k \in (0,1)$. Atunci $AM < k\,AC + (1-k)\,AB$.*

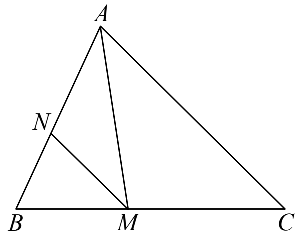


Fig. 1

Demonstraţie. Fie $N \in (AB)$ astfel încât $MN \parallel AC$ (fig. 1). Din teorema fundamentală a asemănării obţinem $MN = k\,AC$ şi $AN = (1-k)\,AB$. Aplicând în triunghiul AMN inegalitatea triunghiului avem $AM < MN + AN$ sau, conform celor de mai sus, $AM < k\,AC + (1-k)\,AB$.

Propoziţia 1. *Fie $ABCD$ un tetraedru, $M \in \operatorname{int}(BCD)$, $N \in (CM \cap BD$ şi $P \in (DM \cap BC$. Dacă $\dfrac{BN}{ND} = u$ şi $\dfrac{BP}{PC} = v$, atunci*

$$AM < \frac{1}{u+v+1}\,AB + \frac{v}{u+v+1}\,AC + \frac{u}{u+v+1}\,AD.$$

Demonstraţie. Fie $Q \in (BM \cap CD$ (fig. 2). În baza teoremei lui van Aubel,

$$\frac{BM}{MQ} = \frac{BN}{ND} + \frac{BP}{PC} = u + v, \quad \text{de unde} \quad \frac{BM}{BQ} = \frac{u+v}{u+v+1}. \tag{1}$$

Ţinând seama de (1) şi de Lemă, în $\triangle ABQ$ avem

$$AM < \frac{1}{u+v+1}\,AB + \frac{u+v}{u+v+1}\,AQ. \tag{2}$$

Din teorema lui Ceva, aplicată în $\triangle BCD$, obţinem $\dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{u}{v}$, adică $\dfrac{CQ}{CD} = \dfrac{u}{u+v}$. Aplicând iarăşi Lema în $\triangle ACD$ vom avea

$$AQ < \frac{v}{u+v}\,AC + \frac{u}{u+v}\,AD. \tag{3}$$

Relaţiile (2) şi (3) conduc la

$$AM < \frac{1}{u+v+1}\,AB + \frac{v}{u+v+1}\,AC + \frac{u}{u+v+1}\,AD,$$

ceea ce încheie demonstraţia acestei propoziţii.

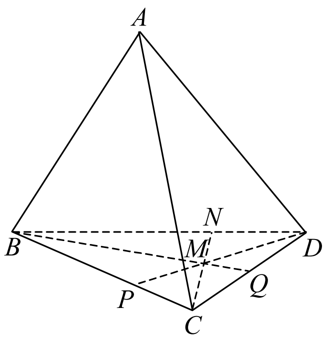


Fig. 2

Câteva cazuri particulare ale acestui rezultat prezintă interes în sine.

Corolarul 1 (Inegalitatea medianei). *Fie $ABCD$ un tetraedru şi G_A centrul de greutate al feţei BCD; atunci $AG_A < \dfrac{1}{3}(AB + AC + AD)$.*

[1] Profesori, Liceul Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

Demonstraţie. Evident, în acest caz $u = v = 1$ şi aplicând Propoziţia 1 obţinem inegalitatea cerută.

Corolarul 2. *Medianele unui tetraedru pot fi lungimile laturilor unui patrulater.*

Demonstraţie. Fie G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale feţelor BCD, ACD, ABD, ABC în tetraedrul $ABCD$ şi G centrul său de greutate. Aplicând în tetraedrul $GBCD$ inegalitatea din Corolarul 1, avem $GG_A < \dfrac{1}{3}(GB + GC + GD)$. Conform unui rezultat cunoscut

$$BG = \frac{3}{4} BG_B\ , \quad CG = \frac{3}{4} CG_C\ , \quad DG = \frac{3}{4} DG_D\ .$$

Ca urmare, $GG_A < \dfrac{1}{4}(BG_B + CG_C + DG_D)$. Cum $GG_A = \dfrac{1}{4} AG_A$, găsim că $AG_A < BG_B + CG_C + DG_D$.

Procedând la fel găsim şi inegalităţi similare, ceea ce asigură faptul că medianele tetraedrului pot fi laturile unui patrulater.

Corolarul 3 (Inegalitatea bisectoarei). *Fie $ABCD$ un tetraedru, AE bisectoarea triedrului cu vârful în A, $E \in \operatorname{int}(BCD)$; atunci*

$$AE < \frac{S_B}{S_B + S_C + S_D} AB + \frac{S_C}{S_B + S_C + S_D} AC + \frac{S_D}{S_B + S_C + S_D} AD.$$

Demonstraţie. Din teorema planului bisector (AE este intersecţia planelor bisectoare ale diedrelor ce compun triedrul cu vârful în A), avem (fig. 2, cu $M \equiv E$): $u = \dfrac{BN}{ND} = \dfrac{S_D}{S_B}$ şi $v = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{S_C}{S_B}$. Aplicând Propoziţia 1, vom obţine:

$$AE < \frac{S_B}{S_B + S_C + S_D} AB + \frac{S_C}{S_B + S_C + S_D} AC + \frac{S_D}{S_B + S_C + S_D} AD,$$

adică inegalitatea din enunţ.

Corolarul 4. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi I_A centrul cercului înscris în triunghiul BCD; atunci:*

$$AI_A < \frac{CD}{BC + CD + BD} AB + \frac{BD}{BC + CD + BD} AC + \frac{BC}{BC + CD + BD} AD.$$

Demonstraţie. În fig. 2 considerăm $M \equiv I_A$; din teorema bisectoarei, avem $u = \dfrac{BN}{ND} = \dfrac{BC}{CD}$ şi $v = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BD}{CD}$. Se aplică Propoziţia 1.

Observaţie. Propoziţia 1 se poate demonstra şi cu ajutorul relaţiei lui Stewart, care permite determinarea lui AM în funcţie de AB, AC, AD şi u, v.

Propoziţia 2. *Fie $ABCD$ un tetraedru, $M \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AM}{AB} = u$ şi $N \in (CD)$ astfel încât $\dfrac{CN}{CD} = 1 - u$; atunci au loc*

$$|u\,BC - (1-u)\,AD| < MN < u\,BC + (1-u)\,AD,$$
$$|u\,BD - (1-u)\,AC| < MN < u\,BD + (1-u)\,AC.$$

Demonstraţie. Fie $P \in (AC)$ astfel încât $MP \parallel BC$ (fig. 3). Din teorema fundamentală a asemănării avem $MP = u\,BC$ şi $\dfrac{PC}{AC} = 1 - u$. Cum $\dfrac{CN}{CD} = 1 - u$, vom obţine că $PN \parallel AD$ şi în consecinţă, în baza teoremei pomenite mai sus, vom avea $PN = (1-u)\,AD$. Deoarece punctele M, P, N nu pot fi coliniare, din inegalităţile triunghiului obţinem

$$|MP - PN| < MN < MP + PN$$

sau, după înlocuiri, avem

$$|u\,BC - (1-u)\,AD| < MN < u\,BC + (1-u)\,AD.$$

Procedând la fel obţinem şi al doilea grup de inegalităţi.

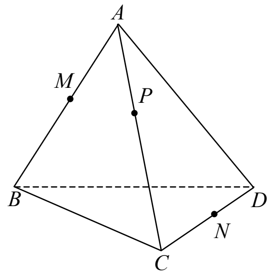


Fig. 3

Corolarul 5 (Inegalităţile bimedianei). *Fie $ABCD$ un tetraedru, M mijlocul lui $[AB]$ şi N mijlocul lui $[CD]$; atunci*

$$|BC - AD| < 2MN < BC + AD, \quad |BD - AC| < 2MN < BD + AC.$$

Demonstraţie. Luând $u = \dfrac{1}{2}$ în Propoziţia 2, găsim inegalităţile enunţate.

Pentru inegalităţile care urmează avem nevoie de următoarea

Lemă. *Fie $ABCD$ un tetraedru. Cu convenţiile din Propoziţia 1* (fig. 2)*, are loc egalitatea:*

$$AM^2 = \frac{1}{1+u+v}\,AB^2 + \frac{v}{1+u+v}\,AC^2 + \frac{u}{1+u+v}\,AD^2 - \\ - \frac{v}{(1+u+v)^2}\,BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2}\,BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2}\,CD^2.$$

Demonstraţie. Ca în Propoziţia 1, obţinem $\dfrac{BM}{BQ} = \dfrac{u+v}{1+u+v}$ şi $\dfrac{CQ}{CD} = \dfrac{u}{u+v}$. Aplicând relaţia lui Stewart în triunghiul ABQ, avem:

$$AM^2 = \frac{1}{1+u+v}\,AB^2 + \frac{u+v}{1+u+v}\,AQ^2 - \frac{u+v}{(1+u+v)^2}\,BQ^2. \tag{1}$$

Aceeaşi relaţie aplicată în triunghiurile BCD şi ACD conduce la

$$BQ^2 = \frac{v}{u+v}\,BC^2 + \frac{u}{u+v}\,BD^2 - \frac{uv}{(u+v)^2}\,CD^2, \tag{2}$$

$$AQ^2 = \frac{v}{u+v}\,AC^2 + \frac{u}{u+v}\,AD^2 - \frac{uv}{(u+v)^2}\,CD^2. \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) obţinem egalitatea din enunţ.

Propoziţia 3. *Fie $ABCD$ un tetraedru. Are loc inegalitatea*

$$AM \geq \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{1+u+v}\,AB^2 + \frac{v}{1+u+v}\,AC^2 + \frac{u}{1+u+v}\,AD^2\right),$$

unde R este raza sferei circumscrise tetraedrului.

Demonstraţie. Fie A' punctul în care $(AM$ intersectează a doua oară sfera circumscrisă tetraedrului. Avem evident

$$2R \cdot AM \geq AA' \cdot AM = (AM + A'M)\,AM = AM^2 + A'M \cdot AM. \tag{1}$$

Puterea punctului M faţă de sferă este egală cu

$$A'M \cdot AM = R^2 - OM^2, \tag{2}$$

unde O este centrul sferei. Din lemă, vom avea:

$$\begin{aligned} AM^2 = {} & \frac{1}{1+u+v} AB^2 + \frac{v}{1+u+v} AC^2 + \frac{u}{1+u+v} AD^2 - \\ & - \frac{v}{(1+u+v)^2} BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2} BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2} CD^2, \qquad (3) \\ OM^2 = {} & \frac{1}{1+u+v} OB^2 + \frac{v}{1+u+v} OC^2 + \frac{u}{1+u+v} OD^2 - \\ & - \frac{v}{(1+u+v)^2} BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2} BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2} CD^2. \end{aligned}$$

Cum $OB = OC = OD = R$, ultima egalitate devine:

$$OM^2 = R^2 - \frac{v}{(1+u+v)^2} BC^2 - \frac{u}{(1+u+v)^2} BD^2 - \frac{uv}{(1+u+v)^2} CD^2. \tag{4}$$

Din (1), (2), (3) şi (4) obţinem inegalitatea din enunţ.

Corolarul 6. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi G_A centrul de greutate al feţei BCD; atunci*

$$AG_A \geq \frac{1}{6R}\left(AB^2 + AC^2 + AD^2\right).$$

Demonstraţie. În Propoziţia 3 considerăm $M \equiv G_A$ $(u = v = 1)$.

În cele ce urmează, dacă $ABCD$ este un tetraedru, vom nota cu m_X, h_X, l_X mediana, înălţimea, bisectoarea din vârful X $(X \in \{A, B, C, D\})$.

Corolarul 7. *În orice tetraedru $ABCD$ avem*

$$3R(m_A + m_B + m_C + m_D) \geq a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2,$$

unde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $l = DA$, $m = DB$, $n = DC$, iar $m_A = AG_A$ etc.

Demonstraţie. Din Corolarul 6 avem $6Rm_A \geq c^2+b^2+l^2$, $6Rm_B \geq c^2+a^2+m^2$, $6Rm_C \geq a^2 + b^2 + n^2$, $6Rm_D \geq l^2 + m^2 + n^2$, de unde, prin sumare, obţinem inegalitatea cerută.

Corolarul 8. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi I_A punctul în care bisectoarea din A a tetraedrului intersectează faţa BCD; atunci*

$$2R \cdot AI_A \geq \frac{S_B}{S_B + S_C + S_D} AB^2 + \frac{S_C}{S_B + S_C + S_D} AC^2 + \frac{S_D}{S_B + S_C + S_D} AD^2.$$

Demonstraţie. În Propoziţia 3 se pune $u = \dfrac{S_D}{S_B}$ şi $v = \dfrac{S_C}{S_B}$.

Observaţie. Ca şi în Corolarul 7 se pot obţine inegalităţi pentru suma bisectoarelor şi suma înălţimilor.

Bibliografie

1. **D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea** - *Planul şi spaţiul euclidian*, Editura Academiei, Bucureşti, 1986.
2. **D. Şt. Marinescu** - *Inegalităţi pentru ceviene*, R.M.C. 1–2, 1995–1996, 5–7.
3. **N. Pavelescu, M. Lascu** - *Inegalităţi în triunghiuri şi tetraedre*, G.M. 10/1989, 362–366.

Proprietăţi de coliniaritate în patrulatere

Temistocle BÎRSAN[1]

În scopul stabilirii proprietăţilor de mai jos vom utiliza următoarele trei leme.

Lema 1. *Fie ABC un triunghi, $X \in (BC)$, $Y \in (CA)$ şi $\{Z\} = AX \cap BY$. Are loc relaţia*
$$\frac{BZ}{ZY} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{AC}{AY}\ . \qquad (1)$$

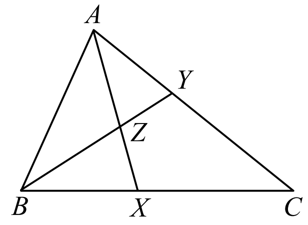


Fig. 1

Demonstraţie. Conform Teoremei lui Menelaus, aplicată triunghiului BCY şi transversalei XZ, avem $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{AC}{AY} \cdot \frac{ZY}{BZ} = 1$, de unde deducem (1).

Lema 2 [**1**, p. 65]**.** *Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $\{I\} = AC \cap BD$. Considerăm punctele $E \in (AB)$ şi $F \in (CD)$ cu poziţiile date de rapoartele $p = \frac{EA}{EB}$ şi respectiv $q = \frac{FD}{FC}$. Atunci*
$$I \in EF \Leftrightarrow IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC. \qquad (2)$$

Demonstraţie. Presupunem că AB şi CD se intersectează în S. Notând $\{I'\} = EF \cap AC$ şi $\{I''\} = EF \cap BD$, obţinem relaţiile:
$$\frac{ES}{EA} \cdot \frac{I'A}{I'C} \cdot \frac{FC}{FS} = 1 \quad (\triangle SAC \text{ şi transversala } EF),$$
$$\frac{ES}{EB} \cdot \frac{I''B}{I''D} \cdot \frac{FD}{FS} = 1 \quad (\triangle SBD \text{ şi transversala } EF),$$
de unde, prin egalare,
$$I'A \cdot I''D = pq \cdot I''B \cdot I'C. \qquad (*)$$

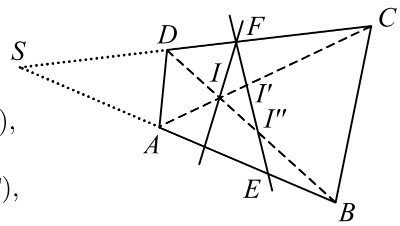


Fig. 2

Atunci, avem $I \in EF \Rightarrow I' = I'' = I \overset{(*)}{\Rightarrow} IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC$. Reciproc,
$$IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{IA}{IC} \cdot \frac{ID}{IB} = \frac{I'A}{I'C} \cdot \frac{I''D}{I''B} \Rightarrow I' = I'' = I$$
(într-adevăr, dacă $I' \neq I$, atunci şi $I'' \neq I$ şi am avea, în poziţia din figură pentru EF, că $\frac{IA}{IC} < \frac{I'A}{I'C}$, $\frac{ID}{IB} < \frac{I''D}{I''B}$).

Menţionăm că egalitatea $(*)$ se obţine prin asemănare de triunghiuri, dacă $AB \parallel CD$, restul demonstraţiei rămânând acelaşi.

Lema 3. *În condiţiile Lemei 2 au loc relaţiile*
$$\frac{IE}{IF} = p\,\frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{IB}{ID} = \frac{1}{q} \cdot \frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{IA}{IC}\ . \qquad (3)$$

Demonstraţie. În $\triangle ECD$ scriem relaţia lui van Aubel:
$$\frac{IE}{IF} = \frac{JE}{JD} + \frac{KE}{KC}\ ,$$

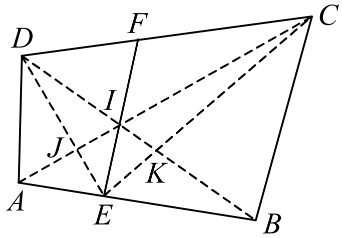


Fig. 3

[1] Prof. dr., Catedra de Matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

unde $\{J\} = ED \cap AC$ şi $\{K\} = EC \cap BD$. Conform Lemei 1, avem

$$\frac{DJ}{JE} = \frac{ID}{IB} \cdot \frac{AB}{AE} \quad (\triangle ABD) \quad \text{şi} \quad \frac{CK}{KE} = \frac{IC}{IA} \cdot \frac{AB}{BE} \quad (\triangle BCA).$$

Ca urmare, obţinem:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{IB \cdot AE}{ID \cdot AB} + \frac{IA \cdot BE}{IC \cdot AB} = \frac{p}{p+1} \cdot \frac{IB}{ID} + \frac{1}{p+1} \cdot \frac{IA}{IC} = \\ = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{p \cdot IB \cdot IC + IA \cdot ID}{IC \cdot ID}.$$

Deoarece $IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC$ (Lema 2), rezultă că $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{p\,(q+1)}{p+1} \cdot \dfrac{IB}{ID}$. A doua egalitate rezultă din prima şi relaţia $IA \cdot ID = pq \cdot IB \cdot IC$.

Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $\{I\} = AC \cap BD$. Considerăm un punct $M \in (AI)$ şi adoptăm notaţiile: $\{X\} = BM \cap AD$, $\{Y\} = DM \cap AB$, apoi $\{N\} = CY \cap BD$, $\{Q\} = CX \cap BD$ şi, în sfârşit $\{U\} = AN \cap BC$, $\{V\} = AQ \cap CD$ (fig. 4).

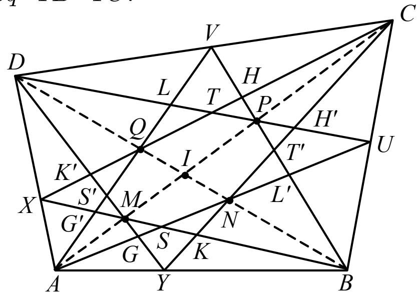


Fig. 4

Considerăm poziţia punctului M pe diagonala AC dată de raportul

$$\alpha = \frac{AM}{MI}. \tag{4}$$

Cu uşurinţă putem preciza poziţiile punctelor X, Y, N, Q, U şi V funcţie de α şi elementele patrulaterului. Într-adevăr, aplicăm Lema 1 de două ori în triunghiul $\triangle ABD$ şi obţinem relaţiile: $\dfrac{AM}{MI} = \dfrac{AX}{XD} \cdot \dfrac{BD}{BI}$ şi $\dfrac{AM}{MI} = \dfrac{AY}{YB} \cdot \dfrac{DB}{DI}$, adică

$$\frac{AX}{XD} = \alpha \frac{IB}{BD} \quad \text{şi} \quad \frac{AY}{YB} = \alpha \frac{ID}{BD}. \tag{5}$$

Pentru determinarea poziţiilor punctelor N şi Q aplicăm Lema 1 în $\triangle CAB$ şi $\triangle CAD$; obţinem $\dfrac{BN}{NI} = \dfrac{BY}{YA} \cdot \dfrac{CA}{CI}$ şi $\dfrac{DQ}{QI} = \dfrac{DX}{XA} \cdot \dfrac{CA}{CI}$ şi, ţinând seama de (5), vom avea

$$\frac{BN}{NI} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{AC \cdot BD}{IC \cdot ID}, \quad \frac{DQ}{QI} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{AC \cdot BD}{IB \cdot IC}. \tag{6}$$

Pentru punctele U şi V aplicăm Lema 1 în $\triangle ABC$ şi $\triangle ADC$: $\dfrac{BN}{NI} = \dfrac{BU}{UC} \cdot \dfrac{AC}{AI}$, $\dfrac{DQ}{QI} = \dfrac{DV}{VC} \cdot \dfrac{AC}{AI}$. Din aceste relaţii şi (6) rezultă că

$$\frac{BU}{UC} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD \cdot IA}{IC \cdot ID}, \quad \frac{DV}{VC} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD \cdot IA}{IB \cdot IC}. \tag{7}$$

Punem acum în evidenţă câteva proprietăţi de coliniaritate ale configuraţiei (fig. 4).

Propoziţia 1. *Punctul P definit de $\{P\} = BV \cap DU$ se află pe diagonala AC.*

Demonstraţie. A arăta că $P \in AC$ revine la a arăta că în $\triangle BCD$ cevianele DU, BV şi CI sunt concurente. Datorită relaţiilor (7), avem

$$\frac{BU}{UC} \cdot \frac{CV}{VD} \cdot \frac{DI}{IB} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD \cdot IA}{IC \cdot ID} \cdot \alpha \cdot \frac{IB \cdot IC}{BD \cdot IA} \cdot \frac{ID}{IB} = 1$$

şi aplicăm reciproca teoremei lui Ceva.

Observaţie. Octogonul stelat $AYBUCVDX$, generat pornind de la punctul M, este înscris în patrulaterul convex dat având patru din vârfurile sale tocmai vârfurile patrulaterului, iar celelalte patru vârfuri, ce alternează cu acestea, fiind situate pe laturile patrulaterului. Propoziţia precedentă şi cele care vor urma pun în evidenţă faptul că punctul I (de intersecţie a diagonalelor patrulaterului) joacă un rol important pentru acest octogon stelat.

Propoziţia 2. *Punctele din fiecare dintre tripletele X, I, U şi Y, I, V sunt coliniare.*

Demonstraţie. Conform Lemei 2, pentru ca punctele X, I, U să fie coliniare este suficient ca egalitatea următoare să fie îndeplinită:

$$ID \cdot IC = \frac{XD}{XA} \cdot \frac{UC}{UB} \cdot IA \cdot IB.$$

Dar, ţinând sema de (5) şi (7), egalitatea devine

$$ID \cdot IC = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{BD}{IB} \cdot \alpha \cdot \frac{IC \cdot ID}{BD \cdot IA} \cdot IA \cdot IB \Leftrightarrow 1 = 1.$$

La fel se arată că Y, I, V sunt coliniare.

Observaţie. Triunghiurile XBC şi UDA sunt omologice şi punctul I este centrul lor de omologie. Conform teoremei lui Desargue, perechile de drepte (BC, DA), (XB, UD) şi (XC, UA) au puncte de intersecţie coliniare. Observaţie similară relativ la triunghiurile YCD şi VAB.

Introducerea punctelor G, G', H, H', K, K', L, L', S, S', T, T' rezultă din fig. 4.

Propoziţia 3. *Punctele G, I, H sunt coliniare. Aceeaşi proprietate o au şi punctele G', I, H'.*

Demonstraţie. Conform Lemei 2, aplicată patrulaterului $YBVD$ şi punctelor G şi H, pentru coliniaritatea punctelor G, I, H este suficient să arătăm că

$$ID \cdot IV = \frac{GD}{GY} \cdot \frac{HV}{HB} \cdot IY \cdot IB. \tag{8}$$

Cu Lema 3, aplicată relativ la patrulaterul $ABCD$ şi punctele Y şi V, avem

$$\frac{IY}{IV} = p \cdot \frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{IB}{ID}\ , \quad \text{unde} \quad p = \frac{AY}{YB} \quad \text{şi} \quad q = \frac{DV}{VC}\ .$$

Din (5) şi (7), avem că $p = \alpha \dfrac{ID}{BD}$, $q = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{BD \cdot IA}{IB \cdot IC}$ şi, după calcule, urmează că

$$\frac{IY}{IV} = \frac{\alpha\, IB \cdot IC + IA \cdot BD}{IC\,(\alpha\, ID + BD)}\ . \tag{9}$$

Pe de altă parte, utilizând Lema 1 în $\triangle ADB$ şi $\triangle CBD$, obţinem

$$\frac{GD}{GY} = \frac{ND}{NB} \cdot \frac{AB}{AY} \quad \text{şi} \quad \frac{HB}{HV} = \frac{QB}{QD} \cdot \frac{CD}{CV}\ . \tag{10}$$

Din nou apelând la relaţiile (5) şi (7), găsim

$$\frac{AB}{AY} = \frac{\alpha\, ID + BD}{\alpha\, ID}\ , \qquad \frac{CD}{CV} = \frac{\alpha\, IB \cdot IC + IA \cdot BD}{\alpha\, IB \cdot IC}\ . \tag{11}$$

Pentru a exprima rapoartele $\dfrac{ND}{NB}$ şi $\dfrac{QB}{QD}$ prin elementele patrulaterului dat, le scriem mai întâi sub forma $\dfrac{ND}{NB} = \dfrac{NI}{NB} + \dfrac{ID}{NB}$, $\dfrac{QB}{QD} = \dfrac{QI}{QD} + \dfrac{IB}{QD}$ şi apoi folosim relaţiile (6); se obţine

$$\frac{ND}{NB} = \frac{ID\,(\alpha IC + AC)}{IB \cdot AC} \quad \text{şi} \quad \frac{QB}{QD} = \frac{IB\,(\alpha IC + AC)}{ID \cdot AC}\ . \tag{12}$$

Înlocuind factorii prezenţi în (8) cu expresiile lor date de (9) – (12) se ajunge la egalitatea $1 = 1$. În concluzie, punctele G, I, H sunt coliniare. Similar se obţine că şi punctele G', I, H' sunt coliniare.

În aceeaşi manieră, adică folosind lemele şi formulele (4) – (7), se dovedesc şi rezultatele următoare.

Propoziţia 4. *Punctele K, I, L sunt coliniare. Sunt coliniare de asemenea şi punctele K', I, L'.*

Propoziţia 5. *Punctele S, I, T şi punctele S', I, T' sunt triplete de puncte coliniare.*

Observaţie. Întrucât proprietăţile precedente sunt de natură proiectivă nu este lipsită de interes stabilirea acestora cu mijloacele geometriei proiective.

Pentru configuraţia în discuţie pot fi puse în evidenţă şi proprietăţi de altă natură.

Propoziţia 6. *Dacă patrulaterul $ABCD$ dat este paralelogram, atunci patrulaterul $XYUV$ este un paralelogram cu laturile paralele cu diagonalele celui dat. Afirmaţia reciprocă este de asemenea adevărată (fig. 4).*

Demonstraţie. Faptul că $ABCD$ este paralelogram este echivalent cu

$$IA = IC \quad \text{şi} \quad IB = ID. \tag{13}$$

Din (13) şi (5) deducem că $\dfrac{AX}{XD} = \dfrac{AY}{YB}$, adică $XY \parallel BD$; din (13) şi (7) rezultă că $\dfrac{BU}{UC} = \dfrac{DV}{VC}$, adică $UV \parallel BD$. La fel deducem că $\dfrac{AX}{XD} = \dfrac{CV}{VD}$ ((13), (5) şi (7)) şi $\dfrac{AY}{YB} = \dfrac{CU}{UB}$ ((13), (5) şi (7)); ca urmare, $XV \parallel AC$ şi $YU \parallel AC$. În concluzie, $XYUV$ este paralelogram. Afirmaţia reciprocă se dovedeşte pe cale inversă.

Corolar. *Dându-se un paralelogram $ABCD$ şi un punct $M \in (AD)$, să se construiască numai cu rigla (negradată) un paralelogram înscris în acesta şi având punctul X ca unul dintre vârfurile sale.*

Soluţie. Cu rigla construim punctul M ca intersecţie a dreptelor BX şi AC. Pornind de la M construim cu rigla punctele Y, U, V aşa cum s-a procedat la începutul acestei note. Conform Propoziţiei 6, $XYUV$ îndeplineşte condiţiile cerute.

Bibliografie

1. **D. Mihalca, I. Chiţescu, M. Chiriţă** - *Geometria patrulaterului*, Teora, 1998.

O construcţie geometrică a unor medii

Claudiu Ştefan POPA[1]

Se ştie că în orice trapez, lungimea liniei mijlocii este media aritmetică a lungimilor bazelor, iar lungimea segmentului care se sprijină pe laturile neparalele, trece prin intersecţia diagonalelor şi este paralel cu bazele, este media armonică a lungimilor bazelor. De asemenea, o paralelă la baze ce împarte o latură neparalelă în raportul $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, determină în interiorul trapezului un segment a cărui lungime este media ponderată a bazelor cu ponderile m şi n (toate aceste rezultate pot fi găsite, spre exemplu, în [**2**]).

În lucrarea [**1**] se demonstrează că un segment paralel cu bazele şi având ca lungime media geometrică a acestora este situat "între" linia mijlocie şi segmentul paralel cu bazele ce trece prin intersecţia diagonalelor. Ne propunem în continuare să dăm o construcţie efectivă a segmentului paralel cu bazele, de lungime media geometrică a acestora, bazându-ne pe un rezultat interesant în sine şi pe care autorul nu l-a mai întâlnit în literatura de specialitate.

Propoziţie. *Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $\{O\} = AC \cap BD$ şi fie $S \in (AB)$, $R \in (CD)$ astfel încât $RS \parallel AD$. Atunci $O \in RS$ dacă şi numai dacă AS este media geometrică a lungimilor segmentelor $[CR]$ şi $[BS]$.*

Demonstraţie. Să presupunem că $O \in RS$ şi fie $P \in (AD)$, $Q \in (BC)$ astfel ca $PQ \parallel AB$, $O \in (PQ)$. Se ştie că $PO = OQ$ şi atunci $OQRD$ şi $OQSA$ sunt paralelograme ($OQ \parallel DR \parallel AS$, $OQ = DR = AS$). Urmează că $RQ \parallel BD$, $SQ \parallel AC$. Aplicând teorema lui Thales în $\triangle CDB$ şi $\triangle BAC$, obţinem că $\frac{DR}{RC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{BS}{SA}$ şi, cum $DR = SA$, rezultă că $SA^2 = CR \cdot BS$.

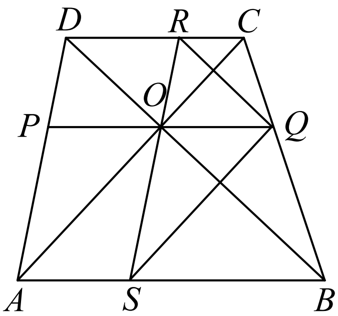


Fig. 1

Reciproc, presupunem că $RD = SA = \sqrt{SB \cdot RC}$. Notăm $SB = a$, $RC = b$ şi atunci $AB = a + \sqrt{ab}$, $CD = b + \sqrt{ab}$. Deoarece lungimea segmentului paralelel cu bazele ce trece prin intersecţia diagonalelor este media armonică a lungimilor bazelor, avem că

$$PQ = 2\,\frac{AB \cdot CD}{AB + CD} = 2\,\frac{\left(a + \sqrt{ab}\right)\left(b + \sqrt{ab}\right)}{a + b + 2\sqrt{ab}} = 2\,\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = 2\sqrt{ab},$$

prin urmare $PO = OQ = AS = DR$, adică $PORD$ şi $POSA$ sunt paralelograme. De aici, $OR \parallel AD$, $OS \parallel AD$, deci $O \in RS$.

Drept consecinţă a acestui rezultat obţinem un procedeu de *construcţie a mediei geometrice şi a mediei pătratice ale bazelor unui trapez, ca segmente ce se sprijină pe laturile neparalele şi sunt paralele cu bazele.*

[1] Profesor, Şcoala "Alecu Russo", Iaşi

Fie, ca în figură, $[PQ]$ şi $[MN]$ segmentele ce reprezintă media armonică, respectiv media aritmetică ale bazelor trapezului $ABCD$. Obţinem un segment având ca lungime media geometrică a bazelor, folosind unul dintre procedeele cunoscute ([**2**]). Aşezăm acest segment în prelungirea uneia dintre bazele trapezului; punctul D' astfel obţinut îl unim cu B şi fie $\{E\} = BD' \cap AD$. Paralela prin E la baze determină segmentul $[EF]$ căutat.

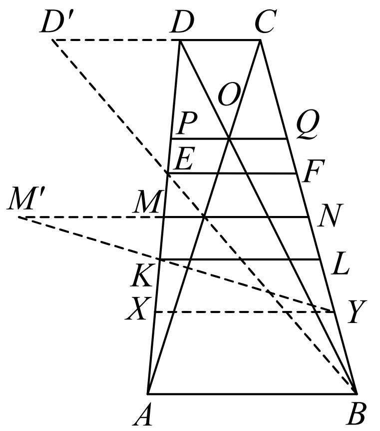


Fig. 2

Fie XY simetrica dreptei PQ faţă de MN, cu $X \in AD$, $Y \in BC$. Atunci

$$XY = 2\,MN - PQ = AB + CD - \frac{2\,AB \cdot CD}{AB + CD} =$$

$$= \frac{(AB+CD)^2 - 2\,AB \cdot CD}{AB + CD} = \frac{AB^2 + CD^2}{AB + CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{2}} = \sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{AB + CD} \cdot \frac{AB + CD}{2}} = \sqrt{XY \cdot MN}.$$

Prin urmare, construcţia cu rigorile impuse iniţial a segmentului de lungime media pătratică a bazelor trapezului $ABCD$ se reduce la construcţia segmentului $[KL]$ având ca lungime media geometrică a bazelor trapezului $XYMN$ (fig. 2).

Propunem spre rezolvare următoarele probleme:

1. Fie $ABCD$ trapez cu $[AB]$ baza mare şi $A' \in (AB)$, $D' \in (DC$ astfel încât $C \in (DD')$ şi $AA' = DD' = \sqrt{AB \cdot CD}$. Să se demonstreze că:

i) $A'C$, BD' şi AD sunt drepte concurente;

ii) dacă E este punctul de concurenţă de la *i*) şi $EF \parallel AB$, $F \in BC$, atunci $EF = \sqrt{AB \cdot CD}$.

2. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$ şi punctele $E \in (AD)$ şi $F \in BC$ astfel încât $EF \parallel AB$. Trapezele $ABFE$ şi $EFCD$ au diagonalele respectiv paralele dacă şi numai dacă $EF = \sqrt{AB \cdot CD}$.

3. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare AB, $AC \cap BD = \{O\}$, $\{M, E, P\} \subset (AD)$, $\{N, F, Q\} \subset (BC)$ astfel încât $[MN]$ este linia mijlocie a trapezului, $EF \parallel AB$ şi $EF^2 = AB \cdot CD$, iar $PQ \parallel AB$, $O \in PQ$. Dacă notăm $R_{XY} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABYX}}{\mathcal{A}_{CDXY}}$, atunci $R_{EF}^2 = R_{MN} \cdot R_{PQ}$.

Bibliografie.

1. **L. Constantinescu** - *O interpretare geometrică a inegalităţii mediilor*, R. M. T. nr. 1/1982.
2. **J. Hadamard** - *Geometrie plană*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1960.

Irelevanţa primitivabilităţii pentru ecuaţii funcţionale de forma $f(x+y) = g(f(x), f(y))$

Dan Ştefan MARINESCU şi Viorel CORNEA[1]

În [1] este demonstrat următorul rezultat:

"Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite primitive şi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, atunci f este continuă".

De remarcat că demonstraţia se bazează pregnant pe primitivabilitatea funcţiei f.

În cele ce urmează vom dovedi următoarea

Propoziţie. *Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive. Dacă*

$$f(x+y) = g(f(x), f(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

atunci f este continuă.

Demonstraţie. Dacă f este injectivă, împreună cu faptul că f are proprietatea lui Darboux, suntem conduşi la monotonia funcţiei f pe $\mathbb{R}$. Se deduce imediat continuitatea funcţiei f, ceea ce încheie demonstraţia.

Dacă f nu este injectivă, vom dovedi că f este constantă pe $\mathbb{R}$ şi, în consecinţă, f este continuă. Din faptul că f nu este injectivă există $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f(a) = f(b)$. Arătăm că

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad \text{cu} \quad 0 < t_2 - t_1 < \varepsilon \quad \text{şi} \quad f(t_1) = f(t_2). \tag{1}$$

Pentru aceasta fie $n \in \mathbb{N}^*$ încât $\dfrac{b-a}{n} < 1$ şi funcţia

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f\left(x + \frac{b-a}{n}\right) - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Evident, h are proprietatea lui Darboux: $h = G'$, unde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F\left(x + \dfrac{b-a}{n}\right) - F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cu F o primitivă a lui f.

Dacă h nu se anulează pe $\mathbb{R}$, cum h are proprietatea lui Darboux, avem $h(x) < 0$, sau $h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Fie $h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; atunci

$$h(a) > 0,\ h\left(a + \frac{b-a}{n}\right) > 0,\ h\left(a + 2\,\frac{b-a}{n}\right) > 0, \ldots,\ h\left(a + (n-1)\,\frac{b-a}{n}\right) > 0,$$

de unde

$$f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - f(a) > 0,$$

$$f\left(a + 2\,\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) > 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[1] Profesori, Liceul Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

$$f\left(a+n\frac{b-a}{n}\right)-f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)>0,$$

relaţii care adunate conduc la $f(b)>f(a)$, ceea ce este fals.

În consecinţă, există $c\in\mathbb{R}$ astfel ca $h(0)=0$, adică $f\left(c+\dfrac{b-a}{n}\right)=f(c)$; luând $t_1=c$, $t_2=c+\dfrac{b-a}{n}$ avem $f(t_1)=f(t_2)$ cu $0<t_2-t_1=\dfrac{b-a}{n}<\varepsilon$, adică (1) este dovedită.

Arătăm în continuare că t_2-t_1 este perioadă a funcţiei f. În adevăr,

$$\begin{aligned} f(x+t_2-t_1)&=f(x-t_1+t_2)=g(f(x-t_1),f(t_2))=\\ &=g(f(x-t_1),f(t_1))=f(x-t_1+t_1)=f(x). \end{aligned}$$

Din aceasta şi (1) deducem că există un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale cu $a_n>0$, $a_n\to 0$ şi

$$f(x+a_n)=f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Fie F o primitivă a funcţiei f şi $n\in\mathbb{N}$. Definim funcţia

$$F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F_n(x)=\frac{F(x+a_n)-F(x)}{a_n},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Evident F_n este derivabilă şi $F_n'(x)=0$ (în conformitate cu (2)), adică F_n este constantă pe $\mathbb{R}$; deci $F_n(x)=F_n(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, adică

$$\frac{F(x+a_n)-F(x)}{a_n}=\frac{F(a_n)-F(0)}{a_n},\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

de unde, prin trecere la limită pentru n tinzând la $+\infty$, găsim $f(x)=f(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Aşadar, f este constantă pe R. Cu aceasta demonstraţia este încheiată.

Corolar. *Fie* $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie,* $\mathcal{P}(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ admite primitive}\}$, $\mathcal{C}(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ continuă}\}$ *şi ecuaţia funcţională*

$$f(x+y)=g(f(x),f(y)),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Atunci ecuaţia (3) *are soluţie în* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *dacă şi numai dacă are soluţie în* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Dacă (3) are soluţie în $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, atunci, evident, are soluţie în $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Reciproc, dacă (3) are soluţie în $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, atunci conform Propoziţiei are soluţie în $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Bibliografie

1. **S. Rădulescu, P. Alexandrescu, M. Chiriţă** - *Olimpiada locală*, Bucureşti, 1996.

Asupra problemei XII.32 din RecMat - 2/2002

Marian TETIVA[1]

În numărul 2/2002 al **Recreaţiilor Matematice** a fost publicată problema

XII.32. *Fie $(G,\cdot)$ grup, iar $a\in G\backslash\{e\}$ fixat. Arătaţi că numărul morfismelor surjective de la G la $(\mathbb{Z}_3,+)$ cu proprietatea că $f(x)=\widehat{2}\Leftrightarrow x=a$ este egal cu numărul subgrupurilor H ale lui G care nu-l conţin pe a şi care au proprietatea că $x^3\in H$, $\forall x\in G$.*

Dana Stan, elevă, Iaşi

Ideea autoarei era stabilirea unei corespondenţe bijective între mulţimile

$$A=\left\{f:G\to\mathbb{Z}_3 \mid f \text{ morfism surjectiv cu } f(x)=\widehat{2}\Leftrightarrow x=a\right\};$$
$$B=\left\{H\le G \mid a\notin H \text{ şi } x^3\in H,\forall x\in G\right\}.$$

Pentru aceasta, se defineşte funcţia $F:A\to B$ prin $F(f)=f^{-1}(\widehat{0})$. Avem că $f^{-1}(\widehat{0})=\operatorname{Ker} f$ este subgrup în G, $a\notin f^{-1}(\widehat{0})$, iar $f\left(x^3\right)=3f(x)=\widehat{0}$, deci $x^3\in f^{-1}(\widehat{0})$, $\forall x\in G$; prin urmare, F este bine definită. Dacă $F(f)=F(g)$, atunci $f^{-1}(\widehat{0})=g^{-1}(\widehat{0})$. În plus, $f^{-1}(\widehat{2})=g^{-1}(\widehat{2})$, iar $f^{-1}(\widehat{1})=g^{-1}(\widehat{1})$ din surjectivitatea funcţiilor f şi g; în concluzie, F este injectivă.

Rămâne să dovedim că F este surjectivă. Fie $H\in B$; este normal să considerăm $f_H:G\to\mathbb{Z}_3$ dată prin $f_H(x)=\widehat{0}$, $\forall x\in H$, $f_H(a)=\widehat{2}$, iar $f_H(x)=\widehat{1}$, $\forall x\in G\setminus(H\cup\{a\})$. Avem că $F(f_H)=H$, f_H este surjectivă, iar $f_H(x)=\widehat{2}\Leftrightarrow x=a$. Este însă aplicaţia f_H astfel definită morfism de grupuri? Dovedirea acestui fapt impune studierea modului în care condiţia din ipoteză influenţează structura grupului G. Acest studiu va releva că ipoteza poate fi slăbită, concluzia poate fi îmbunătăţită şi va permite obţinerea unei generalizări interesante a problemei în discuţie.

Fie deci $f:G\to\mathbb{Z}_3$ morfism de grupuri astfel încât există $a\in G\setminus\{e\}$ cu proprietatea

$$f(x)=\widehat{2}\Leftrightarrow x=a \tag{$*$}$$

Avem atunci $f(a)=\widehat{2}$, apoi $f\left(a^2\right)=\widehat{2}+\widehat{2}=\widehat{1}$ şi $f\left(a^3\right)=\widehat{0}$; prin urmare, condiţia de surjectivitate impusă lui f este superfluă. În continuare, $f\left(a^4\right)=\widehat{2}$ şi din $(*)$ obţinem că $a^4=a$, adică $a^3=e$. Pe de altă parte, fie $b\in G$ astfel încât $f(b)=\widehat{0}$; avem succesiv:

$$f(ab)=f(a)+f(b)=\widehat{2}+\widehat{0}=\widehat{2}\Rightarrow ab=a\Rightarrow b=e.$$

Iar dacă se consideră $c\in G$ cu $f(\widehat{c})=\widehat{1}$, atunci

$$f\left(c^2\right)=f\left(c^5\right)=\widehat{2}\Rightarrow c^2=c^5=a\Rightarrow c^2=a \text{ şi } c^3=e\Rightarrow ac=e\Rightarrow c=a^2.$$

În concluzie, $G=\left\{e,a,a^2\right\}$, cu a element de ordin 3, deci există un singur morfism ca în enunţ ($f(e)=\widehat{0}$, $f(a)=\widehat{2}$, $f\left(a^2\right)=\widehat{1}$) şi un singur subgrup H cu proprietăţile cerute, $H=\{e\}$ (oricum, şi morfisme şi subgrupuri sunt câte două de toate!).

Iată acum generalizarea anunţată:

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

Propoziţie. *Fie* $(C, \cdot)$ *un grup ciclic şi* $g \in C$ *un generator al său. Fie* $(G, \cdot)$ *un alt grup (notăm la fel operaţiile celor două grupuri, pentru simplitate). Presupunem că există un morfism* $f : G \to C$ *şi un element* $a \in G$, $a \neq e$, *astfel încât* $f(x) = g \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = a$. *Atunci* G *este izomorf cu* C.

Demonstraţie. În primul rând, $f(a) = g \Rightarrow f\left(a^k\right) = g^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Acum, fie $x \in G$ un element oarecare. Trebuie să avem $f(x) = g^k$, pentru un anume $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă (f fiind morfism) că $f\left(a^{1-k}x\right) = f(a)^{1-k} f(x) = g^{1-k}g^k = g$. Dar singurul element din G pentru care f ia valoarea g este a, deci în mod necesar avem $a^{1-k}x = a \Rightarrow x = a^k$. Aşadar orice element al lui G este o putere a lui a: $G \subseteq \left\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

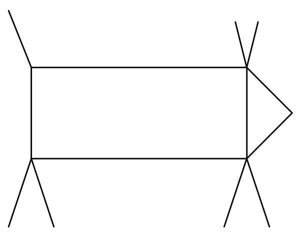
Din $f\left(a^k\right) = g^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, rezultă că f este o aplicaţie surjectivă. În cazul în care C este finit şi are n elemente avem $g^n = e$ şi $f\left(a^{n+1}\right) = g^{n+1} = g \Rightarrow a^{n+1} = a \Rightarrow a^n = e$ (e fiind elementul neutru din C), deci $G \subseteq \left\{a^k \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$ şi cum există o surjecţie de la G la C, obligatoriu G are tot n elemente şi, evident, este izomorf cu C.

Dacă C este infinit nu putem avea $a^k = a^m$ pentru exponenţii întregi distincţi k şi m, deoarece asta ar însemna şi $g^k = f\left(a^k\right) = f\left(a^m\right) = g^m$, ceea ce este imposibil, g fiind acum de ordin infinit. Deci şi în acest caz G este izomorf cu C, fiind acum grup ciclic infinit (generat tot de a, dar acesta nu mai are acum ordin finit). Demonstraţia este încheiată.

Recreaţii ... matematice

1. Patru oameni a, b, c şi d vor să traverseze într-o noapte un pod, venind toţi din aceeaşi direcţie. Pentru a ajunge toţi de cealaltă parte, au la dispoziţie 17 minute şi doar o lanternă. Podul susţine cel mult 2 oameni odată şi orice echipă care trece podul, de unul sau doi oameni, trebuie să aibă lanterna cu ei. Lanterna trebuie să fie transportată înainte şi înapoi, deci, ea nu poate fi aruncată etc. Se ştie că a traversează podul într-un minut, b în două minute, c în cinci minute, d în zece minute, iar o echipă traversează podul cu viteza celui mai lent dintre componenţii ei. Cum procedează cei patru pentru a trece podul în timpul stabilit?

2. Dacă vă puteţi imagina că desenul alăturat reprezintă un taur care se uită spre est, schimbaţi poziţia a două segmente astfel încât acesta să se uite spre vest.



Notă. Soluţiile problemelor **1** şi **2** se pot găsi la pagina 43.

Combinatorică ... algebrică

Gabriel DOSPINESCU[1]

Expansiunea combinatoricii în concursurile de matematică de orice nivel impune cunoaşterea unor procedee şi metode cât mai variate de abordare a problemelor de acest fel. Scopul acestei note este prezentarea, pe un număr de exemple, a modului cum pot fi utilizate unele mijloace algebrice: numere complexe, polinoame etc. în rezolvarea problemelor de combinatorică.

Cardinalul unei mulţimi A va fi notat $|A|$. Dacă A este o mulţime de numere naturale, atunci suma elementelor acesteia se notează $m(A)$ şi se numeşte *măsura lui* A (prin convenţie, $m(\emptyset)=0$). Mulţimea A se numeşte pară / impară dacă $m(A)$ este număr par / impar ($\emptyset$ este pară).

Vom utiliza în mod frecvent următoarea

Lemă. *Fie* $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. *Are loc egalitatea*

$$a_0+a_1\varepsilon+\ldots+a_{n-1}\varepsilon^{n-1}=0,\quad a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R},$$

dacă şi numai dacă $a_0=a_1=\ldots=a_{n-1}$.

Demonstraţie. Definim polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$ prin $f=a_0+a_1X+\ldots+a_{n-1}X^{n-1}$ şi $g=1+X+\ldots+X^{n-1}$. Dacă f, g au rădăcini comune, atunci (f,g) divide g. Deoarece g este ireductibil în $\mathbb{R}[X]$, rezultă $(f,g)=g$, adică $g\mid f$, şi, deci, $g=kf$, $k\in\mathbb{R}$. În consecinţă, avem $a_0=a_1=\ldots=a_{n-1}$. Reciproca este evidentă.

1. *Câte numere de* n *cifre* 2, 3, 7 *sau* 9 *se divid cu* 3? **(Concursul "Traian Lalescu", 2003)**

Soluţie. Fie x_n, y_n şi z_n numărul numerelor cu n cifre 2, 3, 7 sau 9 congruente cu 0, 1 şi respectiv 2 modulo 3. Se cere să se afle x_n. Fie $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. Evident, $x_n+y_n+z_n=4^n$ şi $x_n+\varepsilon y_n+\varepsilon^2z_n=\sum\limits_{a_1,\ldots,a_n\in\{2,3,7,9\}}\varepsilon^{a_1+\ldots+a_n}=\left(\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^7+\varepsilon^9\right)^n=1$. Deci $x_n-1+\varepsilon y_n+\varepsilon^2z_n=0$, de unde rezultă că $x_n-1=y_n=z_n=k$. Atunci $3k=x_n+y_n+z_n-1=4^n-1$, de unde $k=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$. Ca urmare, $x_n=\dfrac{1}{3}(4^n+2)$.

2. *Fie* $S_n=\{1,2,\ldots,2n\}$ *şi* $\mathcal{A}_n$ $(\mathcal{B}_n)$ *familia submulţimilor pare* (*impare*) *ale mulţimii* S_n, *având* n *elemente. Să se determine* $|\mathcal{A}_n|-|\mathcal{B}_n|$. **(Polonia, 2001)**

Soluţie. Ideea esenţială este că avem $|\mathcal{A}_n|-|\mathcal{B}_n|=\sum\limits_{A\subset S_n,\ |A|=n}(-1)^{m(A)}$. Dar ultima expresie este coeficientul lui X^n în dezvoltarea $\prod\limits_{i=1}^{2n}\left[1+(-1)^iX\right]$. Cum acest

[1] Elev, Liceul "Dimitrie Cantemir", Oneşti

produs este egal cu $(1+X)^n(1-X)^n = \left(1-X^2\right)^n$, deducem că $|\mathcal{A}_n| - |\mathcal{B}_n|$ este coeficientul lui X^n în dezvoltarea $\left(1-X^2\right)^n$, adică este 0 pentru n impar şi $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ pentru n par.

3. *Fie p un număr prim impar, numerele naturale m şi n divizibile cu p, iar n impar. Pentru fiecare m -uplă $(c_1,\ldots,c_m)$, unde $c_i \in \{1,2,\ldots,n\}$, cu proprietatea că $p \mid \sum_{i=1}^{m} c_i$, considerăm produsul $c_1\cdot\ldots\cdot c_m$. Să se demonstreze că suma acestor produse este divizibilă cu $\left(\frac{n}{p}\right)^m$.* (**Gabriel Dospinescu**)

Soluţie. Pentru orice $k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$, fie $x_k = \sum c_1\cdot\ldots\cdot c_m$, suma luându-se după toate m-uplele $(c_1,\ldots,c_m)$ pentru care $\sum_{i=1}^{m} c_i \equiv k \pmod p$. Luând $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$, avem

$$\left(\varepsilon + 2\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^n\right)^m = \sum_{c_1,\ldots,c_m\in\{1,2,\ldots,n\}} c_1\cdot\ldots\cdot c_m \varepsilon^{c_1+\ldots+c_m} = \sum_{k=0}^{p-1} x_k\varepsilon^k.$$

Cum, printr-un calcul simplu, se obţine

$$\varepsilon + 2\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^n = \frac{n\varepsilon^{n+2} - (n+1)\,\varepsilon^{n+1} + \varepsilon}{(\varepsilon-1)^2} = \frac{n\varepsilon}{\varepsilon-1},$$

rezultă că

$$\frac{n^m}{(\varepsilon-1)^m} = \sum_{k=0}^{p-1} x_k\varepsilon^k. \tag{1}$$

Pe de altă parte, din $\varepsilon^{p-1}+\ldots+\varepsilon+1=0$ deducem că

$$\frac{1}{\varepsilon-1} = -\frac{1}{p}\left(\varepsilon^{p-2} + 2\varepsilon^{p-3} + \ldots + (p-2)\,\varepsilon + p - 1\right)$$

şi obţinem

$$\frac{n^m}{(\varepsilon-1)^m} = \left(-\frac{n}{p}\right)^m \left(\varepsilon^{p-2} + 2\varepsilon^{p-3} + \ldots + (p-2)\,\varepsilon + p - 1\right)^m.$$

Scriind

$$\left(X^{p-2} + 2X^{p-3} + \ldots + (p-2)\,X + (p-1)\right)^m = b_0 + b_1X + \ldots + b_{m(p-2)}X^{m(p-2)},$$

deducem că

$$\frac{n^m}{(\varepsilon-1)^m} = \left(-\frac{n}{p}\right)^m \left(y_0 + y_1\varepsilon + \ldots + y_{p-1}\varepsilon^{p-1}\right), \tag{2}$$

unde $y_j = \sum_{k\equiv j \pmod p} b_k$.

Din (1) şi (2), obţinem relaţia

$$x_0 - ry_0 + (x_1 - ry_1)\,\varepsilon + (x_2 - ry_2)\,\varepsilon^2 + \ldots + (x_{p-1} - ry_{p-1})\,\varepsilon^{p-1} = 0,$$

unde $r = \left(-\dfrac{n}{p}\right)^m$. Din aceasta rezultă că $x_0 - ry_0 = \ldots = x_{p-1} - ry_{p-1} = k$. Rămâne să arătăm că $r \mid x_0$. Este suficient să arătăm că $r \mid k$. Dar

$$\begin{aligned} pk &= x_0 + \ldots + x_{p-1} - r\left(y_0 + \ldots + y_{p-1}\right) = \\ &= (1 + 2 + \ldots + n)^m - r\left(b_0 + \ldots + b_{m(p-2)}\right) = \\ &= (1 + 2 + \ldots + n)^m - r\left(1 + 2 + \ldots + (p-1)\right)^m . \end{aligned}$$

Deci $pk = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^m - r\left(\dfrac{p(p-1)}{2}\right)^m$ şi, cum membrul drept se divide cu pr, rezultă că $r \mid k$.

4. *Fie $n, a_1, a_2, \ldots, a_m \in N^*$ şi $f(k)$ numărul m-uplelor $(c_1, \ldots, c_m)$ pentru care $1 \le c_i \le a_i$ şi $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \equiv k \pmod n$. Să se arate că $f(0) = f(1) = \ldots = f(n-1)$ dacă şi numai dacă există un indice i astfel încât $n \mid a_i$.* **(Rookie Contest, 1999)**

Soluţie. Să observăm că au loc relaţiile

$$\prod_{i=1}^{m}\left(X + X^2 + \ldots X^{a_i}\right) = \sum_{1 \le c_i \le a_i} X^{c_1 + c_2 + \ldots + c_m} \quad \text{şi}$$

$$f(0) + f(1)\varepsilon + \ldots + f(n-1)\varepsilon^{n-1} = \sum_{1 \le c_i \le a_i} \varepsilon^{c_1 + \ldots + c_m} = \prod_{i=1}^{m}\left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{a_i}\right),$$

unde am notat în mod firesc $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Atunci $f(0) = f(1) = \ldots = f(n-1)$ este echivalent cu $f(0) + f(1)\varepsilon + \ldots + f(n-1)\varepsilon^{n-1} = 0$, deci cu $\prod\limits_{i=1}^{m}\left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{a_i}\right) = 0$. Ultima realţie are loc dacă şi numai dacă există un indice i astfel încât $\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{a_i} = 0$ şi, ca urmare, $\varepsilon^{a_i} = 1$, adică $n \mid a_i$.

5. *Fie p un număr prim şi $A = \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Să se determine numărul mulţimilor $B \subset A$ cu p elemente şi având proprietatea că $p \mid m(B)$.* **(OIM - 1995, Polonia)**

Soluţie. Cazul $p = 2$ fiind banal, vom considera $p \ge 3$. Fie $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ şi x_j numărul mulţimilor $B \subset A$ cu p elemente şi pentru care $m(B) \equiv j \pmod p$. Atunci

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j \varepsilon^j = \sum_{B \subset A,\ |B| = p} \varepsilon^{m(B)} = \sum_{1 \le c_1 \le \ldots \le c_p \le 2p} \varepsilon^{c_1 + \ldots + c_p},$$

ultima sumă fiind coeficientul lui X^p în dezvoltarea $(X + \varepsilon)\left(X + \varepsilon^2\right)\ldots\left(X + \varepsilon^{2p}\right)$. Cum $X^p - 1 = (X-1)(X-\varepsilon)\ldots\left(X - \varepsilon^{p-1}\right)$, deducem că $(X+\varepsilon)\left(X+\varepsilon^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(X+\varepsilon^{2p}\right) = \left(X^p+1\right)^2$ şi, deci, coeficientul lui X^p este 2. Aşadar, $\sum\limits_{j=0}^{p-1} x_j\varepsilon^j = 2$ sau

$x_0 - 2 + x_1\varepsilon + \ldots + x_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$, de unde rezultă că $x_0 - 2 = x_1 = \ldots = x_{p-1} = k$. Urmează că $pk = x_0 + \ldots + x_{p-1} - 2 = \binom{2p}{p} - 2$. În concluzie, $x_0 = 2 + \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right)$.

6. *Fie A o mulţime de numere naturale ce conţine cel puţin două numere impare. Să se arate că pentru $k \in \{0, 1, 2\}$ are loc relaţia $\sum\limits_{B\subset A} (-1)^{m(B)}\, m^k(B) = 0$ (B poate fi $\emptyset$ sau A).* **(Gabriel Dospinescu)**

Soluţie. Pornim de la observaţia că

$$\prod_{a\in A} (1 + X^a) = \sum_{B\subset A} X^{m(B)}. \tag{1}$$

În (1) facem $x = -1$ şi deducem că $\sum\limits_{B\subset A} (-1)^{m(B)} = \prod\limits_{a\in A} (1 + (-1)^a) = 0$. Derivăm relaţia (1) şi obţinem (notând $A = \{a_1, ..., a_p\}$)

$$\sum a_1 X^{a_1}(1 + X^{a_2}) \ldots (1 + X^{a_p}) = \sum_{B\subset A} m(B) X^{m(B)}. \tag{2}$$

În (2) facem $x = -1$ şi deducem (ţinând cont că din ipoteză fiecare termen al sumei din membrul stâng este 0) că $\sum\limits_{B\subset A} m(B)(-1)^{m(B)} = 0$. Derivăm apoi (2) şi obţinem analog că $\sum\limits_{B\subset A} (-1)^{m(B)} m^2(B) = 0$.

În final propunem spre rezolvare pe aceeaşi cale problemele următoare. Pentru a realiza că această metodă merită să fie cunoscută, sugerăm ca atât problemele anterioare cât şi cele următoare să fie rezolvate şi "clasic".

7. *Fie a_n numărul submulţimilor $B \subset \{1, 2, ..., 6n\}$ pentru care $m(B) \equiv 5 \pmod 6$ şi b_n numărul submulţimilor $C \subset \{1, 2, ..., 7n\}$ pentru care $\prod\limits_{x\in C} x \equiv 5 \pmod 7$. Să se determine $\frac{a_n}{b_n}$.* **(Polonia)**

8. *Să se calculeze suma elementelor submulţimilor lui $\{1, 2, ..., 3n\}$ care au măsura multiplu de 3.* **(Gabriel Dospinescu)**

9. *Fie $A = \{1, 2, .., n\}$. a) Să se arate că familiile submulţimilor pare şi impare ale lui A au acelaşi număr de elemente şi aceeaşi sumă a măsurilor elementelor.*

b) Să se afle suma măsurilor submulţimilor pare ale lui A. **(Test de selecţie, 1994)**

Un procedeu de calcul al limitelor unor şiruri de forma $(a_{n+1}-a_n)_{n\geq 1}$

Oana CÂRJĂ[1]

1. Scopul acestei note este prezentarea unei scheme de calcul al limitelor unor şiruri de forma $(a_{n+1}-a_n)_{n\geq 1}$, schemă desprinsă din soluţia dată de *M. Ţena* relativ la *şirul lui Lalescu* [**1**, p. 443].

Baza teoretică a acestei scheme este dată de următoarea

Propoziţie. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere strict pozitive ce verifică condiţiile:*

$$(i)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1;\quad (ii)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\alpha\in(0,\infty);\quad (iii)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\beta\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\alpha\ln\beta$.

Demonstraţie. Avem:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^{\dfrac{a_n}{a_{n+1}-a_n}}\right]^{\dfrac{n}{a_n}(a_{n+1}-a_n)},\ n\geq 1,$$

de unde, prin logaritmare, obţinem:

$$(a_{n+1}-a_n)\ln\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^{\dfrac{a_n}{a_{n+1}-a_n}}=\frac{a_n}{n}\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n,\ n\geq 1. \tag{1}$$

Din (i) rezultă imediat că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=0$ şi, deci,

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^{\dfrac{a_n}{a_{n+1}-a_n}}=1. \tag{2}$$

Relaţiile (1), (2), (ii) şi (iii) arată că există $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$, finită sau nu, şi, prin trecere la limită în (1), obţinem că această limită este $\alpha\ln\beta$, q.e.d.

Observaţie. Menţionăm faptul că pentru calculul limitei de la punctul (iii) (unde apare o nedeterminare de tipul 1^∞) nu putem utiliza limita fundamentală corespunzătoare, anume $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x)^{1/x}=e$, ci trebuie procedat în alt mod.

2. Aplicaţie la şiruri remarcabile. Avem în vedere următoarele trei şiruri:

1° *Şirul lui T. Lalescu* $L_n=\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}$, $n\geq 2$.

Notăm $a_n=\sqrt[n]{n!}$, $n\geq 2$ şi obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\,\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\,\frac{n+1}{n}=\frac{1}{e}\cdot e\cdot 1=1;$$

[1] Elevă, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{n/(n+1)}=e.$$

Conform Propoziţiei, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n=\dfrac{1}{e}\cdot\ln e=\dfrac{1}{e}$.

2° *Şirul lui R. T. Ianculescu* $I_n=(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}$, $n\geq 2$ [**1**, p. 521].

Fie $a_n=n\sqrt[n]{n}$, $n\geq 2$. Se obţine imediat că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$. Apoi,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}}{n\sqrt[n]{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=e$$

şi, deci, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=1\cdot\ln e=1$.

3° *Şirul lui M. Ghermănescu* $G_n=\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}-\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}}$, $n\geq 2$ [**1**, p. 520].

Luăm $a_n=n^{n-1}/(n-1)^{n-2}$, $n\geq 2$. Prin calcul, găsim $\alpha=\beta=e$ (cu notaţiile din Propoziţie). Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} G_n=e$.

3. Probleme de concurs. Cu Propoziţia de mai pot fi calculate multe dintre limitele ce sunt date la concursurile şcolare.

1° *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}-e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\right)$. **(Olimpiada locală, 2003)**

Luăm $a_n=e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ şi constatăm că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n+1}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n}{n+1}}=e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}=e^C$, unde $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$ este *constanta lui Euler*. Deci, limita este e^C.

2° *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale strict pozitive astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a\in R_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{n}=b\in R_+^*$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1}-y_n)=c\in R$. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_{n+1}\sqrt[n+1]{x_{n+1}}-y_n\sqrt[n]{x_n}\right)=ac$. (**D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Şomodi,** *C:844*, G. M.-11/1988)

Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}-y_n}{y_n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=1$ şi

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{y_{n+1}}{y_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{y_{n+1}-y_n}{y_n}\right)^n=\ldots=e^{c/b}$ (calcul de rutină).

Fie $a_n=y_n\sqrt[n]{x_n}$; obţinem: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}}{y_n}\cdot\dfrac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}}{\sqrt[n]{x_n}}=1\cdot\dfrac{a}{a}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{n}\sqrt[n]{x_n}=ba$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{y_{n+1}}{y_n}\right)^n\cdot\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}}=$ $=e^{c/b}$. Conform Propoziţiei, limita cerută este egală cu $(ba)\ln e^{c/b}$, adică este ac.

Propunem spre rezolvare următoarele probleme selectate din G. M.: C:2062 (7-8/1998), 24628 (1/2002) şi 24708 (5-6/2002).

Bibliografie

1. **D. M. Bătineţu** - *Şiruri*, Ed. "Albatros", Bucureşti, 1979.

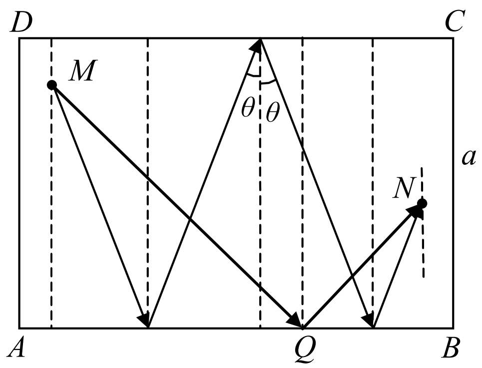
Asupra unei probleme propuse la Concursul "Florica T. Câmpan", martie 2003

Horia-Nicolai TEODORESCU[1]

La etapa judeţeană a concursului amintit, s-a dat şi următoarea problemă (reprodusă aici sumar):

"Pe un biliard dreptunghiular ABCD, o bilă porneşte din M către AB şi loveşte o altă bilă în N. Unde loveşte prima bilă latura AB? Se cunosc coordonatele punctelor M şi N". (Autor necunoscut)

Baremul afişat pe uşa şcolii unde s-a desfăşurat concursul preciza drept soluţie unică un punct de coordonate corespunzătoare datelor problemei, $(0, 2)$. Aceasta este însă numai o soluţie particulară (este drept, singura care putea fi determinată precis din datele problemei). Din figura alăturată se poate constata că există o infinitate de soluţii, obţinute prin ciocniri multiple fie şi numai după laturile AB şi respectiv CD (semi-biliardul – biliardul semi-infinit – creat de dreptele AB şi CD, fără laturile AD şi BC).



Deoarece la ciocnire traiectoria face unghiuri egale cu normala la suprafaţa de ciocnire, din egalităţile de unghiuri, obţinem, cu notaţiile $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$:

$$x_N - x_M = y_M \operatorname{tg}\theta + y_N \operatorname{tg}\theta + 2pa \operatorname{tg}\theta,$$

unde p este numărul de ciocniri cu latura CD, iar a este distanţa dintre laturile AB şi CD. Deci,

$$x_N - x_M = (y_M + y_N + 2pa) \operatorname{tg}\theta,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x_N - x_M}{y_M + y_N + 2pa}, \quad \theta = \theta(p), \ p = 0, 1, \ldots$$

In textul problemei, nu se dă valoarea a, dar aceasta nu face să dispară infinitatea de soluţii posibile după relaţia de mai sus. Corespunzător fiecărei valori de unghi, se determină punctele de lovire a dreptei AB, iar pentru $p = 0$, se obţine soluţia indicată în timpul concursului. Desigur, există şi alte familii de soluţii, prin ciocniri numai

[1] Prof. dr., Fac. de Electronică şi Telecomunicaţii, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

cu pereţii AD şi BC (strict similare cu cele discutate) sau obţinute prin ciocniri cu toţi cei patru pereţi – soluţii pe care nu le analizăm aici.

O anumită ambiguitate a textului se pare că a produs încurcături unor candidaţi. Printre exprimările mai puţin fericite se numără "se îndreaptă spre AB". In ce sens ar trebui interpretată această afirmaţie? Orice traiectorie "în jos" se îndreaptă spre AB, căci se apropie de AB – distanţa dintre punctul de pe traiectorie şi AB scade. Ar fi trebuit spus "traiectoria punctului este iniţial după o dreaptă, care intersectează segmentul AB". Sau, mai simplu, "bila se ciocneşte întâi de AB". Dacă se mai făcea şi precizarea "se ciocneşte o singură dată cu AB şi nici o dată de alte margini ale biliardului, înainte de a lovi bila din N", atunci problema ar fi fost nu numai mult mai clară, dar ar fi avut ca unică soluţie chiar soluţia indicată participanţilor la concurs.

Unii candidaţi au fost înclinaţi să considere că bila ce porneşte din M se loveşte întâi de bila din N şi abia apoi de marginea AB. Interpretarea nu era greşită, căci textul problemei nu contrazice această interpretare. Din nefericire, aceasta complică problema, căci două puncte materiale se mişcă după ciocnire pe dreapta după care s-au mişcat iniţial, dar în sens opus, deci bila din M urma să se întoarcă întâi spre CD (sau AD, CD – funcţie de dimensiunile biliardului) şi apoi spre AB! Dacă bilele se presupun nepunctuale, problema este nedeterminată (este necesar să se mai precizeze unghiul de contact al bilelor la prima ciocnire); cu precizarea unghiului de ciocnire, problema devine rezolvabilă, dar depăşeşte nivelul de cunoştinţe de fizică la clasa a VIII-a.

In concluzie, problema discutată avea prea multe neclarităţi şi imprecizii pentru a fi inclusă ca atare într-un concurs de nivel judeţean, iar acordarea de note mari la această problemă probabil a lăsat pe unii elevi cu falsa impresie că au înţeles şi chiar rezolvat corect (şi complet) problema dacă au dat soluţia indicată în ziua concursului.

In final, cred că este meritoriu pentru Comisia concursului amintit că a dat atenţie unei probleme de tip biliard, dat fiind că domeniul biliardelor formale (în particular, teoria biliardelor hiperbolice) este dintre cele mai profunde şi fertile astăzi în teoria sistemelor ergodice şi a sistemelor cu dinamică neliniară [**1**], [**2**]. Biliardele poligonale şi eliptice în plan şi cele cubice şi tetraedrice sunt de altfel probleme clasice în geometrie (vezi *problema lui Alhazen*, datând din antichitate şi intens studiată în evul mediu, sau *porismul lui Poncelet*), cu multiple şi importante aplicaţii în fizică, prea puţin reflectate în literatura de specialitate pentru elevi de la noi din ţară. Să aşteptăm deci şi alte probleme despre biliarde în culegeri şi în concursuri şcolare.

Bibliografie

1. **Lai-Sang Young** - *Developments in Chaotic Dynamics*, Notices of AMS, 1998, vol. 45, nr. 10, pp. 1318–1328.
2. **M. Hasewinkel** - *Encyclopedia of Mathematics*, Vol. 1, pp. 406–411 (Pessin Theory), Kluwer Academic, 1997.

O problemă ... şi opt soluţii

Adrian ZANOSCHI[1]

La prima ediţie a **Concursului de matematică "Alexandru Myller"**, care a avut loc la Iaşi, în perioada 4 - 6 aprilie 2003, a fost propusă elevilor de clasa a X-a următoarea problemă [**1**]:

Fie ABC şi ADE două triunghiuri dreptunghice cu $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$ şi $AB = AD$. Fie F proiecţia lui B pe AC şi G proiecţia lui D pe AE. Să se arate că punctele B, F, E sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele D, G, C sunt coliniare.

Problema, rezolvată corect de aproximativ 60% dintre concurenţi, a prilejuit acestora etalarea unor variate tehnici şi metode de geometrie sintetică, analitică şi vectorială. Vă prezentăm în continuare opt dintre rezolvările care au fost date în concurs şi în afara lui, lăsându-vă pe dumneavoastră să decideţi care este cea mai frumoasă.

Soluţia I (sintetică). Aplicând teorema catetei în triunghiurile ABC şi ADE, obţinem:

$$AF \cdot AC = AB^2 = AD^2 = AG \cdot AE,$$

de unde rezultă că $AF \cdot AC = AG \cdot AE$, adică punctele F, C, E şi G sunt conciclice. De aici, deducem că $\widehat{CFE} = 90°$ dacă şi numai dacă $\widehat{EGC} = 90°$, ceea ce înseamnă că punctele B, F, E sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele D, G, C sunt coliniare. (**Andrei Ştefănescu**, elev, *Colegiul Naţional de informatică "Tudor Vianu", Bucureşti*)

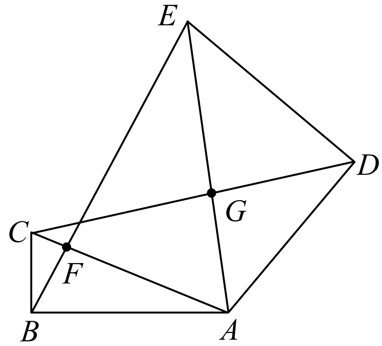


Fig. 1

Soluţia a II-a (sintetică). Vom demonstra mai întâi următoarea

Lemă. *Fie un triunghi ABC şi un punct $M \in (BC)$. În aceste condiţii, AM este perpendiculară pe BC dacă şi numai dacă:*

$$AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2. \tag{1}$$

Demonstraţie. I Dacă $AM \perp BC$, atunci din egalităţile $AB^2 - BM^2 = AM^2$ şi $AC^2 - CM^2 = AM^2$, rezultă relaţia căutată.

II Să presupunem că are loc relaţia (1). Notând cu α unghiul $\widehat{AMB}$, avem

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2\,AM \cdot BM \cos\alpha,$$
$$AC^2 = AM^2 + CM^2 + 2\,AM \cdot CM \cos\alpha,$$

de unde, folosind egalitatea (1), deducem $-AM \cdot BM \cos\alpha = AM \cdot CM \cos\alpha$ sau $AM \cdot BC \cos\alpha = 0$, deci $\alpha = 90°$.

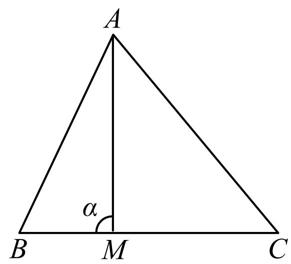


Fig. 2

[1] Profesor, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

Revenind la problema noastră, să presupunem că B, F, E sunt coliniare. Aplicând Lema în triunghiurile ABC, ADE şi ACE, obţinem

$$AB^2 - AF^2 = CB^2 - CF^2, \tag{2}$$
$$AD^2 - AG^2 = DE^2 - EG^2, \tag{3}$$
$$CE^2 - CF^2 = EA^2 - FA^2. \tag{4}$$

Cum $AB = AD$, din (2) şi (3) rezultă că:

$$CB^2 - CF^2 + AF^2 = DE^2 - EG^2 + AG^2,$$

de unde, având în vedere relaţia (4), găsim:

$$CB^2 + EA^2 - CE^2 = DE^2 - EG^2 + AG^2,$$

sau

$$CB^2 + \left(EA^2 - DE^2\right) - AG^2 = CE^2 - EG^2,$$
$$\left(CB^2 + AD^2\right) - AG^2 = CE^2 - EG^2,$$
$$CA^2 - AG^2 = CE^2 - EG^2,$$

ceea ce înseamnă, conform Lemei, că $CG \perp AE$. Prin urmare, punctele D, G, C sunt coliniare. Reciproca se demonstrează în mod analog. (**Adrian Zanoschi**)

Soluţia a III-a (sintetică). Presupunem că punctele B, F, E sunt coliniare. Fie G' proiecţia punctului C pe AE. Din faptul că $\triangle AG'C \sim \triangle AFE$ rezultă că $\dfrac{AG'}{AF} = \dfrac{AC}{AE}$ sau $AG' = \dfrac{AC \cdot AF}{AE} = \dfrac{AB^2}{AE}$ (teorema catetei în $\triangle ABC$). Ca urmare, $AG' = \dfrac{AD^2}{AE} = AG$ (teorema catetei în $\triangle ADE$), adică G' coincide cu G şi, deci, punctele D, G, C sunt coliniare. Implicaţia inversă se demonstrează la fel. (**Petru Asaftei**, prof., *Şcoala Normală "V. Lupu", Iaşi*)

Soluţia a IV-a (sintetică). Vom utiliza rezultatul următor: *Un patrulater $MNPQ$ (convex sau concav) este ortodiagonal dacă şi numai dacă este îndeplinită relaţia $MN^2 + PQ^2 = MQ^2 + NP^2$.*

Dacă punctele B, F, E sunt coliniare, atunci patrulaterul $ABCE$ este ortodiagonal şi are loc relaţia $AB^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2$. Deoarece $AB = AD$, $AE^2 = AD^2 + ED^2$, $BC^2 = AC^2 - AB^2 = AC^2 - AD^2$, relaţia se scrie $AD^2 + CE^2 = AC^2 + ED^2$, adică patrulaterul $ADEC$ este ortodiagonal. Deci D, G, C sunt coliniare. Menţionăm faptul că în condiţiile $E \in BF$ şi $E \notin [BF]$ patrulaterul $ABCE$ este concav şi că $E \in [BF]$ nu poate avea loc. Se arată la fel implicaţia inversă. (**Temistocle Bîrsan**)

Soluţia a V-a (vectorială). Să presupunem că punctele B, F şi E sunt coliniare. În acest caz, avem $BE \perp AC$, deci $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Să arătăm că $CG \perp AE$:

$$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) =$$
$$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} =$$
$$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} =$$

$$= \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AG} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) =$$

$$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = -AB^2 + AG \cdot AE = -AD^2 + AG \cdot AE = 0.$$

De aici, având în vedere că $DG \perp AE$, rezultă că punctele D, G şi C sunt coliniare. Cealaltă implicaţie se demonstrează în mod analog. (**Cristina Gutue**, elevă, *Colegiul Naţional "I. C. Brătianu", Piteşti* şi **Bianca Milatinovici**, elevă, *Liceul de Informatică "Gr. C. Moisil", Iaşi*)

Soluţia a VI-a (vectorială). Fie xOy un sistem ortogonal de coordonate astfel încât Ox să fie mediatoarea lui BD. Vom nota cu $\overrightarrow{r}_M$ vectorul de poziţie al unui punct oarecare M (faţă de polul O). Punctele B, F şi E sunt coliniare dacă şi numai dacă $BE \perp AC$, adică $(\overrightarrow{r}_E - \overrightarrow{r}_B) \cdot (\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_A) = 0$ sau

$$\overrightarrow{r}_B \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B \ . \quad (1)$$

Punctele D, G şi C sunt coliniare dacă şi numai dacă $(\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_D) \cdot (\overrightarrow{r}_E - \overrightarrow{r}_A) = 0$, sau

$$\overrightarrow{r}_D \cdot \overrightarrow{r}_E + \overrightarrow{r}_C \cdot \overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D \ . \quad (2)$$

Deoarece $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$, rezultă că $(\overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A) \cdot (\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_B) = 0$ şi $(\overrightarrow{r}_D - \overrightarrow{r}_A) \cdot$ $\cdot (\overrightarrow{r}_E - \overrightarrow{r}_D) = 0$, deci

$$\overrightarrow{r}_B \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_C \cdot \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B^2 \quad (3)$$

şi

$$\overrightarrow{r}_D \cdot \overrightarrow{r}_E + \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D = \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_D^2 \ . \quad (4)$$

Datorită modului de alegere a sistemului de coordonate avem $\overrightarrow{r}_B^2 = \overrightarrow{r}_D^2$ şi $\overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D$ şi astfel, din (3) şi (4), obţinem

$$\overrightarrow{r}_B \cdot \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_E \cdot \overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_D \cdot \overrightarrow{r}_E + \overrightarrow{r}_C \cdot \overrightarrow{r}_A \ . \quad (5)$$

Prin urmare, având în vedere relaţia (5) şi egalitatea $\overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_A \cdot \overrightarrow{r}_D$, rezultă că relaţiile (1) şi (2) sunt echivalente, adică ceea ce trebuia demonstrat. (**Adrian Zanoschi**)

Soluţia a VII-a (cu numere complexe). Deoarece relaţiile $F \in BE$ şi $G \in DC$ sunt echivalente cu $BE \perp AC$ şi respectiv cu $DC \perp AE$, problema noastră revine la a arăta echivalenţa $BE \perp AC \Leftrightarrow DC \perp AE$.

Considerăm un reper ortogonal în plan cu originea în A şi notăm cu b, c, d şi e afixele punctelor B, C, D şi E. Cum $AB = AD$, rezultă că $|b| = |d|$. Dacă notăm cu $x \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{C})$ produsul real al numerelor complexe x şi y, avem:

$$BE \perp AC \Leftrightarrow (e-b) \cdot c = 0 \Leftrightarrow (e-b)\,\overline{c} + \left(\overline{e} - \overline{b}\right) c = 0 \Leftrightarrow b\overline{c} + \overline{b}c = \overline{c}e + c\overline{e}, \quad (1)$$

$$DC \perp AE \Leftrightarrow (c-d) \cdot e = 0 \Leftrightarrow (d-c)\,\overline{e} + \left(\overline{d} - \overline{c}\right) e = 0 \Leftrightarrow d\overline{e} + \overline{d}e = \overline{c}e + c\overline{e}, \quad (2)$$

$$BC \perp AB \Leftrightarrow (c-b) \cdot b = 0 \Leftrightarrow (c-b)\,\overline{b} + \left(\overline{c} - \overline{b}\right) b = 0 \Leftrightarrow b\overline{c} + \overline{b}c = 2b\overline{b}, \quad (3)$$

$$DE \perp AD \Leftrightarrow (e-d) \cdot d = 0 \Leftrightarrow (e-d)\,\overline{d} + \left(\overline{e} - \overline{d}\right) d = 0 \Leftrightarrow d\overline{e} + \overline{d}e = 2d\overline{d}. \quad (4)$$

Cum $b\overline{b} = |b|^2 = |d|^2 = d\overline{d}$, din relaţiile (3) şi (4) rezultă că $b\overline{c} + \overline{b}c = d\overline{e} + \overline{d}e$, de unde deducem că relaţiile (1) şi (2) sunt echivalente, deci $BE \perp AC$, dacă şi numai dacă $DC \perp AE$. (**Cezar Chirilă**, elev, *Colegiul Naţional "M. Eminescu", Botoşani*)

Soluţia a VIII-a (analitică). Fie xOy un sistem ortogonal de coordonate cu originea în A şi $(Ox = (AC$. În acest caz, punctele din problemă vor avea coordonatele: $A(0,0)$, $B(b,b')$, $C(c,0)$, $D(d,d')$, $E(e,e')$, $F(b,0)$, $G(g,g')$. Să presupunem că B, F, E sunt coliniare şi să arătăm că D, G, C sunt coliniare (reciproca se poate demonstra în mod analog, alegând sistemul de coordonate astfel încât triunghiul ADE să joace rolul triunghiului ABC). În acest caz $e = b$.

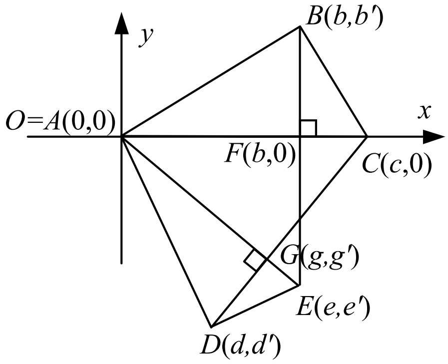


Fig. 3

Din $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$, rezultă că

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = m_{AD} \cdot m_{DE} = -1$$

sau

$$\frac{b'}{b} \cdot \frac{b'}{b-c} = \frac{d'}{d} \cdot \frac{e'-d'}{e-d} = -1,$$

de unde obţinem $b^2 + (b')^2 = bc$ şi $ed + e'd' = d^2 + (d')^2$. De aici, având în vedere că $AB = AD$, deci $b^2 + (b')^2 = d^2 + (d')^2$, deducem că:

$$ed + e'd' = bc. \tag{1}$$

Cum $DG \perp AE$, rezultă că $m_{DG} \cdot m_{AE} = -1$, sau

$$\frac{g'-d'}{g-d} = -\frac{e}{e'}. \tag{2}$$

În sfârşit, ţinând cont de (1) şi (2), putem scrie:

$$m_{DG} = m_{DC} \Leftrightarrow \frac{g'-d'}{g-d} = \frac{d'}{d-c} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -\frac{e}{e'} = \frac{d'}{d-c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ed + e'd' = ec \overset{(1)}{\Leftrightarrow} bc = ec \Leftrightarrow b = e,$$

care este adevărată, conform ipotezei. (**Evelina Slătineanu**, elevă, *Liceul "D. Cantemir", Iaşi*)

Bibliografie

1. **Concursul de matematică "Al. Myller"**, ediţia I, 2003, *Problema X.3* (în Recreaţii matematice, suplimentul nr. 1 (2003) sau în prezentul număr, p. 33).
2. **Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff** - *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.

Asupra unor sume cu radicali

Dan POPESCU[1]

Scopul acestei note este prezentarea unor proprietăţi ale radicalilor accesibile elevului de gimnaziu şi utile în abordarea unitară a unor tipuri de probleme.

Propoziţia 1. *Dacă* $n \in \mathbb{N}$ *este astfel încât* $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, *atunci* $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Fie $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$. Atunci $n = \dfrac{p^2}{q^2}$, deci $q^2 \mid p^2$, de unde $q \mid p$, adică $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 2. *Fie* $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ *astfel încât* $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Atunci* $\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$ *dacă şi numai dacă* $\sqrt{\dfrac{a}{b}} \in \mathbb{Q}$.

Demonstraţie. Imediat, din faptul că $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{1}{b}\sqrt{ab}$.

Propoziţia 3. *Fie* $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^*$ *astfel încât* $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} \in \mathbb{Q}^*$; *atunci* $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ *şi* $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Demonstraţie. Observăm că $\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b} = \dfrac{\alpha^2 a - \beta^2 b}{\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$ şi atunci $\sqrt{a} = \dfrac{1}{2\alpha}\left[\left(\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}\right) + \left(\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b}\right)\right] \in \mathbb{Q}$; analog pentru $\sqrt{b}$.

Propoziţia 4. *Fie* $a \in \mathbb{Q}^*$, *iar* $b \in \mathbb{Q}^*$ *astfel încât* $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; *atunci* $a \pm \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *şi* $a\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstraţie. Dacă, prin absurd, $a + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{b} = \left(a + \sqrt{b}\right) - a \in \mathbb{Q}$, contradicţie. La fel, dacă $a\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{b} = \dfrac{1}{a}\left(a\sqrt{b}\right) \in \mathbb{Q}$, fals.

Consecinţă. Deoarece un număr iraţional este nenul, iar inversul oricărui număr iraţional este tot număr iraţional, în condiţiile $\mathbf{P_4}$ avem şi că $\dfrac{a}{\sqrt{b}} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\dfrac{1}{a \pm \sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$.

Propoziţia 5. *Fie* $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ *astfel încât* $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *iar* $m, n \in \mathbb{Q}$. *Atunci* $m\sqrt{a} + n\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ *dacă şi numai dacă* $m^2 + n^2 = 0$.

Demonstraţie. Dacă $m = n = 0$, atunci $m\sqrt{a} + n\sqrt{b} = 0 \in \mathbb{Q}$. Invers, să presupunem că $m\sqrt{a} + n\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Pătratul acestui număr este tot raţional şi atunci $mn\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$. Însă $\sqrt{ab} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci $mn = 0$. În cazul în care $m = 0$, avem că $n\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, adică $n = 0$. Analog, pentru $n = 0$ obţinem că şi $m = 0$. În concluzie, $m^2 + n^2 = 0$.

Observaţie. Ţinând seama de $\mathbf{P_2}$, ipoteza $\sqrt{ab} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ poate fi înlocuită cu $\sqrt{\dfrac{a}{b}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Prezentăm în continuare câteva aplicaţii ale acestor rezultate, iar în încheiere sunt propuse alte exerciţii care pot fi rezolvate asemănător.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava

Problema 1. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *ecuaţiile*
a) $\frac{2}{3}\sqrt{a}+\frac{3}{4}\sqrt{b}=5$; *b)* $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{18}$.

Soluţie. *a)* Aplicând $\mathbf{P_3}$, obţinem că $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ şi atunci $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{N}$, conform $\mathbf{P_1}$. În plus, deoarece $(3,4)=1$, avem că $\sqrt{a}\,\vdots\,3$, $\sqrt{b}\,\vdots\,4$ şi cercetând posibilităţile existente, găsim unica soluţie $(9,16)$.

b) Ecuaţia se scrie echivalent $\sqrt{2a}+\sqrt{2b}=6$ şi aplicând din nou $\mathbf{P_3}$ şi $\mathbf{P_1}$, obţinem că $\sqrt{2a},\sqrt{2b}\in\mathbb{N}$, deci $a=2x^2$, $b=2y^2$ cu $x,y\in\mathbb{N}$. Înlocuind, găsim că $x+y=3$, de unde $(a,b)\in\{(0,18),(18,0),(2,8),(8,2)\}$.

Problema 2. *Să se arate că* $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Să observăm mai întâi că n şi $n+1$ nu pot fi simultan pătrate perfecte pentru $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă exact unul dintre ele este pătrat perfect, concluzia urmează din $\mathbf{P_4}$. Dacă nici unul nu este pătrat perfect, atunci se poate aplica $\mathbf{P_5}$, dat fiind faptul că $\sqrt{n(n+1)}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (numărul $n(n+1)$ este cuprins strict între pătratele perfecte consecutive n^2 şi $(n+1)^2$).

Problema 3. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}^3$ *ecuaţia*

$$\left(m^2-3m+2\right)\sqrt{n^2+n}+\left(p^2-4\right)\sqrt{n^2+5n+6}=0.$$

Soluţie. Singura valoare a lui $n\in\mathbb{N}$ pentru care unul dintre radicali dispare este $n=0$; în acest caz, ecuaţia devine $p^2-4=0$, iar mulţimea soluţiilor este $\{(a,0,2)\mid a\in\mathbb{N}\}$. Dacă $n\neq 0$, suntem în ipotezele $\mathbf{P_5}$:

$$n^2<n^2+n<(n+1)^2;\quad (n+2)^2<n^2+5n+6<(n+3)^2;$$

$$\left(n^2+3n\right)^2<\left(n^2+n\right)\left(n^2+5n+6\right)=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)<\left(n^2+3n+1\right)^2,$$

prin urmare $m^2-3m+2=0$ şi $p^2-4=0$, deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S=\{(1,a,2)\mid a\in\mathbb{N}^*\}\cup\{(2,b,2)\mid b\in\mathbb{N}^*\}$.

Probleme propuse.

1. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuaţiile:
a) $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=12$; *b)* $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{10}$.

2. Să se arate că ecuaţia $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{p}$, unde $p\in\mathbb{N}$ este prim, are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

3. Să se arate că $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

4. Să se arate că:
a) $\dfrac{1}{\sqrt{5n+7}-\sqrt{11}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$; *b)* $\dfrac{1}{\sqrt{5n+2}+\sqrt{5n+1}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5. Să se rezolve în $\mathbb{Q}$ ecuaţia $\left(2x^2+5x+3\right)\sqrt{11}-\left(2x^2+3x\right)\sqrt{21}=0$.

6. Fie $A=\left\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\mid a,b\in\mathbb{N}^*,\ a,b\leq 100\right\}$. Să se afle cardinalul mulţimii $A\cap\mathbb{Q}$.

Concursul "Alexandru Myller"
Ediţia I, Iaşi, 4 - 6 aprilie 2003

Alexandru Myller (1879 - 1965) s-a născut în Bucureşti dintr-o familie de intelectuali. A absolvit Facultatea de Ştiinţe – secţia matematică din Bucureşti. Între anii 1902 - 1906 se află în Germania pentru a continua studiile. În 1906, la Götingen, susţine teza de doctorat sub conducerea lui *David Hilbert*. Tot aici îl cunoaşte pe *Felix Klein*, fondatorul faimosului *"Program de la Erlangen"*. Reîntors în ţară, este titularizat în 1910 ca profesor de geometrie analitică la Univ. "Al. I. Cuza" din Iaşi.

În 1910 pune bazele unei *biblioteci*, *Seminarul Matematic*, care se va dezvolta treptat, şi a unei *şcoli de geometrie* ce va fi renumită în întreaga lume. Este iniţiatorul unei colecţii de modele geometrice şi se preocupă de problemele învăţământului secundar. A adus contribuţii de valoare în *geometria diferenţială, ecuaţii diferenţiale şi integrale* şi *istoria matematicii.*

A fost *rector al universităţii ieşene* în perioada 1945 - 46. Din 1949 este *membru al Academiei Române*. În 1960 universitatea Humbold din Berlin i-a conferit titlul de *doctor honoris causa*.

Notă. Concursul "Al. Myller" se adresează *elevilor din clasele VII - XII care au obţinut premii şi menţiuni la fazele superioare ale olimpiadelor şcolare din anul în curs sau cel anterior*. Prima ediţie a acestui concurs a fost sprijinită de către *Univ. "Al. I. Cuza"* şi *Filiala din Iaşi a SSMR*. Sarcina organizării şi desfăşurării acesteia au avut-o *I. S. J. Iaşi* şi următoarele licee: *Colegiul Naţional* şi *Liceul de Informatică "Gr. Moisil"*. Această ediţie a Concursului "Al. Myller" a fost un succes deplin sub aspect calitativ şi organizatoric.

Clasa a VII-a

1. Determinaţi numerele întregi a, b, c, d care verifică relaţiile $a^2 + b^2 = 2(c + d)$ şi $c^2 + d^2 = 2(a + b)$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

2. Fie $ABCD$ un pătrat fix şi punctele variabile $M \in (BC)$, $N \in (CD)$ astfel încât $MN = BM + DN$. Demonstraţi că măsura unghiului $\measuredangle NAM$ este constantă.

Gheorghe Iurea, Iaşi

3. Se consideră un triunghi ABC, un punct $M \in (AC)$ şi punctul $N \in BC$ astfel încât $MN \perp BC$. Perpendiculara din C pe AN şi perpendiculara dusă în B pe BC se intersectează în P, iar dreptele MP şi AN se intersectează în Q. Demonstraţi că $AP \perp CQ$ dacă şi numai dacă $AB \perp AC$.

Petru Răducanu, Iaşi

4. Fie a, b, c numere reale astfel încât $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$, $0 \le c \le 1$ şi $ab + bc + ca = 1$. Demonstraţi că $a^2 + b^2 + c^2 \le 2$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi numerele x, y, z care verifică relaţiile $x+y \ge 2z$ şi $x^2+y^2-2z^2 = 8$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

2. Un tetraedru regulat cu muchiile de lungime 1 se proiectează pe un plan. Demonstraţi că aria figurii obţinute este cel mult 1/2.

* * *

3. Fie tetraedrul $ABCD$ în care $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$ şi G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale feţelor BCD, ACD, ABD respectiv ABC. Determinaţi lungimea minimă a unui drum care este situat pe feţele tetraedrului şi trece prin G_A, G_B, G_C, G_D.

* * *

4. Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Demonstraţi că este posibil ca, eliminând cel mult două dintre elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, să obţinem o mulţime care are suma elementelor pătrat perfect.

Mihai Bălună, Bucureşti

Clasa a IX-a

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi O un punct în interiorul acestuia. Notăm cu a, b, c, d, e, f respectiv ariile triunghiurilor formate de O cu AB, BC, CD, DA, AC şi BD. Să se arate că $|ac - bd| = ef$.

Alexandru Myller

2. *a*) Arătaţi că există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, astfel încât $f(f(k)) = k$, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$.

b) Arătaţi că, dacă f este o funcţie ca la *a*), atunci numerele a, b, c nu sunt toate întregi.

Gheorghe Iurea, Iaşi

3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = 1$. Să se arate că $\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{ab-1}{ab+1} + \dfrac{bc-1}{bc+1} + \dfrac{ca-1}{ca+1} < 2$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

4. Fie $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ primul cadran şi $T : S \to S$, $T(x, y) = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$ o transformare a lui S. Numim "S - dreaptă" intersecţia dintre S şi o dreaptă din plan.

a) Arătaţi că orice S - dreaptă fixă a lui T conţine punctele fixe ale lui T.

b) Determinaţi S - dreptele fixe ale lui T.

($M \subset S$ se numeşte submulţime fixă a lui T dacă $T(M) = M$).

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a X-a

1. Fie $A_1 A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ şi M un punct în planul acestuia. Să se arate că $nR \leq MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_n \leq n(R + OM)$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

2. Fie polinomul $f(X) = X^n + 2X^{n-1} + 3X^{n-2} + \cdots + nX + n + 1$ şi $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n+2} + i \sin\dfrac{2\pi}{n+2}$. Să se arate că $f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon^2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon^{n+1}) = (n+2)^n$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

3. Fie ABC şi ADE două triunghiuri dreptunghice cu $m(\measuredangle B) = m(\measuredangle D) = 90^\circ$ şi $AB = AD$. Fie F proiecţia lui B pe AC şi G proiecţia lui D pe AE. Să se arate că punctele B, F, E sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele D, G, C sunt coliniare.

* * *

4. La un concurs se dau cinci probe, cu rezultatul admis - respins. Care este numărul minim de participanţi la concurs pentru care, orice rezultate ar obţine aceştia, să existe doi concurenţi A şi B astfel încât A să fie admis la toate probele la care a fost admis şi B?

* * *

Clasa a XI-a

1. Considerăm $\mathcal{A}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^{n+1} = 2003^n A\right\}$, unde n este un număr natural nenul fixat.

a) Arătaţi că $\mathcal{A}_n$ conţine o infinitate de elemente.

b) Determinaţi $\mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_{2003}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ două matrice cu proprietatea că, oricare ar fi o matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pentru care $AX = O_{3,1}$, avem că $BX = O_{3,1}$. Să se arate că există o matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $B = CA$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

3. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 0$ există numerele raţionale strict pozitive $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ cu următoarele proprietăţi:

a) $\dfrac{a_0}{0!} + \dfrac{a_1}{1!} + \ldots + \dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{1}{n!}$;

b) $a_0 + a_1 + \ldots + a_n < \dfrac{3}{2^n}$.

Dorin Andrica, Cluj - Napoca

4. Să se determine funcţiile derivabile $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

a) $f(0) = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{3} f'\left(\dfrac{x}{3}\right) + \dfrac{2}{3} f'\left(\dfrac{2x}{3}\right)$, $\forall x \in [0, \infty)$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

Clasa a XII-a

1. Fie f şi g două polinoame cu coeficienţi raţionali, ireductibile în $\mathbb{Q}[X]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(\alpha) = g(\beta) = 0$. Să se arate că, dacă $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$, atunci f şi g au acelaşi grad.

Bogdan Enescu, Buzău

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t \cos^2(2t) \cos^3(3t) \ldots \cos^{2002}(2002t)\, dt$.

Dorin Andrica, Cluj - Napoca

3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel necomutativ, unitar şi $a, b, c \in A$ astfel încât $ab + c = 1$. Dacă există $x \in A$ astfel încât $a + cx$ este inversabil, atunci există $y \in A$ astfel încât $b + yc$ este inversabil.

Andrei Nedelcu şi Lucian Lăduncă, Iaşi

4. *a)* Să se arate că există $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x^n}\, dx$ şi aceasta este finită, unde $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

b) Dacă se notează cu $l_n = \displaystyle\lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x^n}\, dx$, să se calculeze $\displaystyle\lim_{n \to \infty} l_n$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

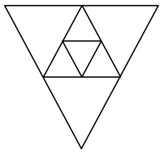
Concursul "Florica T. Câmpan", ediţia a III-a[1]
Faza judeţeană, 1 martie 2003

Clasa a IV-a

1. Care este cel mai mare număr care împărţit la 10 dă câtul 9?

2. Să se ordoneze numerele din şirul următor în ordinea crescătoare a sumei cifrelor lor: 132, 456, 199, 897, 1124,9191.

3. Câte triunghiuri sunt în figură?



4. Să se taie 7 cifre din şirul 123123123123, astfel încât numărul rămas să fie cel mai mare posibil. Care este numărul?

5. Pe o farfurie sunt 19 fructe: prune, caise, piersici. Numărul piersicilor este de 9 ori mai mare decât cel al prunelor. Câte caise sunt?

6. O coloană de militari, lungă de 100 metri, trece pe un pod lung de 100 metri cu viteza de 100 metri pe minut. Cât timp durează până ce coloana parcurge podul?

7. Când tu veneai pe lume, eu aveam cu 1 an mai mult decât de 4 ori vârsta ta de acum. Aş putea să ajung la 99 ani dacă voi mai trăi cu 2 ani mai mult decât ai trăit tu până acum. Câţi ani am eu acum?

Clasa a V-a

1. Suma cifrelor unui număr natural este 23, iar câtul împărţirii sale prin 9 este 96. Să se afle numărul.

2. În câte zerouri se termină numărul

$$N = 1^{2^{3^{4^{5^6}}}} \cdot 2^{3^{4^{5^{6^1}}}} \cdot 3^{4^{5^{6^{1^2}}}} \cdot 4^{5^{6^{1^{2^3}}}} \cdot 5^{6^{1^{2^{3^4}}}} \cdot 6^{1^{2^{3^{4^5}}}} ?$$

Monica Nedelcu

3. Numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sunt aşezate într-un tablou triunghiular astfel

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a & & & \\ & & b & & i & & \\ & c & & & & h & \\ d & & e & & f & & g \end{array}$$

Dacă suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului este 20, să se arate că numărul 5 este unul dintre vârfuri.

Andrei Nedelcu

4. Un colier este format din bile pe care sunt înscrise numere naturale nenule astfel încât pe bilele vecine uneia este înscris un divizor sau multiplu al numărului înscris pe acea bilă, fără ca un acelaşi număr să apară pe mai multe bile. Care este

[1] **Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 1.5 ore - cl. IV şi 2 ore - cl. V-VIII.

cel mai lung colier care poate fi format cu numerele naturale mai mici sau egale cu 100? Descrieţi toate soluţiile cu număr maxim de bile!

Mihaela Cianga

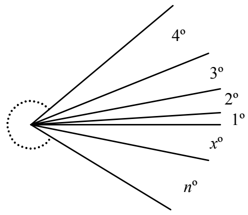
Clasa a VI-a

1. Fie $S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2003}$. Calculaţi $S + 2$.

2. Determinaţi toate numerele de forma $\overline{abcd}$ ştiind că

$$\frac{a+b+c}{5} = \frac{b+c+d}{2} = \frac{c+d+a}{3}.$$

3. În jurul unui punct O considerăm unghiurile cu măsurile din figură. Dacă $x = 9°$, calculaţi $n°$.



4. Într-un triunghi laturile sunt numere naturale pare. O latură este egală cu 2. Arătaţi că triunghiul este isoscel.

Clasa a VII-a

1. Fiecare celulă a unui tabel 2003×2003 este colorată la întâmplare cu una din 2002 culori. La un pas se permite recolorarea cu o aceeaşi culoare a unei linii sau a unei coloane, dacă pe această linie (coloană) se află măcar două celule de această culoare. Prezentaţi un algoritm cu un numar minim de paşi care permite ca orice tabel sa devină monocolor.

2. Fie r_1, r_2, r_3, ... , r_{2003} o rearanjare a numerelor întregi 1,2,3,...,2003. Să se demonstreze că produsul $P = (r_1 - 1)(r_2 - 2)\ldots(r_{2003} - 2003)$ este număr par.

3. Fie $\triangle ABC$ şi $M \in (BC)$. Notăm cu M', C', A', B' simetricele punctelor A, M', C', A' respectiv faţă de M, C, A, B. Să se arate că punctele M' şi B' coincid dacă şi numai dacă M este mijlocul lui (BC).

Gabriel Popa

4. Se consideră $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 80°$, $m(\widehat{C}) = 60°$ şi $AC = 1$. Să se demonstreze că BC este medie proporţională (geometrică) între AC şi $(AB + 1)$.

Clasa a VIII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească partea întreagă a numărului $\sqrt{n^2 + 3n}$.

2. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2003\}$ şi fie $f : A \to A$ o funcţie liniară neconstantă. Arătaţi că $f(1002) = 1002$.

Gheorghe Iurea

3. Două furnici merg cu viteză constantă pe paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm, $AA' = 12$ cm. Prima furnică pleacă din A şi ajunge în A' traversând, în ordine, muchiile $[BB']$, $[CC']$ şi $[DD']$

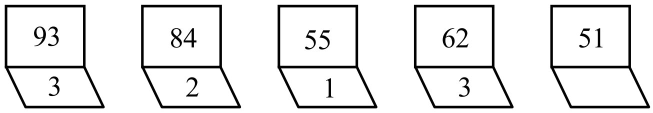
(pe drumul cel mai scurt). A doua furnică pleacă din B' şi ajunge în B traversând, în ordine, muchiile $[CC']$, $[DD']$ şi $[AA']$ (pe drumul cel mai scurt). Cunoscând că furnicile pornesc în acelaşi timp şi că ele se întâlnesc, aflaţi raportul vitezelor lor.

4. Fie o masă de biliard dreptunghiulară $ABCD$ la care s-au ales drept axe de coordonate laturile AB şi AD (AB e axa absciselor). Se dau 2 bile situate în punctele $M(5,6)$ şi $N(1,2)$. Bila din M pleacă liniar către AB astfel încât să lovească bila din N. Să se găsească punctul în care bila loveşte latura AB.

Faza interjudeţeană, 24 mai 2003

Clasa a IV-a

1. Pe fiecare dintre cele cinci cărţi, numărul de jos este într-o aceeaşi legătură ascunsă cu numărul de sus. Care este al doilea număr scris pe a cincea carte?



2. Un elev trebuie să înveţe pentru a doua zi la istorie, matematică şi engleză. În câte moduri îşi poate stabili ordinea disciplinelor la care învaţă? Precizaţi-le!

3. Dacă un pahar şi o sticlă cântăresc cât o cană, sticla respectivă cântăreşte cât paharul şi o farfurie, iar două căni cântăresc cât trei farfurii, atunci câte pahare cântăresc cât o sticlă?

4. Am vizitat grădina zoologică. Am văzut urşii, leii, lupii şi maimuţele, dar nu în această ordine. În prima cuşcă animalele dormeau şi erau urşi sau maimuţe. În a doua cuşcă nu erau lupi şi nici lei. În a treia cuşcă animalele se uitau în altă parte, nu la mine. În a patra cuşcă nu erau maimuţe şi nici urşi. Maimuţele nu dormeau. Lupii se uitau la mine. În ce ordine am vizitat animalele?

Clasa a V-a

1. Determinaţi cel mai mic număr scris în baza 10 numai cu cifrele 0 şi 1, divizibil cu 225.

2. Arătaţi că numerele $1, 2, 3 \ldots, 16$ nu pot fi aranjate pe o circumferinţă astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie pătrat perfect. Este posibilă o astfel de aranjare pe o linie? Justificaţi.

3. Fie fracţia $\frac{56}{2^{2003}}$.

a) Justificaţi că fracţia este zecimală finită;

b) Care sunt ultimele două zecimale nenule? Dar ultimele trei?

4. Un grup de prieteni hotărăsc să facă o călătorie la Viena. Fiecare dintre ei prezintă la vamă acelaşi număr de bancnote, unele de 100 €, altele de 100 \$. Organizatorul grupului deţine un sfert din bancnotele de 100 € şi o şesime din cele de 100 \$. Câte persoane sunt în grup şi care e minimul numărului total de bancnote, ştiind că fiecare trebuie să aibă cel puţin 5 astfel de bancnote?

Mihaela Cianga

Clasa a VI-a

1. Pe şase recipiente avem scrise capacităţile lor: 8 l, 13 l, 15 l, 17 l, 19 l şi respectiv 31 l. Recipientele sunt umplute cu ulei sau oţet. Un client cumpără de 840000 lei oţet şi tot de 840000 lei ulei, golind cinci din cele şase recipiente şi lăsând unul singur neatins. Care recipient a fost neatins? Care este preţul unui litru de ulei, ştiind că preţul uleiului este de două ori mai mare decât preţul oţetului?

Nicu Miron

2. Fie numerele naturale nenule $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Spunem că mulţimea $\{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă $\forall k \in \{3,4,5,6\}$, $\exists i, j \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $i \neq j$ astfel încât $a_k = a_i + a_j$. Să se afle câte mulţimi cu proprietatea $\mathcal{P}$ sunt de forma $\{1, 2, a, b, c, d\}$.

Petru Asaftei

3. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Dacă $AB = 2AC$, arătaţi că măsura unghiului $\widehat{C}$ este mai mică decât $67°30'$.

Petru Asaftei

4. Şase drepte se află în acelaşi plan. Arătaţi că cel puţin două dintre aceste drepte fac între ele un unghi cu măsura mai mică decât $31°$.

Clasa a VII-a

1. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+11}} = \dfrac{7}{12}$.

2. Să se arate că toate dreptele care împart un dreptunghi în două părţi de arii egale sunt concurente.

3. Un cerc este împărţit în n părţi egale. Plecând din fiecare punct de diviziune, se numără m puncte consecutive şi se uneşte punctul iniţial cu cel obţinut (punctele unite nu sunt diametral opuse). Să se demonstreze că nu există trei drepte care să fie concurente în interiorul cercului.

4. Alice şi Bob au un săculeţ cu 2003 bile. Alice scoate între una şi trei bile din săculeţ după care Bob are dreptul să scoată şi el între una şi trei bile. Procedeul se repetă până la extragerea tuturor bilelor din săculeţ. Arătaţi că Alice poate proceda în aşa fel încât să extragă ea ultima bilă, indiferent de felul în care acţionează Bob.

Clasa a VIII-a

1. *a*) Demonstraţi că $(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Arătaţi că putem alege semnele astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ să aibă loc egalitatea

$$(n+7)^2 \pm (n+6)^2 \pm (n+5)^2 \pm (n+4)^2 \pm (n+3)^2 \pm (n+2)^2 \pm (n+1)^2 \pm n^2 = 0.$$

c) Fie $A = \{2003, 2004, \ldots, 20042\}$. Arătaţi că există mulţimile B şi C disjuncte astfel încât $B \cup C = A$, suma elementelor lui B este egală cu suma elementelor lui C şi suma pătratelor elementelor lui B este egală cu suma pătratelor elementelor lui C.

2. La o balanţă braţele în care se pun greutăţile şi marfa trebuie să fie în echilibru. Un cumpărator a sesizat faptul că balanţa este defectă, deoarece punând marfa pe un taler şi greutăţile pe celălalt taler şi apoi invers, balanţa nu este în echilibru. Cumpărătorul, care vrea să achiziţioneze 2 kg, a cerut să i se cântărească 1 kg de marfă într-un mod şi 1 kg de marfă în celălalt mod. A ieşit în pierdere sau în câştig?

3. Folosind două butoaie cilindrice, unul de 50 l, altul de 60 l şi având oricât de multă apă la dispoziţie, prin mai multe măsurători să se obţină 55 l de apă.

Cătălin Budeanu

4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu toate muchiile egale.

a) Determinaţi poziţia punctului M pe segmentul $[BB']$ astfel încât $\mathcal{A}_{\triangle AMC'}$ să fie minimă.

b) Dacă M este mijlocul segmentului $[BB']$, să se determine unghiul dintre planele (ABC) şi (AMC').

Notă de cititor

Mulţi dintre învăţătorii ieşeni au fost probabil contrariaţi în primele momente, la fel ca şi mine, când au aflat de organizarea unui concurs de matematică, la clasele I–VIII având pe generic numele **"Florica T. Câmpan"**.

După ce surpriza a trecut, curiozitatea şi-a făcut loc printre gânduri de tot felul şi m-a îndemnat să aflu ce zvâcnire de spirit se ascunde în spatele acestui nume, fără chip încă pentru mine, dar care a determinat o mobilizare considerabilă de forţe.

Aveam să constat în scurt timp că bibliotecile aveau suficiente materiale care să mă ajute să găsesc răspunsuri convingătoare.

Din paginile cărţilor răsfoite sau citite cu aviditate, se contura personalitatea unui om de cultură, profesor de prestigiu şi dătător *"de cărţi atractive şi lămuritoare"* (*D. Brânzei*) ale geometriei, ale şirurilor de numere şi ale pătratelor magice, ale istoriei matematicii.

Nu mi-am propus în această notă o incursiune în bibliografia acestei **Doamne a matematicii**. Au făcut-o alţii cu mai multă râvnă şi pricepere înaintea mea. M-am gândit doar că sfârşitul toamnei poate constitui pentru ieşeni (şi nu numai) un prilej de aducere aminte a faptului că pe 26 noiembrie 1906 la Iaşi, pe tărâmul matematicii o **"aleasă a Domnului"** se ivea să-şi împlinească harul. Căci pentru **profesor doctor-docent Florica T. Câmpan** matematica nu este o simplă ştiinţă. Ea reprezintă, ca şi credinţa, o cale prin care poţi să fii mai aproape de divinitate. Rândurile mele se doresc a fi mai mult un prilej de a scrie despre ceva drag mie: redescoperirea prin lectură a universului matematicii.

Şi poate atunci când iarna îşi va intra în drepturi, veţi găsi o clipă de răgaz să citiţi despre *"Istoria numărului π"*, despre *"Probleme celebre din istoria matematicii"*, să trăiţi *"Aventura geometriilor neuclidiene"*, să aflaţi cine sunt *"Licuricii din adâncuri"* şi să simţiţi că *"Dumnezeu şi matematica"* au aceeaşi esenţă.

Supleţea şi persuasiunea discursului matematic, profunzimea discursului filozofic, savoarea dialogului te fac să uiţi ariditatea "terenului" pe care te afli, îţi aduc matematica măcar mai aproape de suflet, dacă nu de minte.

Chiar dacă, personal, nu am excelat în domeniu şi nici timp s-o fac nu mai am, m-am aflat prin intermediul d-nei **Florica T. Câmpan** într-un dialog cu matematica dincolo de catalog, dincolo de folosirea ei măruntă şi leneşă, la interferenţa dintre real şi divin.

A venit apoi firesc întrebarea: un învăţător aproape neştiut poate aduce ceva nou în lumea matematicii? Răspunsul a venit prompt. Da, poate veni cu puterea lui de pătrundere, cu puţină lumină în mintea copiilor, iar dacă nu are nimic din toate acestea, poate veni cu sufletul... Pentru că ea, MATEMATICA, este pretenţioasă: VREA TOTUL!

Înv. Luminiţa Murariu, Şcoala "Elena Cuza", Iaşi

Concursul "Adolf Haimovici", ediţia a VII-a[1]

pentru liceele economice, industriale şi agricole

Faza judeţeană, 22 februarie 2003

Clasa a IX-a

1. Să se demonstreze că există o singură funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, astfel încât a, Δ, P şi S să fie numere întregi consecutive în această ordine.

2. Să se arate că dacă $a, b, c \in [0, +\infty)$ şi $a + b + c = 1$, atunci

$$abc\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) \leq \frac{8}{729}.$$

3. Să se scrie ecuaţiile laturilor unui triunghi ABC dacă se cunosc $A\,(1, 3)$ şi ecuaţiile a două mediane: $x - 2y + 1 = 0$ şi $y - 1 = 0$.

Clasa a X-a

1. *a*) Se consideră numerele reale strict pozitive a_1, a_2, a_3 cu produsul $p = a_1 a_2 a_3$ diferit de 1. Dacă $m = \log_p a_1$, $n = \log_p a_2$, să se exprime în funcţie de m şi n numărul $\log_p a_3^q$, unde $q \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $m = \log_{70} 2$, $n = \log_{70} 5$, calculaţi $\log_{70} 49$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $3^{|x+1|} - 2\,|3^x - 1| = 3^x + 2$.

2. *a*) Arătaţi că $\dfrac{1}{(a+1)^2} < \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+1} < \dfrac{1}{a^2}$, $a \in (0, \infty)$.

b) Demonstraţi că $\dfrac{1}{101^2} + \dfrac{1}{102^2} + \cdots + \dfrac{1}{2002^2} + \dfrac{1}{2003^2} < 10^{-2}$.

3. Fie O mijlocul laturii BC a triunghiului ABC, M un punct pe perpendiculara în O pe planul (ABC). Fie D proiecţia pe BC a lui A, E proiecţia pe MB a lui A, F proiecţia pe MC a lui A. Arătaţi că dacă $MO = \dfrac{1}{2}BC$, atunci $(ADE) \perp (ADF)$.

Clasa a XI-a

I. 1. Să se rezolve ecuaţia în x: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{C}$. Discuţie.

2. Valorile parametrului real a pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 3 & x+2 & a+3 \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ sunt:

a) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$; *b*) $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$; *c*) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$; *d*) $\emptyset$; *e*) $\mathbb{R}$.

II. 1. Să se studieze convergenţa şirului $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$, $n \geq 1$.

2. Fie $a_n = \dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos nx}{x^2}$.

---

[1] **Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

a) Să se determine $\lim\limits_{x\to 0} a_1$.

b) Să se demonstreze că $a_n = a_{n-1}\cos nx + \dfrac{1-\cos nx}{x^2}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} a_n$.

III. 1. Studiaţi continuitatea funcţiei $f(x) = \begin{cases} (x+e^x)^{1/x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$.

2. Valorile $a, b, c \in \mathbb{R}$ aşa încât $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(ax - \sqrt{cx^2+bx-2}\right) = 1$ sunt:

a) $a = c = 1$, $b = 0$; b) $a = 0$, $b = 1$, $c < 0$; c) $a > 0$, $c < 0$, $b = 0$; d) $\nexists$; e) $a = b = c = 0$.

Clasa a XII-a

I. Fie mulţimea $A = (0,\infty) - \{1\}$, $a \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Definim pe A legea de compoziţie $x * y = x^{\alpha \log_a y}$. Notăm cu $G_{a,\alpha} = (A, *)$. Demonstraţi că $G_{a,\alpha}$ este grup abelian.

II. Arătaţi că dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ şi $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$, atunci $|z| = 1$.

III. 1. Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} \ln\left(x^2+1\right), & x > 0 \\ xe^{2x} + k, & x \leq 0 \end{cases}$ să admită primitive şi să se găsească o primitivă a sa.

2. Determinaţi primitivele funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2 - 2x^2\cos 2\alpha + 1}$, unde α este oarecare din intervalul $(0, \pi/4)$, iar $D \subseteq \mathbb{R}$.

Faza interjudeţeană, Iaşi, 9 - 11 mai, 2003

Clasa a IX-a

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $-7 < \dfrac{x^2+(m+1)x-5}{x^2-x+1} < 3$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a^3-x} = a$.

3. a) Să se demonstreze identitatea $\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \dfrac{1}{8}$.

b) Se dă paralelogramul $ABCD$. Fie $M \in [DC]$ astfel încât $\dfrac{DM}{DC} = k$ şi $N \in [AM]$ astfel încât $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{NA}$. Să se arate că $D - N - B$ coliniare.

Clasa a X-a

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $3a_4^2 + a_6^2 + 6(a_4 + a_6 + 2) = 0$, aflaţi: a) a_1, r; b) a_8, S_8.

2. Fie numerele $a, b, c \in (1, 2]$. Să se demonstreze egalitatea:

$$\log_a(3b-2) + \log_b(3c-2) + \log_c(3a-2) \geq 6.$$

3. a) Dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$, în dezvoltarea $(a+b)^n$ nu există trei termeni consecutivi egali;

b) Să se arate că partea întreagă a numărului $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$ este un număr natural impar, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Clasa a XI-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ distincte şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)}$.

$a)$ Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ are derivată în } x\}$;

$b)$ Să se arate că funcţia f are două puncte de extrem local x_1, x_2, iar dacă $a < b$ atunci $x_1, x_2 \in [a, b)$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p\sqrt{2!} + 3^p\sqrt[3]{3!} + \cdots + n^p\sqrt[n]{n!}}{n^{p+2}}$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & b \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -b & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix}$, $0 \leq a^2 + b^2 < 1$. Să se arate că $A^m \neq O_n$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, dar $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = O_n$.

Clasa a XII-a

1. Fie $G = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ şi operaţia $x * y = x^{\log_a y}$, $\forall x, y \in G$, $a > 0$, $a \neq 1$. Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian şi $(G, *) \cong (\mathbb{R}^*, *)$.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$.

3. Fie $G = \left\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 5b^2 = 1\right\}$.

$a)$ Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian;

$b)$ Să se arate că G are cel puţin 2003 elemente.

Recreaţii ... matematice

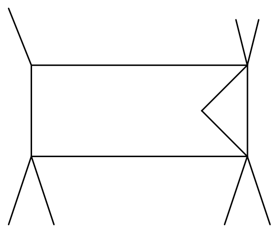
Soluţiile problemelor enunţate la pagina 18.

1. Cei patru oameni procedează astfel:

– a şi b trec podul (2 minute);
– a se întoarce (1 minut);
– c şi d trec podul (10 minute);
– b se întoarce (2 minute);
– a şi b trec podul (2 minute).

În acea noapte, după 17 minute, a, b, c şi d trec astfel podul.

2. Modificarea necesară se vede pe figură.



Concursul "Traian Lalescu", ediţia a IV-a[1]
mai 2003, Iaşi

1. Să se calculeze: $1 - (6 + 12 : 3) : 10$.

2. Suma a două numere este 60. Dacă unul dintre ele este de 3 ori mai mare decât celălalt, să se afle diferenţa lor.

3. Să se afle x din egalitatea: $33 + 3 \cdot [(3 + 99 : x) \cdot 9 - 33] = 96$.

4. Să se afle restul împărţiri numărului $a = 1903 + 1904 + 1905 + \ldots + 2103$ la 2003.

5. Să se calculeze: $(900 - 1 - 2 - \ldots - 40) \cdot 80 - 80 \cdot 80$.

6. Să se determine numerele naturale nenule a, b, c ştiind că: $a \cdot [7 + 4 \cdot (3b + 2c)] = 35$.

7. Să se determine câte numere de trei cifre $\overline{abc}$ au proprietatea: $\overline{abc} = \overline{cba}$.

8. Elevii unei clase, în număr de 30, au participat la un concurs de rezolvat probleme. Ştiind că 25 elevi au rezolvat bine prima problemă, 24 pe a doua, 23 pe a treia şi 22 pe a patra, să se determine numărul minim de elevi care au rezolvat bine toate problemele.

9. Într-o sală de spectacole scaunele sunt aşezate câte 25 pe rând. Dacă Ioana ocupă locul 630 pe rândul din mijloc, ce loc ocupă Cristina, care este pe ultimul rând în dreptul Ioanei?

10. Ana şi Maria au împreună 63 de ani. Ana are în prezent de două ori mai mulţi ani decât a avut Maria atunci când Ana avea cât are Maria acum. Să se determine ce vârstă are acum Ana şi ce vârstă are Maria.

11. Într-o clasă fiecare băiat este prieten cu trei fete şi fiecare fată este prietenă cu doi băieţi. Dacă în clasă sunt 19 bănci (de câte două locuri) şi 31 de elevi sunt pasionaţi de matematică, câţi elevi sunt în clasă?

12. Elevii prezenţi la Concursul de matematică "Traian Lalescu" au fost repartizaţi în mod egal în 18 săli de clasă, astfel încât în fiecare sală numărul elevilor să fie mai mare decât 11 şi mai mic decât 17. Dacă numărul băieţilor este de patru ori mai mic decât numărul fetelor, să se afle numărul concurenţilor.

13. În pătratul alăturat suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană şi de pe fiecare din cele două diagonale este aceeaşi. Să se determine numerele a, b, c, d, e.

a	b	8
5	c	d
22	e	12

14. Fiecare număr înscris într-un pătrat din figura alăturată este egal cu suma numerelor din pătratele pe care se sprijină. Să se determine numerele a, b, c.

	21	
b		a
3	a	8

[1] **Notă.** Fiecare subiect va fi notat cu cinci puncte. Timp de lucru: 2 ore.

Olimpiada de matematică – cl. a V-a şi a VI-a
Etapa judeţeană, 10 mai 2003

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Clasa a V-a

I. 1. Suma a k numere naturale consecutive poate fi o putere a lui 2 ($k > 1$)?

2. Să se găsească restul împărţirii numărului $n = 1000^{1000}$ la 27.

Aurel Benza

II. 1. Determinaţi cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât 9^3 divide $\underbrace{999\ldots9}_{k \text{ cifre}}$.

Petru Asaftei

2. Avem la dispoziţie un număr nelimitat de jetoane pe care sunt scrise numerele naturale 5, 7 sau 11. Spunem că "am obţinut numărul n" dacă putem găsi jetoane cu suma numerelor de pe ele egală cu n. Arătaţi că 13 este cel mai mare număr care nu poate fi obţinut.

Valerica Benţa

III. La un stadion cu capacitatea de 10000 locuri, vin spectatorii. În primul minut vine un spectator, în al doilea minut vin trei spectatori, în al treilea minut vin cinci spectatori şi aşa mai departe. Să se afle după câte minute se umple stadionul.

Clasa a VI-a

I. Arătaţi că dacă $x+y$, $y+z$, $z+x$ sunt direct properţionale cu numerele $a+1$, $a+2$ şi $a+3$, $a \in \mathbb{N}^*$, atunci $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{x} \leq 4\dfrac{2}{3}$.

II. Fie $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}^*$. Demonstraţi că numerele: $a_1b_2c_3$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_1c_2$, $-a_1b_3c_2$, $-a_2b_1c_3$, $-a_3b_2c_1$ nu pot fi simultan pozitive.

III. 1. În triunghiul ABC, bisectoarea unghiului B intersectează înălţimea AM, $M \in (BC)$, în punctul O. Construim $OP \perp AB$, $P \in (AB)$.

a) Dacă P este mijlocul lui $[AB]$, demonstraţi că măsura unghiului $\angle BAM$ este $30°$.

b) Dacă O este centrul de greutate al triunghiului, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Marius Farcaş

2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $[BM] \equiv [AN]$. Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{CPN}$, unde $BN \cap CM = \{P\}$.

ERRATA

1. În finalul soluţiei problemei **XII.26** (RecMat 1/2003, p. 64) au fost omise rândurile: "*... în cazul $A = R$. Dacă $A = Q$, atunci $(M, \cdot) \cong (\mathbb{Q}, +)$, însă grupurile $(\mathbb{Q}, +)$ şi $\left(\mathbb{Q}_+^*, \cdot\right)$ nu sunt izomorfe. În sfârşit $\left(\mathbb{Z}_+^*, \cdot\right)$ nu este grup.*".

2. În enunţul problemei **V.40** (RecMat 1/2003, p. 80) în loc de "$2n+3$ *submulţimi*" se va citi "$4n+3$ *submulţimi*".

Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori
Ediţia a VII-a, Izmir (Turcia), 20 - 25 iunie 2003

A. Problemele de concurs - enunţuri şi soluţii

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Numărul A este format din $2n$ cifre de 4, iar numărul B este format din n cifre de 8. Să se arate că $A+2B+4$ este pătrat perfect.

S. Grkovska, Macedonia

2. Fie n puncte în plan, oricare trei necoliniare, cu propietatea (P): *oricum am numerota aceste puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, linia frântă $A_1A_2\ldots A_n$ nu se autointersectează.* Găsiţi valoarea maximă a lui n.

D. Şerbănescu, România

3. Pe cercul circumscris $\triangle ABC$, arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ se consideră astfel încât $C \notin \overset{\frown}{AB}$, $A \notin \overset{\frown}{BC}$, $B \notin \overset{\frown}{CA}$ şi fie F, D, respectiv E mijloacele acestor arce. Notăm cu G, H punctele de intersecţie ale lui DE cu CB, respectiv CA şi cu I, J punctele de intersecţie ale lui DF cu BC, respectiv BA. Fie M, N mijloacele lui $[GH]$, respectiv $[IJ]$.

a) Găsiţi unghiurile $\triangle DMN$ funcţie de unghiurile $\triangle ABC$.

b) Dacă O este centrul cercului circumscris $\triangle DMN$ şi $\{P\} = AD \cap EF$, arătaţi că O, P, M şi N sunt conciclice.

Ch. Lozanov, Bulgaria

4. Fie $x, y, z \in (-1, \infty)$. Să se arate că $\dfrac{1+x^2}{1+y+z^2} + \dfrac{1+y^2}{1+z+x^2} + \dfrac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2.$

L. Panaitopol, România

1. Soluţia redacţiei. Se constată uşor că

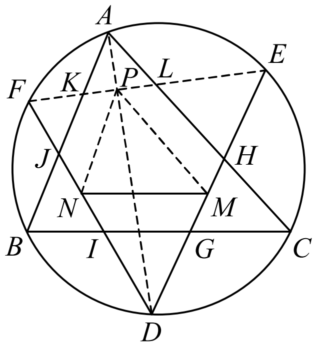
$$A+2B+4 = 4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{2n} + 16\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 4 = 4\cdot\frac{10^{2n}-1}{9} + 16\cdot\frac{10^n-1}{9} + 4 =$$

$$= \frac{4\cdot 10^{2n} + 16\cdot 10^n + 16}{9} = \left(\frac{2\cdot 10^n + 4}{3}\right)^2 = \underbrace{\overline{66\ldots68}}_{n}{}^2.$$

2. Există mulţimi de 4 puncte cu proprietatea (P), de exemplu mulţimea vârfurilor unui patrulater concav. Vom arăta că nu există mulţimi cu $n \geq 5$ puncte satisfăcând (P). Să observăm că dacă printre cele n puncte există patru A, B, C, D astfel ca $ABCD$ să fie patrulater convex, cu renotarea $A_1 = A$, $A_2 = C$, $A_3 = B$, $A_4 = D$ am avea $[A_1A_2] \cap [A_3A_4] \neq \emptyset$, deci (P) nu ar avea loc. Arătăm că pentru $n \geq 5$, putem selecta 4 puncte care să fie vârfurile unui patrulater convex. Luăm arbitrar 5 puncte din mulţime şi considerăm închiderea lor convexă. Dacă aceasta nu este triunghi, problema este rezolvată. Dacă este triunghi, dreapta determinată de cele două puncte din interiorul lui taie exact două laturi ale triunghiului; fie A vârful comun al acestor două laturi. Cele patru puncte rămase determină un patrulater convex, ceea ce încheie soluţia.

3. *a*) Notăm $m(\widehat{A}) = m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{DC}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = m(\overset{\frown}{AE}) = m(\overset{\frown}{EC}) = \beta$, $m(\widehat{C}) = m(\overset{\frown}{AF}) = m(\overset{\frown}{FB}) = \gamma$. Atunci $m(\widehat{D}) = \dfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Analog, $m(\widehat{DEF}) = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$, iar $m(\widehat{DFE}) = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Pe de altă parte, $m(\widehat{EHA}) =$

$= \dfrac{1}{2}\left[m(\overset{\frown}{AE}) + m(\overset{\frown}{CD})\right] = \dfrac{1}{2}\left[m(\overset{\frown}{CE}) + m(\overset{\frown}{BD})\right] =$ $= m(\widehat{CGE})$, deci $\widehat{CHG} \equiv \widehat{CGH}$, adică $\triangle CGH$ este isoscel. Cum CF este bisectoare, ea va fi mediană şi înălţime, prin urmare $M \in CF$ şi $m(\widehat{EMF}) = 90°$. Analog se arată că $m(\widehat{FNE}) = 90°$, deci patrulaterul $EMNF$ este inscriptibil şi atunci $m(\widehat{DMN}) =$ $= m(\widehat{DEF}) = 90° - \dfrac{\beta}{2}$, iar $m(\widehat{DMN}) = m(\widehat{DFE}) =$ $90° - \dfrac{\gamma}{2}$.



b) Fie $\{K\} = AB \cap EF$, $\{L\} = AC \cap EF$; ca la punctul *a)* se arată că $AP \perp KL$, $m(\widehat{FPN}) = m(\widehat{EPM}) = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Însă $m(\widehat{AKP}) = m(\widehat{ALP}) = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, deci $AB \parallel PN$ şi $AC \parallel PM$, de unde $m(\widehat{MPN}) = m(\widehat{BAC}) = \alpha$. Avem că $\triangle DMN$ este ascuţitunghic (i. e. O este punct interior lui), iar $m(\widehat{MDN}) = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ şi atunci $m(\widehat{MON}) = 180° - \alpha$. Urmează că $m(\widehat{MON}) + m(\widehat{MPN}) = 180°$, adică punctele O, P, M, N sunt conciclice.

4. Deoarece $y \le \dfrac{1+y^2}{2}$ (cu egalitate pentru $y = 1$), avem că $\dfrac{1+x^2}{1+y+z^2} \ge$ $\ge \dfrac{2\left(1+x^2\right)}{2\left(1+z^2\right)+\left(1+y^2\right)}$. Scriind analoagele şi adunându-le, cu notaţiile $a = 1 + x^2$, $b = 1 + y^2$, $c = 1 + z^2$, inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{a}{2c+b} + \frac{b}{2a+c} + \frac{c}{2b+a} \ge 1, \quad \forall a, b, c > 0. \qquad (*)$$

Pentru a demonstra $(*)$, folosind Cauchy-Schwarz şi binecunoscuta $a^2 + b^2 + c^2 \ge$ $\ge ab + bc + ac$, avem

$$\frac{a}{2c+b} + \frac{b}{2a+c} + \frac{c}{2b+a} = \frac{a^2}{2ac+ab} + \frac{b^2}{2ab+bc} + \frac{c^2}{2bc+ac} \ge \frac{(a+b+c)^2}{3\,(ab+bc+ac)} \ge 1,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$. Egalitatea în inegalitatea iniţială se atinge pentru $x = y = z = 1$.

Altfel, $(*)$ se poate demonstra renotând numitorii $A = 2c + b$, $B = 2a + c$, $C = 2b + a$; după calcule, se obţine

$$\frac{C}{A} + \frac{A}{B} + \frac{B}{C} + 4\left(\frac{B}{A} + \frac{C}{B} + \frac{A}{C}\right) \ge 15, \quad A, B, C > 0.$$

Este însă clar că $\dfrac{C}{A} + \dfrac{A}{B} + \dfrac{B}{C} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{C}{A} \cdot \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{B}{C}} = 3$ şi analoaga.

B. Probleme aflate în atenţia juriului - enunţuri

1. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, $p = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$, iar $q = \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a}$. Să se arate că $|p - q| < 1$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Să se arate că $ab + bc + ca - 2\,(a + b + c) > -\dfrac{5}{2}$.

3. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$ cu $\dfrac{1}{a+bc} + \dfrac{1}{b+ac} = \dfrac{1}{a+b}$. Arătaţi că $\sqrt{\dfrac{c-3}{c+1}} \in \mathbb{Q}$.

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ lungimile laturilor unui triunghi neisoscel. Demonstraţi că $\left|ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2a - c^2a\right| \geq 2$.

5. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $ab + bc + ca = 3$. Arătaţi că $a + b + c \geq abc + 2$.

6. Demonstraţi că există mulţimi disjuncte $A = \{x, y, z\}$ şi $B = \{m, n, p\}$ de numere naturale mai mari ca 2003 astfel încât $x + y + z = m + n + p$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = m^2 + n^2 + p^2$.

7. Numerele $1, 2, 3, \ldots, 2003$ sunt renotate $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2003}$. Definim $b_1 = a_1$, $b_2 = 2a_2$, $b_3 = 3a_3$, $\ldots$, $b_{2003} = 2003a_{2003}$ şi fie B cel mai mare dintre b_k, $k = \overline{1, 2003}$.

a) Dacă $a_1 = 2003$, $a_2 = 2002$, $\ldots$, $a_{2003} = 1$, găsiţi valoarea lui B.

b) Demonstraţi că $B \geq 1002^2$.

8. Fie $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Fiecare punct al planului este colorat în roşu sau albastru. Arătaţi că există cel puţin un triunghi echilateral de latură $m \in M$ cu vârfurile de aceeaşi culoare.

9. Există un patrulater convex pe care diagonalele să-l împartă în patru triunghiuri cu ariile numere prime distincte?

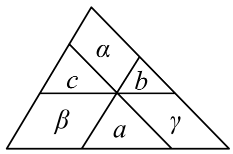
10. Există un triunghi cu aria 12 cm^2 şi perimetrul 12 cm?

11. Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$, iar A' simetricul lui A faţă de C. Să se arate că G, B, C, A' sunt conciclice dacă şi numai dacă $GA \perp GC$.

12. Trei cercuri egale au în comun un punct M şi se intersectează câte două în A, B, C. Demonstraţi că M este ortocentrul $\triangle ABC$[1].

13. Fie $\triangle ABC$ cu $AB = AC$. Un semicerc de diametru $[EF]$, cu $E, F \in [BC]$, este tangent laturilor AB şi AC în M, respectiv N, iar AE retaie semicercul în P. Demonstraţi că dreapta PF trece prin mijlocul coardei $[MN]$.

14. Paralelele la laturile unui triunghi duse printr-un punct interior împart interiorul triunghiului în 6 părţi cu ariile notate ca în figură. Demonstraţi că $\dfrac{a}{\alpha} + \dfrac{b}{\beta} + \dfrac{c}{\gamma} \geq \dfrac{3}{2}$.



Echipa României a fost condusă de prof. **Dan Brânzei**, asistat de prof. **Dinu Şerbănescu**. În clasamentul neoficial pe naţiuni, România a ocupat primul loc cu 205 puncte din 240 posibile, urmată de Bulgaria (182 puncte) şi Turcia (124 puncte); în continuare, s-au situat R. Moldova, Serbia, Macedonia, Grecia şi Ciprul. Componenţii echipei României au obţinut următoarele punctaje şi medalii (cu menţiunea că primii doi sunt singurii elevi care au realizat punctajul maxim!):

Dragoş Michnea (Baia Mare)	– 40 p	– Aur
Adrian Zahariuc (Bacău)	– 40 p	– Aur
Lucian Ţurea (Bucureşti)	– 38 p	– Aur
Cristian Tălău (Craiova)	– 37 p	– Aur
Sebastian Dumitrescu (Bucureşti)	– 29 p	– Argint
Beniamin Bogoşel (Arad)	– 21 p	– Bronz.

[1] Identificată drept problema piesei de 5 lei a lui Ţiţeica.

Un nou concurs internaţional de matematică

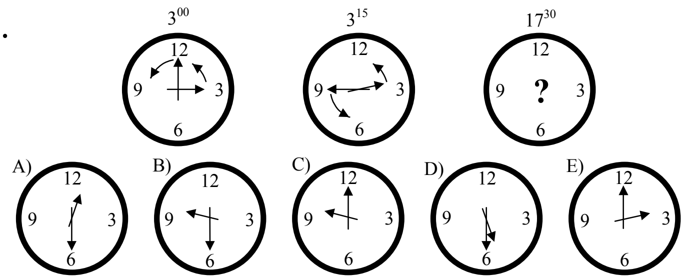
În primăvara anului 2001, România a lansat prin **"Fundaţia pentru Integrare Europeană Sigma"**, un nou concurs internaţional de matematică. Competiţia intitulată **"MCM - Multiple Choice Contest in Mathematics"**, este prevăzută a se desfăşura pe echipe de câte 4-6 elevi ce aparţin la patru categorii de vârstă: 11-12 ani, 13-14 ani, 15-16 ani şi 17-18 ani. În fiecare echipă pot intra cel mult două persoane din aceeaşi grupă de vârstă şi este posibilă colaborarea între membrii ei. Fiecare participant primeşte câte 20 probleme-grilă gradate pe trei nivele de dificultate, timpul de lucru fiind de 90 minute. Oricare dintre probleme are 5 variante de răspuns, una singură fiind corectă. Un răspuns bun aduce 4 puncte, unul incorect scade 2 puncte, în timp ce cazurile netratate aduc diminuări de câte 1 punct. Clasamentul echipei este dat de media aritmetică a punctelor obţinute de componenţii ei.

Jocul-concurs **"MCM"** s-a dorit a fi faza finală internaţională a câştigătorilor naţionali ai jocului-concurs **"Cangurul"**, adus din Australia în Europa prin intermediul asociaţiei pariziene **"Kangourou sans Frontières"** (în România această competiţie s-a introdus începând cu anul 1994). Competiţia a avut loc pe 18 iulie 2001 la Poiana Pinului (Buzău) şi au participat următoarele ţări: *Austria, Belarus, Bulgaria, Franţa, Georgia, Italia, Lituania, R. Moldova, România, Spania, Ucraina* şi *Ungaria.* Pe primele trei locuri s-au situat: 1. *România*, 2. *Franţa*, 3. *Bulgaria.* Echipa României a fost formată din elevii: **Eduard Dogaru** (12 ani), **Roxana Leonte** (12 ani), **Gabriel Kreindler** (14 ani), **Bogdan Bucşă** (16 ani), **Tiberiu Pristavu** (16 ani) şi **Bogdan Stan** (18 ani).

Vom prezenta mai jos 12 probleme, câte 3 pentru fiecare categorie de vârstă.

Grupa 1 (11-12 ani)

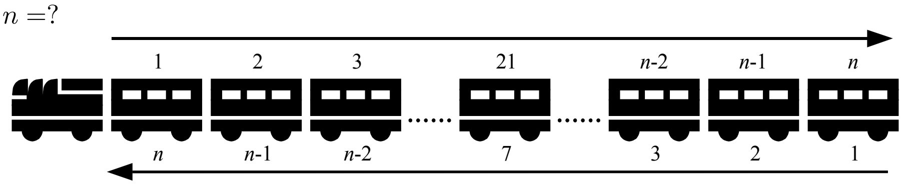
1.



2. $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ $\quad \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = ?$
A) 132 B) 48 C) 72 D) 51 E) 37

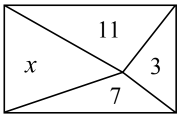
Laurenţiu Modan

3. $n = ?$



A) 28 B) 25 C) 27 D) 29 E) 31

Grupa 2 (13-14 ani)

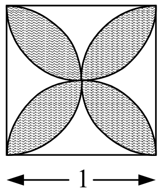
4. 

$x = ?$

A) 15 B) 20 C) 18 D) 16 E) 25

5. $E = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2002}}$

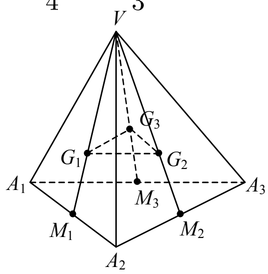
A) $E < 1$ B) $2001 < E < 2002$ C) $43 < E < 44$ D) $33 < E < 34$ E) $E \geq \sqrt{2002}$

6. 

$S = ?$

A) $2 + \dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{\pi}{2} - 1$ C) $\dfrac{\pi}{2} + 1$ D) $3 + \dfrac{\pi}{4}$ E) $\dfrac{\pi}{3} - 1$

Grupa 3 (15-16 ani)



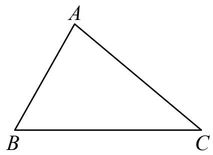
7. $M_1A_1 = M_1A_2$, $M_2A_2 = M_2A_3$, $M_3A_1 = M_3A_3$, $\dfrac{G_1M_1}{G_1V} = \dfrac{G_2M_2}{G_2V} = \dfrac{G_3M_3}{G_3V} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{A_1A_2A_3}} = ?$

A) $\dfrac{1}{9}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{4}{9}$ E) $\dfrac{1}{4}$

8) $\left(a^2-1\right)x^4 + \left(a^2-3\right)x^3 - \left(3a^2+1\right)x^2 + \left(5a^2+3\right)x - 2\left(a^2-1\right) = 0$, $a \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. $a = ?$

A) $a = 0$ B) $a \in \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$ C) $a \in \emptyset$ D) $a = 2$ E) $a = 1/2$

Laurenţiu Modan şi Dinu Teodorescu

9. 

$BC = 2\,AB$, $\widehat{A} = 3\,\widehat{C}$, $\widehat{B} = ?$

A) $\widehat{B} = 60°$ B) $\widehat{B} = 30°$ C) $\widehat{B} = 50°$ D) $\widehat{B} = 90°$ E) $\widehat{B} = 40°$

Grupa 4 (17-18 ani)

10. $(3x+1)^{3n+2} + x + 2 = \left(x^2+3x+3\right)C(x) + R(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \operatorname{grad} R(x) < 2$.

A) $R(x) = x^2 - 1$ B) $R(x) = 2x + 3$ C) $R(x) = 0$ D) $R(x) = 1$ E) $R(x) = 1 - 2x$

Traian Lalescu

11. $C_{2001}^0 + C_{2001}^1 + \ldots + C_{2001}^{2001} = \overline{a_1 \ldots a_n}$, $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$, $i = \overline{1, n}$.

A) $a_n = 2$ B) $a_n = 4$ C) $a_n = 8$ D) $a_n = 1$ E) $a_n = 6$

Laurenţiu Modan

12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ x, & x \in [1, \infty) \end{cases}$, $f(0) = 1$, $s = f(-1) + f(1)$

A) $s < 0$ B) $s = e$ C) $s = 2$ D) $s = e - 2$ E) $s = (e+1)/2$

Laurenţiu Modan şi Dinu Teodorescu

Răspunsuri: **1** A; **2** A; **3** C; **4** A; **5** C; **6** B; **7** A; **8** C; **9** A; **10** C; **11** A; **12** B.

Conf. dr. Laurenţiu Modan
Fac. de Cibernetică şi Informatică Ecoomică
A. S. E., Bucureşti

PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 2002

Clasele primare

P.33. *Care este cel mai mare număr pe care îl spunem atunci când numărăm crescător din doi în doi, din trei în trei sau din cinci în cinci, pornind de la* 1 *şi fără să depăşim* 100*?*

(*Clasa I*) **Raluca Popa, elevă, Iaşi**

Soluţie. Sunt spuse şirurile de numere $(1, 3, 5, \ldots, 97, 99)$, $(1, 4, 7, \ldots, 97, 100)$ şi $(1, 6, 11, \ldots, 91, 96)$. Numărul 100 îndeplineşte cerinţa problemei.

P.34. *Numărul merelor de pe o farfurie este cu* 3 *mai mare decât cel mai mare număr natural scris cu o cifră. Numărul perelor de pe aceeaşi farfurie nu depăşeşte numărul merelor, dar este mai mare decât jumătate din numărul acestora. Câte pere pot fi pe farfurie?*

(*Clasa I*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Numărul merelor este $9 + 3 = 12$. Jumătatea lui 12 este 6. Pe farfurie pot fi: 7, 8, 9, 10, 11 sau 12 pere.

P.35. *Care dintre numerele* 3132*,* 8182*,* 3435*,* 3932*,* 2021*,* 5960 *este intrusul?*

(*Clasa a II-a*) **Matei Luca, elev, Iaşi**

Soluţie. Toate numerele, cu excepţia lui 3932, sunt formate cu cifrele a două numere consecutive. Intrusul este 3932.

P.36. *Cum putem realiza egalităţile*

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 = 28 \quad \text{şi} \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 = 28$$

înserând între cifrele 4 *de mai sus semnele grafice* $+$, $-$, $\times$, $:$, $(\ )$*?*

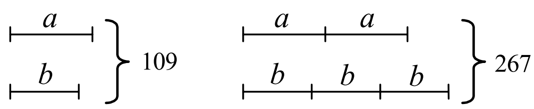
(*Clasa a II-a*) **Alexandru-Gabriel Tudorache, elev, Iaşi**

Soluţie. Pentru prima egalitate avem $(4 + 4) \times 4 - 4 = 28$. Pentru a doua egalitate avem $(4 + 4) \times 4 - 4 : (4 : 4) = 28$ sau $(4 + 4) \times 4 - 4 + 4 - 4 = 28$.

P.37. *Suma a două numere naturale este* 109*. Dacă îl dublăm pe primul şi îl triplăm pe al doilea, suma devine* 267*. Care sunt numerele?*

(*Clasa a II-a*) **Înv. Galia Paraschiva, Iaşi**

Soluţie.



Dublul sumei numerelor a şi b este $109 \times 2 = 218$. Al doilea număr este $267 - 218 = 49$ iar primul număr este $109 - 49 = 60$.

P.38. *Câte înmulţiri de tipul* $\overline{abc} \times 9 = \overline{8d1e}$ *sunt posibile?*

(*Clasa a III-a*) **Sergiu Diaconu, elev, Iaşi**

Soluţie. Avem $\overline{abc} = \overline{8d1e} : 9 = \left(8010 + \overline{d0e}\right) : 9 = 890 + \overline{d0e} : 9$. Distingem cazurile: $d = 1$, $e = 8$; $d = 2$, $e = 7$; $\ldots$; $d = 8$, $e = 1$; $d = 9$, $e = 0, 9$; în total, 10 cazuri. Adăugând şi cazul $d = 0$, $e = 0, 9$, obţinem 12 înmulţiri posibile.

P.39. *Scrieţi cel mai mic număr natural de şase cifre care îndeplineşte, în acelaşi timp, condiţiile: a) nu are cifre care se repetă; b) suma cifrelor sale este* 30*; c) este* *mai mare decât* 900000*.*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Cel mai mare număr natural scris cu şase cifre distincte este 987654 care are suma cifrelor 39. Numărul căutat este 987510.

P.40. *Emilia are de rezolvat un număr de probleme. A hotărât să rezolve câte* 4 *probleme pe zi. Ea lucrează însă mai mult cu* 2 *probleme pe zi şi termină de rezolvat cu* 5 *zile mai devreme. Câte probleme a avut de rezolvat şi în câte zile le-a terminat?*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

Soluţie. Emilia rezolvă câte $4+2=6$ probleme pe zi. În ultimele 5 zile trebuia să rezolve $5\times 4=20$ probleme. Emilia a terminat de rezolvat problemele în $20:2=10$ zile şi a rezolvat $10\times 6=60$ probleme.

P.41. *Ştiind că data de* 1 *Decembrie din anul* 2001 *a fost într-o zi de sâmbătă, să se afle care va fi următorul an în care ziua de* 1 *Decembrie se va sărbători într-o zi de duminică.*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Rodica Rotaru, Bârlad**

Soluţie. De la 1.12.2001 până la 30.11.2002 sunt 365 zile. Deoarece $365 = 7\times 52+1$, ziua de 30.11.2002 este într-o sâmbătă. Ziua de 1.12.2002 se va sărbători într-o zi de duminică.

P.42. *Dănilă Prepeleac i-a propus dracului să se întreacă la trântă, dar pentru a-l pune la încercare i-a spus că are un unchi, moş Ursilă, bătrân de* 999 *ani şi* 52 *săptămâni, şi de-l va putea trânti pe dânsul, se vor întrece apoi amândoi . Dacă* $\frac{1}{4}$ *din vârsta lui moş Ursilă depăşeşte cu* 220 *ani* $\frac{5}{8}$ *din vârsta nepotului, ce vârstă are Dănilă?*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Valerica Beldiman, Iaşi**

Soluţie. Vârsta lui moş Ursilă este 999 ani +52 săptămâni = 1000 ani. O pătrime din vârsta lui moş Ursilă este $1000:4=250$ ani. Cinci optimi din vârsta nepotului reprezintă $250-220=30$ ani. Vârsta nepotului este $30:5\times 8=6\times 8=48$ ani.

P.43. *Primele douăsprezece numere dintr-un şir de numere sunt:* 1*,* 2*,* 0*,* 3*,* 4*,* 1*,* 5*,* 6*,* 2*,* 7*,* 8*,* 0*.*

a) *Scrieţi următoarele* 6 *numere din şir;*

b) *Calculaţi suma primelor* 111 *numere din şir.*

(*Clasa a IV-a*) **Alina Stan, elevă, Iaşi**

Soluţie. *a*) Observăm că: $(1+2):3=1$ (rest 0); $(3+4):3=2$ (rest 1); $(5+6):3=3$ (rest 2). După fiecare grupă de două numere naturale consecutive a fost pus restul împărţirii sumei lor la 3. Următoarele şase numere sunt: $9, 10, 1, 11, 12, 2$.

b) Avem $111:3=37$ grupe de câte trei numere în care intră primele 74 numere naturale cu suma $S_1=(1+74)\times 74:2=2775$. În trei grupe consecutive avem resturile 0, 1, 2 care au suma 3. Cum $37=3\times 12+1$, înseamnă că suma resturilor $S_2=12\times 3=36$. Suma celor 111 numere este $S=S_1+S_2=2775+36=2811$.

Clasa a V-a

V.31. *Să se arate că* $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}>\frac{7}{12}$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Grupând termenii din sumă obţinem

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}=\left(\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{150}\right)+\left(\frac{1}{151}+\ldots+\frac{1}{200}\right)>$$
$$>\frac{50}{150}+\frac{50}{200}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}.$$

V.32. *Determinaţi numerele prime a,b,c pentru care $5a+4b+7c=107$.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Deoarece $5a+7c$ trebuie să fie impar, a şi c au parităţi diferite; fiind prime, unul dintre ele este egal cu 2. Dacă $a=2$, atunci $4b+7c=97$, cu soluţiile $b=19$, $c=3$ şi $b=5$, $c=11$. Dacă $c=2$, atunci $5a+4b=93$, cu soluţiile $a=5$, $b=17$; $a=13$, $b=7$ şi $a=17$, $b=2$.

V.33. *Un număr natural scris în baza* 10 *are suma cifrelor* 603. *Este posibil ca succesorul său să aibă suma cifrelor* 1*? Dar ca acesta să aibă suma cifrelor* 3*?*

Matei Luca, elev, Iaşi

Soluţie. Numărul $\underbrace{99\ldots9}_{67 \text{ cifre}}$ are suma cifrelor 603, iar succesorul său este $\underbrace{10\ldots0}_{68 \text{ cifre}}$, cu suma cifrelor 1. La a doua întrebare, răspunsul este negativ, deoarece nu este posibil ca atât numărul cât şi succesorul său să fie multipli de 3.

V.34. *Aflaţi numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc}=2^n\cdot\overline{ab}+3^n\cdot\overline{bc}+5^n\cdot\overline{ca}$, unde $n\in\mathbb{N}$.*

Nicolae Stănică, Brăila

Soluţie. În mod evident, $a,b,c\geq 1$. Pentru $n=0$, obţinem că $89a=b+10c$, şi cum $b+10c\leq 99$, rezultă că $a=1$. De aici, $b+10c=89$ şi deci $b=9$, $c=8$.

Pentru $n=1$ obţinem că $75a=22b+52c$, de unde $25\mid 25\,(b+2c)+(2c-3b)$, şi deci $25\mid 2c-3b$. Cum $2c-3b<25$ şi $2c-3b\geq -25$, obţinem $2c-3b=0$ sau $2c-3b=-25$. Dacă $2c=3b$, atunci $3\mid c$. Cum $3\mid 75a$ şi $3\mid 52c$, rezultă că $3\mid 22b$, deci $3\mid b$ şi de fapt c este multiplu de 9. Obţinem deci $c=9$, $b=6$, $a=8$. Dacă $2c-3b=-25$, atunci $c=1$, $b=9$ şi atunci $75a=250$, deci a nu este întreg.

Pentru $n=2$ obţinem că $25a=84b+258c$. Cum $25a\leq 225$ şi $84b+258c\geq$ ≥ 342, ecuaţia nu are soluţie în acest caz.

Pentru $n\geq 3$, $2^n\overline{ab}+3^n\overline{bc}+5^n\overline{ca}\geq 11\,(2^n+3^n+5^n)\geq 1760$, deci ecuaţia nu are soluţie. În final, $\overline{abc}\in\{198,869\}$.

V.35. *Se dă numărul $N=\overline{77\ldots7}$ cu* 2002 *cifre. Cercetaţi dacă N se poate scrie ca suma a două sau trei pătrate perfecte impare.*

Tamara Culac, Iaşi

Soluţie. $N=a\cdot100+77$, deci $N=M_4+1$. Dacă $N=x^2+y^2+z^2$, cu $x,y,z\in\mathbb{N}$ impare, atunci $N=(2k+1)^2+(2l+1)^2+(2n+1)^2=M_4+3$, contradicţie. Dacă $N=x^2+y^2$, cu $x,y\in\mathbb{N}$ impare, se obţine în mod analog că $N=M_4+2$, contradicţie.

Clasa a VI-a

VI.31. *Fie $S=\underbrace{\overline{a_1a_1\ldots a_1}}_{k_1 \text{ cifre}}+\underbrace{\overline{a_2a_2\ldots a_2}}_{k_2 \text{ cifre}}+\ldots+\underbrace{\overline{a_na_n\ldots a_n}}_{k_n \text{ cifre}}$, unde $k_1,k_2,\ldots,$ $k_n\geq 2$. Arătaţi că S se divide cu* 4 *dacă şi numai dacă $a_1+a_2+\ldots+a_n$ se divide cu* 4.

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluţie. Deoarece $\underbrace{\overline{a_1a_1\dots a_1}}_{k_1\text{ cifre}} = a_1\cdot\underbrace{\overline{11\dots1}}_{k_1\text{ cifre}} = a_1\left(\overline{11\dots100}+12-1\right) = M_4 - a_1$ şi analoagele, obţinem că $S = M_4 - (a_1+a_2+\dots+a_n)$, de unde concluzia.

VI.32. *Aflaţi* $\overline{ab}$ *ştiind că* $\overline{ab} = (a-b)!\cdot\left(\overline{ba}-3\right)$ (*unde* $0! = 1$, *iar* $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, $\forall n\geq 1$).

Nicolae Stănică, Brăila

Soluţie. Pentru $a-b=0$ sau $a-b=1$ obţinem $\overline{ab}=\overline{ba}-3$, deci $9a=9b-3$, contradicţie. Pentru $a-b=2$ obţinem $\overline{ab}=2\overline{ba}-6$, deci $8a=19b-6$. Cum $a-b=2$, rezultă, că $a=4$, $b=2$. Pentru $a-b=3$, avem $\overline{ab}=6\overline{ba}-18$, adică $55b=30$, absurd. Pentru $a-b\geq 4$ obţinem că $(a-b)!\left(\overline{ba}-3\right)\geq 24\left(\overline{ba}-3\right)\geq 24\,(10b+b+4-3)$, deci $(a-b)!\left(\overline{ba}-3\right)\geq 264b\geq 264$, contradicţie. În final $\overline{ab}=42$.

VI.33. *Într-o urnă sunt bile albe, roşii, negre şi albastre. Numărul bilelor albe este* $\dfrac{3}{5}$ *din numărul celorlaltor bile; bilele roşii reprezintă jumătate din celelalte bile, iar bilele negre a treia parte din numărul celorlaltor bile. Dacă extragem o bilă, calculaţi probabilitatea ca aceasta să fie roşie sau albastră.*

Marcel Rotaru, Bârlad

Soluţie. Notăm numărul total de bile cu n. Cu ajutorul proporţiilor derivate obţinem că numărul bilelor roşii este $\dfrac{n}{3}$, al bilelor albe este $\dfrac{3n}{8}$, iar al bilelor negre este $\dfrac{3n}{4}$. De aici rezultă că numărul bilelor albastre este $\dfrac{n}{24}$. Probabilitatea cerută este atunci $p=\dfrac{n/3+n/24}{n}=\dfrac{3}{8}$.

VI.34. *În* $\triangle ABC$, *fie* M *mijlocul laturii* $[BC]$. *Dacă* $d\,(M,AC)=\dfrac{AB}{2}$, *arătaţi că* $m(\widehat{A})=90^\circ$.

N. N. Hârţan, Iaşi

Soluţie. Fie $MN\perp AC$ şi $BA'\perp AC$, $M,A'\in AC$. Atunci $MN=d\,(M,AC)$ şi MN este linie mijlocie în $\triangle BA'C$, deci $MN=\dfrac{BA'}{2}$. Rezultă de aici că $BA'=BA$ şi deoarece $BA'\perp AC$, rezultă că $m(\widehat{A})=90^\circ$.

VI.35. *În* $\triangle ABC$, $m(\widehat{A})=60^\circ$ *şi* $m(\widehat{C})=45^\circ$. *Bisectoarea* $[AD$ *şi înălţimea* $[BE]$ *se intersectează în* M (*cu* $D\in[BC]$, $E\in[AC]$). *Să se arate că* $\dfrac{AM}{EC}=\dfrac{2}{3}$.

Romeo Cernat, Iaşi

Soluţie. În $\triangle ABC$, $m(\widehat{EBC})=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$, deci $\triangle EBC$ este isoscel cu $EC=BE$. Deoarece $m(\widehat{ABM})=75^\circ-45^\circ=30^\circ=m(\widehat{BAM})$, $\triangle ABM$ este isoscel cu $AM=BM$. În $\triangle AEM$, $m(\widehat{AEM})=90^\circ$ şi $m(\widehat{EAM})=30^\circ$, deci $ME=\dfrac{AM}{2}$. De aici, $\dfrac{AM}{EC}=\dfrac{AM}{EB}=\dfrac{AM}{BM+ME}=\dfrac{AM}{AM+AM/2}=\dfrac{2}{3}$.

Clasa a VII-a

VII.31. *Să se rezolve ecuaţia* $1+a^{2x}+b^{2x}=a^x+b^x+a^xb^x$, *cu* $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a\neq b$.

Dumitru Neagu, Iaşi

Soluţie. Înmulţind egalitatea cu 2 obţinem, după gruparea convenabilă a termenilor, $(a^x-1)^2-(b^x-1)^2+(a^x-b^x)^2=0$, de unde $a^x=b^x=1$, deci $x=0$.

VII.32. *Fie a şi b, c lungimile ipotenuzei şi respectiv catetelor unui triunghi dreptunghic. Să se arate că* $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 10.$

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Deoarece $a^2=b^2+c^2$, obţinem că

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 10\Leftrightarrow 2\left(b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\right)\geq 10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(b^2+c^2\right)^2}{b^2c^2}\geq 4\Leftrightarrow\left(b^2-c^2\right)^2\geq 0,$$

ultima inegalitate fiind evidentă.

VII.33. *Triunghiul ABC are unghiul A obtuz şi semiperimetrul p. Cercurile de diametre $[AB]$ şi $[AC]$ delimitează o suprafaţă comună S. Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiei: "Există $P\in S$ astfel încât $d_1+d_2+d_3=p$", unde d_i sunt distanţele de la P la laturile triunghiului ABC.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Este cunoscut că într-un triunghi dreptunghic mediana ce pleacă din vârful unghiului drept este jumătate din ipotenuză, în timp ce într-un triunghi obtuzunghic mediana ce pleacă din vârful unghiului obtuz este mai mică strict decât jumătate din latura ce se opune unghiului obtuz.

Fie $P\in S$ şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $[BC], [CA], [AB]$. Atunci $d_1+d_2+d_3\leq$ $\leq PA_1+PB_1+PC_1$. Cum $m(\widehat{APB})\geq 90^\circ$, $m(\widehat{APC})\geq 90^\circ$, $m(\widehat{BPC})\geq 90^\circ$, iar cel puţin una din inegalităţi este strictă, prin aplicarea rezultatului menţionat anterior obţinem că $d_1+d_2+d_3<\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, deci $d_1+d_2+d_3<p$ şi propoziţia din enunţ este falsă.

VII.34. *Fie ABC un triunghi, iar I un punct interior lui. Dacă cercurile înscrise în triunghiurile AIB, BIC şi CIA sunt congruente şi tangente două câte două, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie $\mathcal{C}_1(O_1,r)$, $\mathcal{C}_2(O_2,r)$, $\mathcal{C}_3(O_3,r)$ cercurile înscrise în $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, $\triangle AIB$ şi notăm $T_1=\mathcal{C}_2\cap\mathcal{C}_3$, $T_2=\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_3$, $T_3=\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2$; evident, $T_1\in AI$, $T_2\in BI$, $T_3\in CI$. Atunci $O_1O_2=O_1T_3+T_3O_2=2r$ şi analog $O_1O_3=O_2O_3=2r$, deci $\triangle O_1O_2O_3$ este echilateral. În patrulaterul $IT_1O_3T_2$,

$$m(\widehat{T_1IT_2})=360^\circ-90^\circ-90^\circ-60^\circ=120^\circ,$$

adică $m(\widehat{AIB})=120^\circ$ şi analog demonstrăm că $m(\widehat{BIC})=m(\widehat{CIA})=120^\circ$. În $\triangle AIB$,

$$m(\widehat{AIB})=180^\circ-m(\widehat{IAB})-m(\widehat{IBA})=180^\circ-\frac{m(\widehat{A})+m(\widehat{B})}{2}=90^\circ+\frac{m(\widehat{C})}{2},$$

de unde $m(\widehat{C})=60^\circ$ şi analog $m(\widehat{A})=m(\widehat{B})=60^\circ$, de unde obţinem că $\triangle ABC$ este echilateral.

VII.35. *Fie $ABCD$ un paralelogram, O centrul cercului circumscris $\triangle ABD$, iar H ortocentrul $\triangle BCD$. Să se arate că punctele A, O, H sunt coliniare.*

Constantin Cocea şi Dumitru Neagu, Iaşi

Soluţie. Deoarece $BH \perp CD$ şi $AB \parallel CD$, $BH \perp AB$ şi deci $m(\widehat{ABH}) = 90°$; analog obţinem că $m(\widehat{HDA}) = 90°$. De aici rezultă că $ABHD$ este inscriptibil şi cum $m(\widehat{ABH}) = 90°$, $[AH]$ este diametru pentru cercul circumscris triunghiului ABD, deci îl conţine pe O.

Clasa a VIII-a

VIII.31. *Să se determine mulţimea* $A = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \frac{4n-1}{mn+1} \in \mathbb{N}\right\}$.

A. V. Mihai, Bucureşti

Soluţie. Deoarece $\frac{4n-1}{mn+1} \in \mathbb{N}$, rezultă că $4n-1 \geq mn+1$. De aici, $n(4-m)-2>0$ şi deci $m < 4$, adică $m \in \{1,2,3\}$. Pentru $m = 1$ obţinem că $\frac{4n-1}{mn+1} = 4 - \frac{5}{n+1} \in \mathbb{N}$, ceea ce implică $n = 4$. Pentru $m = 2$, avem că $\frac{4n-1}{mn+1} = 2 - \frac{3}{2n+1} \in \mathbb{N}$, deci $n = 1$. Pentru $m = 3$ obţinem că $\frac{4n-1}{mn+1} = 1 + \frac{n-2}{3n+1}$. Cum $3n+1 > n-2$, este necesar ca $n - 2 = 0$, deci $n = 2$. În final, $A = \{(1,4),(2,1),(3,2)\}$.

VIII.32. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{2002}{x^2-x+2002} = 2002.$$

Mihaela Predescu, Piteşti

Soluţie.

$$\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{2002}{x^2-x+2002} = 2002 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2-x+1} - 1\right) + \left(\frac{2}{x^2-x+2} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{2002}{x^2-x+2002} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x - x^2\right)\left(\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{1}{x^2-x+2002}\right) = 0.$$

Cum $x^2-x+1, x^2-x+2, \ldots, x^2-x+2002 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $x \in \{0,1\}$.

VIII.33. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pentru care*

$$1 + f(x+y) \leq f(x) + f(y) \leq x + y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Pentru $x = y = 0$ obţinem $1 + f(0) \leq 2f(0) \leq 2$, de unde $f(0) = 1$. Fiindcă $f(x) + f(y) \leq x + y + 2$, pentru $y = 0$ găsim că $f(x) \leq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f(x) + f(y) \geq 1 + f(x+y)$, pentru $y = -x$ obţinem că $f(x) \geq 2 - f(-x)$. Dar $f(-x) \leq -x + 1$, de unde $f(x) \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce implică $f(x) = 1 + x$.

VIII.34. *Fie AB dreapta soluţiilor ecuaţiei $x - y = 5$ şi CD dreapta soluţiilor ecuaţiei $x + y = 3$, cu $A, C \in Ox$, $B, D \in Oy$. a) Arătaţi că $AB \perp CD$; b) Calculaţi aria şi perimetrul triunghiului BCD; c) Arătaţi că $AD \perp BC$.*

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (Suceava)

Soluţie. *a*) Printr-un calcul imediat se deduce că $A(5,0)$, $B(0,-5)$, $C(3,0)$, $D(0,3)$. Fie $AB \cap CD = \{E\}$ şi $EF \perp BD$, $F \in Oy$. Atunci $E(4,-1)$, $F(0,-1)$.

Deoarece $EF = BF = FD = 4$ şi $EF \perp BD$, $\triangle BEF$ şi $\triangle FED$ sunt dreptunghice isoscele şi $m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{FED}) = 45°$, de unde $m(\widehat{BED}) = 90°$ şi deci $AB \perp CD$.

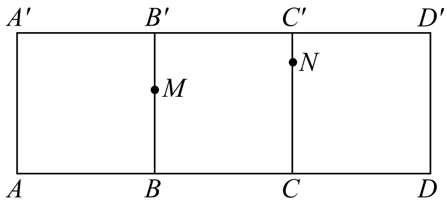
b) $S_{BCD} = 12$, $P_{BCD} = \sqrt{34} + 3\sqrt{2} + 8$.

c) Deoarece AO şi DE sunt înălţimi în $\triangle BAD$ şi $AO \cap DE = \{C\}$, C este ortocentrul $\triangle BAD$ şi deci BC este de asemenea înălţime în $\triangle BAD$.

VIII.35. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a. Determinaţi poziţiile punctelor $M \in (BB')$ şi $N \in (CC')$ pentru care perimetrul patrulaterului strâmb $AMND'$ este minim; aflaţi această valoare minimă.*

Mihaela Bucătaru, Iaşi

Soluţie. $P_{AMND'} = AM + MN + ND' + AD'$ este minim $\Leftrightarrow AM + MN + ND'$ este minimă. Desfăşurând suprafaţa laterală a cubului ca în figură, $S = AM + MN + ND'$ este minimă $\Leftrightarrow A, M, N, D'$ sunt coliniare. Atunci $S_{\min} = AD' = a\sqrt{10}$, iar valoarea minimă a $P_{AMND'}$ este $AD' + S_{\min} = a\sqrt{2} + a\sqrt{10}$.



Clasa a IX-a

IX.31. *Fie mulţimile $A = \{x^2 + x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x^3 + x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x^4 + x^3 + x^2 + x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{2x^4 \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$. Determinaţi $A \cap C$, $B \cap D$, $A \cap D$, $A \cap B$.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Fie $u = n^2 + n = m^4 + m^3 + m^2 + m \in A \cap C$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci $(2n+1)^2 = 4m^4 + 4m^3 + 4n^2 + 4m + 1$, şi grupând în două moduri termenii din membrul drept obţinem

$$(2n+1)^2 = \left(2m^2 + m\right)^2 + \left(3m^2 + 4m + 1\right), \tag{1}$$

respectiv

$$(2n+1)^2 = \left(2m^2 + m + 1\right)^2 + 2m - m^2. \tag{2}$$

Folosind semnul funcţiei de gradul al doilea, obţinem

$$(1) \Rightarrow (2n+1)^2 > \left(2m^2 + m\right)^2 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\},$$

$$(2) \Rightarrow (2n+1)^2 < \left(2m^2 + m + 1\right)^2 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}.$$

Urmează că dacă $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}$, atunci $(2n+1)^2$ se află între pătratele a două numere întregi consecutive, ceea ce este imposibil.

Pentru $m = -1$, obţinem $n = 0$ sau $n = -1$ şi $u = 0$. Pentru $m = 0$ obţinem din nou $n = 0$ sau $n = -1$ şi $u = 0$. Pentru $m = 1$ nu există n cu proprietatea căutată, iar pentru $m = 2$ obţinem $n = 5$ sau $n = -6$ şi $u = 30$. În concluzie, $A \cap C = \{0, 30\}$.

Fie acum $u = n^3 + n = 2m^4 \in B \cap D$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci $(n+1)^4 - (n-1)^4 = (2m)^4$, ecuaţie care nu are soluţii nebanale, conform teoremei lui Fermat. Atunci $n - 1 = 0$, deci $m = 1$ sau $m = -1$, de unde $u = 2$, sau $2m = 0$, deci $n = 0$, de unde $u = 0$. În concluzie, $B \cap D = \{0, 2\}$.

Analog se tratează $A \cap D$ şi $A \cap B$.

IX.32. *Fie $f_i, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, funcţii care păstrează semnul variabilei. Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x_1 + f_1(x_1) + g_1(x_1) = x_2 \\ x_2 + f_2(x_2) + g_2(x_1 + x_2) = x_3 \\ \ldots \\ x_n + f_n(x_n) + g_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x_1. \end{cases}$$

Obţineţi sisteme diverse prin particularizarea funcţiilor!

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Pentru $x_1 > 0$, deducem din prima ecuaţie că $x_2 > x_1 > 0$. În mod asemănător, $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_1$, contradicţie. Pentru $x_1 < 0$, obţinem analog că $0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_1$. De aici, $x_1 = 0$ şi analog $x_2 = \ldots = x_n = 0$. Exemple de funcţii care păstrează semnul variabilei: $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ etc.

IX.33. *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}$ *ecuaţia* $n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] = 11 \cdot \left[\frac{n}{36}\right]$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] - 11\left[\frac{n}{36}\right]$. Avem că $f(n+36) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci f periodică de perioadă 36. De asemenea, $f(0) = 0$, iar pentru $n = 1, 2, \ldots, 35$, $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{3} = \frac{5n}{6} < n$, iar $\left[\frac{n}{36}\right] = 0$, deci $1, 2, \ldots, 35$ nu sunt soluţii ale ecuaţiei. În concluzie, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S = \{36k;\ k \in \mathbb{N}\}$.

IX.34. *Fie* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. *Să se determine* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *ştiind că*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{n+1}{2} = 2\left(x_1 \sin\frac{\pi}{n+1} + x_2 \sin\frac{2\pi}{n+1} + \ldots + x_n \sin\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Vladimir Martinuşi, Iaşi

Soluţie. Egalitatea din enunţ revine la

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1} - \frac{n+1}{2}.$$

Ţinând seama de formulele $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$, obţinem că $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right)^2 = 0$, de unde $x_k = \sin\frac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{1,n}$.

IX.35. *Arătaţi că* $\sin(\cos x) + \sin(\cos y) < 2\cos\frac{x+y}{2}$, $\forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Ţinând seama că $\sin x < x$ şi $0 < \cos x < 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obţinem

$$\sin(\cos x) + \sin(\cos y) < \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \leq 2\cos\frac{x+y}{2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a X-a

X.31. *Considerăm şirurile* $(F_n)_{n\geq 0}$, $(L_n)_{n\geq 0}$ *definite prin* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 0$, *respectiv* $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n \geq 0$. *Să se arate că* $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} L_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} F_{k-1}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} F_{k+1}^2}$.

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Se arată (prin inducţie) că $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Conform inegalităţii lui Minkowski, urmează concluzia.

X.32. *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi pozitive. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se notează cu P_n graficul funcţiei $f_n(x) = a_n x^2 + a_{n+1}x + a_{n+2}$. Determinaţi legea de definire a şirului ştiind că parabolele P_n au vârfurile pe axa Ox.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Condiţia ca parabolele să fie cu vârfurile pe Ox revine la $\Delta_n = a_{n+1}^2 - 4a_n a_{n+2} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prin logaritmare, obţinem $2\ln a_{n+1} = \ln a_n + \ln a_{n+2} + \ln 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$, sau $t_{n+1} = t_n - \ln 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $t_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$. Aşadar, t_n este o progresie aritmetică cu raţia $r = -\ln 4$, şi deci $t_n = t_0 + nr$, ceea ce implică $a_{n+1} = e^{t_0+nr}a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $a_n = e^{n\ln\frac{a_1}{a_0} - n(n-1)\ln 2}a_0$, de unde $a_n = \dfrac{a_0}{2^{n(n-1)}}\left(\dfrac{a_1}{a_0}\right)^n$.

X.33. *Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = a^x$, $g(x) = b^x$, unde $a \in (1,\infty)$, $b \in (0,1)$, $ab \neq 1$. Să se arate că există o infinitate de paralelograme cu vârfurile pe reuniunea graficelor celor două funcţii.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Fie $x_1 > 0$ şi $B(x_1, g(x_1))$. Deoarece $f((-\infty,0)) = (0,1)$, $\exists x_2 < 0$ astfel încât $f(x_2) = g(x_1)$ şi atunci şi $f(-x_2) = g(-x_1)$. Construim $A(x_2, f(x_2))$, $A'(-x_2, f(-x_2))$, $B'(-x_1, g(-x_1))$. Deoarece $ab \neq 1$ rezultă că $x_2 \neq -x_1$ şi $ABA'B'$ este nedegenerat. Segmentele AA' şi BB' au mijloacele $M\left(0, \dfrac{f(x_2)+f(-x_2)}{2}\right)$, respectiv $N\left(0, \dfrac{g(x_1)+g(-x_1)}{2}\right)$, deci $M \equiv N$ şi $ABA'B'$ este paralelogram. Cum x_1 a fost arbitrar, problema este rezolvată.

X.34. *Să se arate că ecuaţiile $4\cdot 9^x + (4x-45)\cdot 3^x + 11 - x = 0$ şi $4\cdot 18^x - 3\cdot 6^x - 128\cdot 3^x + 2^x + 32 = 0$ sunt echivalente.*

Marcel Chiriţă, Bucureşti

Soluţie. Din prima ecuaţie obţinem că $\left(3^x - \dfrac{1}{4}\right)(3^x - 11 + x) = 0$, deci $3^x = \dfrac{1}{4}$, cu soluţia $x_1 = -2\log_3 2$, sau $3^x = 11 - x$, cu soluţia $x_2 = 2$, unică deoarece $f_1 : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f_1(x) = 3^x$ este strict crescătoare, iar $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 11 - x$ este strict descrescătoare. Din cea de-a doua ecuaţie obţinem că $(4\cdot 3^x - 1)(6^x - 2^x - 32) = 0$, deci $3^x = \dfrac{1}{4}$, cu soluţia $x_3 = -2\log_3 2$ sau $6^x = 2^x + 32$, echivalentă cu $3^x = 1 + \dfrac{32}{2^x}$. Cum $f_3 : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f_3(x) = 3^x$ este strict crescătoare iar $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = 1 + \dfrac{32}{2^x}$ este strict descrescătoare, ecuaţia $f_3(x) = f_4(x)$ are o singură soluţie, anume $x_4 = 2$.

X.35. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$ de module egale astfel încât $\dfrac{z_k}{z_t} \in \mathbb{C}\setminus\{\pm 1, \pm i\}$ $\forall\, 1 \leq k \neq t \leq n$. Notăm $a_j = \dfrac{1}{z_j}\prod\limits_{k\neq j} z_k + z_j^2$, $\forall j = \overline{1,n}$. Arătaţi că dacă două dintre numerele a_j sunt reale, atunci toate sunt reale. În plus, dacă $n \neq 4$, atunci $\prod\limits_{k=1}^{n} z_k = 1$ (în legătură cu problema X.86 din R.M.T. nr. 3-4/2000).*

Daniel Jinga, Piteşti

Soluţie. Fie $P=\prod\limits_{k=1}^{n} z_k$ şi $r=|z_k|$, $k=\overline{1,n}$. Atunci $a_j=z_j^2+\dfrac{P}{z_j^2}$, $\forall j=\overline{1,n}$. Fie $p,q\in\overline{1,n}$ astfel încât a_p, $a_q\in\mathbb{R}$ şi notăm $b_p=\dfrac{P}{z_p^2}-\overline{z_p}^2$, $b_q=\dfrac{P^2}{z_q^2}-\overline{z}_q^2$. Atunci $a_p=z_p^2+\overline{z_p}^2+b_p$ şi cum $z_p^2+\overline{z_p}^2\in\mathbb{R}$, avem că $b_p\in\mathbb{R}$. Analog obţinem că $b_q\in\mathbb{R}$. Din definiţiile lui b_p şi b_q obţinem că

$$b_p z_p^2=b_q z_q^2=P-r^4, \tag{1}$$

de unde, prin trecere la module, deducem că $|b_p|=|b_q|$.

Dacă $b_p\neq 0$, atunci $b_p=\pm b_q$ şi conform (1) obţinem că $z_p^2=\pm z_q^2$, de unde $\left(\dfrac{z_p}{z_q}\right)^4=1$. De aici, $\dfrac{z_p}{z_q}\in\{\pm 1,\pm i\}$, contradicţie. Atunci $b_p=0$ şi din (1) deducem că $P=r^4$, de unde $\forall j=\overline{1,n}$, $a_j=z_j^2+\dfrac{|z_j|^4}{z_j^2}=z_j^2+\overline{z_j}^2\in\mathbb{R}$. Fie acum $n\neq 4$. Deoarece $P=r^4$, prin trecere la module obţinem că $r^n=r^4$, deci $r=1$ şi atunci $P=1$.

Clasa a XI-a

XI.31. *Fie $A,B\in M_n(\mathbb{Q})$. Dacă $\det A\neq\det B$, demonstraţi că $\det(A+\pi B)\neq$ $\neq\det(B+\pi A)$.*

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $P(\lambda)=\det(A+\lambda B)-\det(B+\lambda A)$. Evident, $P\in\mathbb{Q}[\lambda]$. Presupunem prin reducere la absurd că $\det(A+\pi B)=\det(B+\pi A)$. Atunci $P(\pi)=0$ şi cum π nu este algebric, $P\equiv 0$. De aici, $\det(A+\lambda B)=\det(B+\lambda A)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. Pentru $\lambda=0$ obţinem $\det A=\det B$, contradicţie.

XI.32. *Fie $s_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2+k+1\right)\sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p(k-p)^k\right]$. Calculaţi*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{1+s_n}-\sqrt[n]{1+s_{n-1}}\right).$$

Ştefan Alexe, Piteşti

Soluţie. Suma $\alpha_k=\sum\limits_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p(k-p)^k$ reprezintă numărul funcţiilor surjective $f:A\to A$, unde A are k elemente. Cum orice asemenea funcţie este şi injectivă rezultă că $\alpha_k=k!$ şi deci

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k+1\right)k!=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2-k\right]k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!\ .$$

De aici, $s_n=(n+1)(n+1)!-1$. Notăm $u_n=\sqrt[n+1]{1+s_n}-\sqrt[n]{1+s_{n-1}}$. Atunci

$$u_n=\sqrt[n+1]{(n+1)(n+1)!}-\sqrt[n]{n\cdot n!}=$$

$$=\sqrt[n+1]{n+1}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)+\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left((n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}\right)-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\sqrt[n+1]{n+1}\ .$$

Este cunoscut că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\dfrac{1}{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. De asemenea se poate demonstra uşor că $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}\right]=1$ (de exemplu, aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$

pe intervalul $[n, n+1]$ şi estimând cantităţile obţinute). De aici, limita din enunţ este egală cu $\dfrac{1}{e}$.

XI.33. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive cu proprietatea că există $p \in N^*$ şi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$ cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_p > 1$ astfel încât $x_n = a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+2} + \ldots + a_p x_{n+p}$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = 0$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Deoarece $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există $m = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $m \geq 0$. Din ipoteză şi din faptul că $x_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem că $x_n \geq a_1 m + a_2 m + \ldots + a_p m = am$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde am notat $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_p > 1$. În continuare, $x_n \geq a_1 am + a_2 am + \ldots + a_p am = a^2 m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi prin inducţie urmează imediat că $x_n \geq a^k m$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$. Dacă am presupune prin absurd că $m > 0$, am obţine că $x_n \geq \lim\limits_{k\to\infty} ma^k = +\infty$, contradicţie. Rămâne că $m = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

XI.34. *Fie $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ şi b un număr între $-\sqrt{2}\ln a$ şi $\sqrt{2}\ln a$. Stabiliţi semnul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right) - bx$.*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Arătăm mai întâi că

$$\frac{a^x + a^{-x}}{2} \geq \frac{x^2 (\ln a)^2}{2} + 1. \tag{1}$$

Deoarece $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ şi $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \dfrac{x^2 (\ln a)^2}{2} + 1$ sunt funcţii pare, este suficient să demonstrăm (1) doar pentru $x \in [0, \infty)$. Atunci

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^{x/2} - a^{-x/2}\right)^2 \geq (x \ln a)^2, \ \forall x \geq 0 \Leftrightarrow a^{x/2} - a^{-x/2} \geq x \ln a, \ \forall x \geq 0.$$

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^{x/2} - a^{-x/2} - x \ln a$. Atunci $g'(x) = a^{x/2}\dfrac{\ln a}{2} + a^{-x/2}\dfrac{\ln a}{2} - \ln a \geq 0$, $\forall x \geq 0$, deci g este crescătoare şi $g(x) \geq g(0) = 0$, $\forall x \geq 0$.

De asemenea, $\dfrac{x^2 (\ln a)^2}{2} + 1 - bx = \dfrac{x^2}{4}\left[2(\ln a)^2 - b^2\right] + \left(\dfrac{b}{2}x - 1\right)^2$, deci

$$\frac{x^2 (\ln a)^2}{2} + 1 - bx > 0, \quad \forall x \geq 0. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem că $\dfrac{a^x + a^{-x}}{2} > bx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict pozitivă.

XI.35. *Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar $(a_k)_{k=1}^n$, $(b_k)_{k=1}^n$ progresii geometrice astfel încât $a_k < b_k$, $\forall k = \overline{1,n}$. Dacă $f(a_1 a_2 \cdots a_n) < 1$ şi $f(b_1 b_2 \cdots b_n) > 1$, arătaţi că există $(c_k)_{k=1}^n$ progresie geometrică, $c_k \in (a_k, b_k)$ astfel încât $f(c_1 c_2 \cdots c_n) = 1$.*

Doru - Dumitru Buzac, Iaşi

Soluţie. Notăm $p_a = a_1 a_2 \ldots a_n$, $p_b = b_1 b_2 \ldots b_n$. Considerăm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f\left(p_a^t p_b^{1-t}\right)$; observăm că $g(0) = f(p_b) > 1$, iar $g(1) = f(p_a) < 1$. Deoarece g este continuă, $\exists t_0 \in (0,1)$ astfel că $g(t_0) = 1$.

Fie $(c_k)_{k=1}^n$ definit prin $c_k = a_k^{t_0} b_k^{1-t_0}$. Se observă că $(c_k)_{k=1}^n$ este de asemenea progresie geometrică şi $a_k < c_k < b_k$, $\forall k = \overline{1,n}$. În plus, deoarece $g(t_0) = 1$, rezultă că $f(c_1 c_2 \ldots c_n) = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a XII-a

XII.31. *Fie* $M = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^2 = I_2\right\}$. *Determinaţi toate subgrupurile lui* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \cdot)$ *conţinute în* M.

Angela Ţigăeru şi Cătălin Ţigăeru, Suceava

Soluţie. Prin calcul direct observăm că $M = M_1 \cup M_2$, cu $M_1 = \{I_2, -I_2\}$ şi $M_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a^2 + bc = 1,\ a, b, c \in \mathbb{C}\right\}$. În plus, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Demonstrăm acum următorul rezultat auxiliar:

Lemă. *a*) Dacă $A_1, A_2 \in M$ astfel încât $A_1A_2 \in M$, atunci $A_1A_2 = A_2A_1$.

b) Dacă $A_1, A_2 \in M_2$ astfel încât $A_1A_2 \in M$, atunci $A_1 = A_2$ sau $A_1 = -A_2$.

Demonstraţie. *a*) Fie $A_1, A_2 \in M$ astfel ca $A_1A_2 \in M$. Atunci $A_1^2 = A_2^2 = I_2$ şi de asemenea $A_1A_2A_1A_2 = I_2$. Înmulţind ultima relaţie la stânga cu A_1 şi la dreapta cu A_2 obţinem egalitatea cerută.

b) Fie $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} \in M_2$. Deoarece $A_1A_2 \in M$, din $A_1A_2 = A_2A_1$, obţinem că $b_1c_2 = b_2c_1$, $a_1b_2 = a_2b_1$, $a_1c_2 = a_2c_1$, de unde $A_1A_2 = (a_1a_2 + b_1c_2) I_2$. Cum $A_1A_2 \in M$ şi $(a_1a_2 + b_1c_2) I_2 \notin M_2$, obţinem că $A_1A_2 \in M_1$, deci $A_1A_2 = \pm I_2$, de unde *b*).

Singurele subgrupuri H conţinute în M_1 sunt $H_1 = I_2$, $H_2 = \{I_2, -I_2\}$. Fie acum H un subgrup al lui M, $H \cap M_2 \neq \emptyset$. Există atunci $A_1 \in H \cap M_2$; pentru o altă matrice $A_2 \subset H \cap M_2$ obţinem că $A_1A_2 \in H \subset M$ deci, conform *b*), $A_1 = A_2$ sau $A_1 = -A_2$. Obţinem de aici că, alături de H_1 şi H_2, singurele subgrupuri ale lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ conţinute în M sunt cele de tipurile $H_3 = \{I_2, A\}$ şi $H_4 = \{I_2, -I_2, A, -A\}$, cu $A \in M_2$.

XII.32. *Fie* $(G, \cdot)$ *grup, iar* $a \in G \backslash \{e\}$ *fixat. Arătaţi că numărul morfismelor surjective de la* G *la* $(\mathbb{Z}_3, +)$ *cu proprietatea că* $f(x) = \widehat{2} \Leftrightarrow x = a$ *este egal cu numărul subgrupurilor* H *ale lui* G *care nu-l conţin pe* a *şi care au proprietatea că* $x^3 \in H$, $\forall x \in G$.

Dana Stan, elevă, Iaşi

Soluţie. A se vedea **Nota** de la p. 17 din acest număr al revistei.

XII.33. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie monotonă al cărei grafic are un centru de simetrie ce nu aparţine graficului. Arătaţi că* f *nu admite primitive.*

Oana Marangoci, elevă, Paşcani

Soluţie. Deoarece $A(x_0, y_0)$ este centrul de simetrie al graficului lui f, are loc egalitatea $f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Presupunem prin reducere la absurd că f este continuă în x_0. Trecând la limită în egalitatea de mai sus obţinem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(2x_0 - x) = \lim\limits_{x \to x_0} (2y_0 - f(x))$, deci $f(x_0) = y_0$, contradicţie. De aici, f nu este continuă în x_0 şi, deoarece f este monotonă, x_0 este punct de discontinuitate de speţa întâi. De aici rezultă că f nu admite primitive.

XII.34. *Fie* $f : [0, 1] \to (0, \infty)$ *o funcţie care admite primitive şi fie* F *o primitivă a sa cu* $F(1) = 0$. *Arătaţi că există* $c \in (0, 1)$ *astfel încât* $F(c) > -\frac{c}{2} e^{c^2} f(c)$.

Rodica Luca Tudorache, Iaşi

Soluţie. Fie $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \left(1 - e^{-x^2}\right) F(x)$. Se observă că G este continuă pe $[0, 1]$, derivabilă pe $(0, 1)$, iar $G(0) = G(1) = 0$. Conform teoremei lui

Rolle, există $c \in (0,1)$ astfel încât $G'(c) = 0$, ceea ce înseamnă că $-2ce^{-c^2}F(c) + \left(e^{-c^2} - 1\right) f(c) = 0$. Deoarece $e^{-x^2} - 1 > -x^2$, $\forall x \in (0,1)$, obţinem imediat inegalitatea din enunţ.

XII.35. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde f este o funcţie injectivă şi $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} \times [f(x)]^{2k+1} + \sin f(x)$, cu $a_1 \in [1, \infty)$ şi $a_{2k+1} \in (0, \infty)$, $\forall k = \overline{1,n}$. Arătaţi că f admite primitive dacă şi numai dacă g admite primitive.*

Lucian Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2n+1}x^{2n+1} + \sin x$. Atunci $h'(x) = a_1 + 3a_2x^2 + \ldots + (2n+1)\, a_{2n+1}x^{2n} + \cos x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, prin urmare h este strict crescătoare şi deci injectivă. Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} = +\infty$ şi h este continuă, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, deci h este surjectivă şi în final bijectivă.

Atunci $g = h \circ f$, deci g este injectivă. Cum o funcţie injectivă admite primitive dacă şi numai dacă este continuă, cu această observaţie cerinţa problemei se rescrie sub forma "f este continuă $\Leftrightarrow$ g este continuă". Dar acest lucru este imediat, ţinând seama că $h = g \circ f$, cu h continuă şi bijectivă.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **popagabriel@go.com**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 2 / 2002

A. Nivel gimnazial

G21. *Să se afle restul împărţirii prin* 43 *a numărului* 6^{2002^n}, $n \in \mathbb{N}$.

Cătălin - Cristian Budeanu, Iaşi

Soluţie. Avem că $2002^n = (2001+1)^n = 3k+1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $6^{2002^n} = 6 \cdot 6^{3k} = 6 \cdot (5 \cdot 43 + 1)^k$, de unde restul împărţirii lui 6^{2002^n} la 43 este 6.

G22. *Să se arate că între* n *şi* $n!$ *există cel puţin un număr prim, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

***

Soluţie. Fie p un divizor prim al numărului $n! - 1$ (care evident există, eventual fiind $n! - 1$). Dacă $p \leq n$, atunci $p \mid n!$, şi cum $p \mid n! - 1$ rezultă că $p \mid 1$, absurd. În concluzie $p > n$.

G23. *Să se rezolve în* $\mathbb{Z}^2$ *ecuaţia* $x^2 + 10x + y! = 2002$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţia I (a autorului). Evident, trebuie impusă condiţia $y \geq 0$. Deoarece $x(x+1)$ nu poate fi decât de forma $3k$ sau $3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$, de asemenea $x^2 + 10x = x(x+1) + 9x$ este de una din aceste forme. Dacă $y \geq 3$, atunci $3 \mid y!$ şi $x^2 + 10x + y!$ este tot de forma $3k$ sau $3k+2$, dar $2002 = 3 \cdot 667 + 1$, absurd. În concluzie, $y \in \{0, 1, 2\}$. Dacă $y = 0$ sau $y = 1$, obţinem că $x^2 + 10x = 2001$, ecuaţie care nu are soluţii în $\mathbb{Z}$. Dacă $y = 2$, atunci $x^2 + 10x = 2000$, cu soluţiile $x_1 = 40$ şi $x_2 = -50$. În concluzie, $(x, y) \in \{(40, 2), (-50, 2)\}$.

Soluţia a II-a (dată de Alexandru Bejinariu, elev, Iaşi). Pentru $y \geq 5$, u. c. $(y!) = 0$. În plus, u. c. $\left(x^2 + 10x\right) =$ u. c. $\left(x^2\right) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, deci u. c. $\left(x^2 + 10x + y!\right)$ nu ar fi 2. Rămâne că $y < 5$ şi considerând pe rând cele cinci cazuri, obţinem soluţiile de mai sus.

Soluţia a III-a. Deoarece $7! = 5040 > 2002$, avem că $y < 7$; problema se reduce la rezolvarea a şapte ecuaţii de grad II.

G24. *Aflaţi câte numere de* 4 *cifre au proprietatea că cifrele citite de la stânga spre dreapta sunt invers proporţionale cu cifrele citite de la dreapta spre stânga. Aceeaşi problemă pentru numerele de* 3*, respectiv* 5 *cifre.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Pentru a putea vorbi despre inversa proporţionalitate, este necesar în fiecare caz ca toate cifrele să fie nenule.

(i) Dacă $\overline{abcd}$ este un număr cu proprietatea din enunţ, atunci $\dfrac{a}{1/d} = \dfrac{b}{1/c} = \dfrac{c}{1/b} = \dfrac{d}{1/a}$, deci $ad = bc$. Dacă $\{a, d\} = \{b, c\}$ iar $a = d$, obţinem 9 numere. Dacă $\{a, d\} = \{b, c\}$ iar $a \neq d$, obţinem $4 \cdot 36 = 144$ numere (36 este numărul perechilor de cifre nenule (a, d) cu $a < d$, iar corespunzător fiecărei perechi se pot obţine 4 numere $\overline{abcd}$ distincte prin diverse permutări). Dacă $\{a, d\} \neq \{b, c\}$, atunci $\{\{a, d\}, \{b, c\}\} \in \underline{\{\{1, 4\}, \{2, 2\}\}}$, $\{\{1, 6\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{1, 8\}, \{4, 2\}\}$, $\{\{2, 6\}, \{3, 4\}\}$, $\underline{\{\{2, 8\}, \{4, 4\}\}}$, $\underline{\{\{2, 9\}, \{3, 6\}\}}$, $\{\{3, 8\}, \{4, 6\}\}$, $\underline{\{\{4, 9\}, \{6, 6\}\}}$. Obţinem $3 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 52$ numere (pentru fiecare element subliniat obţinem 4 numere $\overline{abcd}$, iar în celelalte cazuri câte 8). În total obţinem $9+144+52=205$ numere.

(ii) Dacă $\overline{abc}$ este un număr cu proprietatea din enunţ, deducem că $ac=b^2$. Dacă $a=c$, obţinem 9 numere. Dacă $a\neq c$, atunci $b=2$, $\{a,c\}=\{1,4\}$; $b=3$, $\{a,c\}=\{1,9\}$; $b=4$, $\{a,c\}=\{2,8\}$; $b=6$, $\{a,c\}=\{4,9\}$. Obţinem $4\cdot 2=8$ numere. În total obţinem $9+8=17$ numere.

(iii) Dacă $\overline{abcde}$ este un număr cu proprietatea din enunţ, deducem că $ae=bd=c^2$. Dacă $a=b=c=d=e$, obţinem 9 numere. În caz contrar,

$$\begin{aligned}
c&=2, \quad \{\{a,e\},\{b,d\}\}\in\{\{\{1,4\},\{2,2\}\},\{\{1,4\},\{1,4\}\}\};\\
c&=3, \quad \{\{a,e\},\{b,d\}\}\in\{\{\{1,9\},\{3,3\}\},\{\{1,9\},\{1,9\}\}\};\\
c&=4, \quad \{\{a,e\},\{b,d\}\}\in\{\{\{2,8\},\{4,4\}\},\{\{2,8\},\{2,8\}\}\};\\
c&=6, \quad \{\{a,e\},\{b,d\}\}\in\{\{\{4,9\},\{6,6\}\},\{\{4,9\},\{4,9\}\}\}.
\end{aligned}$$

Obţinem $4(4+4)=32$ numere. În total, obţinem $9+32=41$ numere.

G25. *Să se arate că pentru orice $x,y,x\in\mathbb{R}$, există $a,b,c\in\mathbb{Z}$ astfel încât $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leq\frac{3}{4}$. Generalizare.*

Vladimir Martinuşi, Iaşi

Soluţie. Dacă $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, $\varphi(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]$, este funcţia de rotunjire, atunci $|\varphi(x)-x|\leq\frac{1}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Pentru $a=\varphi(x)$, $b=\varphi(y)$, $c=\varphi(z)$, obţinem concluzia problemei. Cu acelaşi raţionament obţinem că dacă $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$, atunci există $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}$ astfel ca $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2\leq\frac{n}{4}$.

G26. *Dacă suma, produsul şi câtul a două numere iraţionale sunt numere raţionale, calculaţi suma cuburilor celor două numere.*

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Dacă $\frac{a}{b}+1\neq 0$, atunci $a+b=b\left(\frac{a}{b}+1\right)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deoarece $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Rămâne că $\frac{a}{b}+1=0$, deci $a=-b$ şi $a^3+b^3=0$.

Observaţie. Ipoteza "$ab\in\mathbb{Q}$" nu este necesară.

G27. *Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ minim pentru care 2^n-1 este divizibil cu 125.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $n=4q+r$, $q,r\in\mathbb{N}$, $0\leq r<4$. Atunci $2^n-1=2^r\cdot 2^{4q}-1=$ $=2^r\cdot 16^q-1$. Cum ultima cifră a lui 16^q este 6 ($q=0$ nu convine), ca 2^n-1 să se dividă cu 5 e necesar $r=0$, în caz contrar ultima cifră a lui 2^n-1 fiind 1, 3 sau 7.

Atunci $2^n-1=2^{4q}-1=15\left(16^{q-1}+16^{q-2}+\cdots+1\right)$ şi deci ca 2^n-1 să se dividă cu 125 este necesar şi suficient ca $25\mid 16^{q-1}+16^{q-2}+\cdots+1$. Cum $16^p=(15+1)^p=M_5+1$ pentru $p\geq 0$, ca suma să se dividă cu 5 este necesar şi suficient ca numărul termenilor să se dividă cu 5, deci $q=5k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Atunci

$$2^n-1=2^{20k}-1=1024^{2k}-1=1048576^k-1=1048575\left(1048576^{k-1}+\cdots+1\right).$$

Cum 1048575 este divizibil cu 25, dar nu şi cu 125, este necesar şi suficient ca 5 să dividă al doilea factor. Deoarece $1048576^p=M_5+1$ pentru $p\geq 0$, este necesar şi suficient ca numărul termenilor să se dividă cu 5, deci $k=5m$, $m\in\mathbb{N}^*$ şi $n=100m$, $m\in\mathbb{N}^*$. Numărul n minim este 100.

G28. *Să se arate că ecuaţia*

$$x^4-(a+b)\,x^3+(a+b+ab-2)\,x^2-\left(a^2+b^2-a-b\right)x+(a-1)\,(b-1)=0$$

are cel puţin două soluţii reale pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Marian Teler, Costeşti (Argeş)

Soluţie. Ecuaţia dată se descompune în $\left(x^2-ax+b-1\right)\left(x^2-bx+a-1\right)=0$. Se obţin ecuaţiile $x^2-bx+a-1=0$ şi $x^2-ax+b-1=0$. Atunci

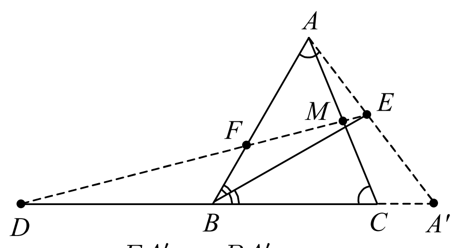
$$\Delta_1+\Delta_2=b^2-4a+4+a^2-4b+4=(a-2)^2+(b-2)^2\geq 0,$$

deci $\Delta_1 \geq 0$ sau $\Delta_2 \geq 0$ şi cel puţin una dintre cele două ecuaţii are soluţii reale.

G29. *Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A})<m(\widehat{C})$. Pe bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{B}$ luăm un punct E astfel încât $\widehat{EAB}\equiv\widehat{ACB}$. Se prelungeşte latura $[BC]$ cu segmentul $[BD]\equiv[AB]$, B între C şi D. Să se arate că mijlocul M al segmentului $[AC]$ se află pe dreapta DE.*

Constantin Chirilă, Iaşi

Soluţia I (a autorului). Construim prin E o dreaptă paralelă cu AC care intersectează AD şi CD în P şi Q. În $\triangle EBA$ şi EQB, $\widehat{EBA}\equiv\widehat{EBQ}$ şi $\widehat{EAB}\equiv$ $\equiv\widehat{EQB}$ $(\equiv\widehat{ACB})$. Cum $[EB]\equiv[EB]$, $\triangle AEB\equiv\triangle BEQ$ (ULU), deci $[EA]\equiv[EQ]$. Deoarece $\triangle ABD$ este isoscel, $\widehat{BAD}\equiv\widehat{BDA}$. Cum $\widehat{EAB}\equiv\widehat{ACB}$, obţinem că $\widehat{EAP}\equiv\widehat{CAD}$, şi deoarece $\widehat{CAD}\equiv\widehat{EPA}$, $\triangle EAP$ este isoscel, deci $[EA]\equiv[EP]$. Urmează că $[EP]\equiv[EQ]$, adică $[DE]$ este mediană în $\triangle DPQ$ şi atunci dreapta DE înjumătăţeşte segmentul $[AC]$ paralel cu "baza" PQ.



Soluţia a II-a. Fie $\{A'\}=BC\cap AE$ şi $\{F\}=AB\cap DE$. Deoarece $\triangle ABC\sim$ $\sim\triangle A'BA$, putem scrie: $\dfrac{c}{A'B}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{A'A}$, de unde $A'A=\dfrac{bc}{a}$ şi $A'B=\dfrac{c^2}{a}$. Conform teoremei lui Menelaus, avem: $\dfrac{DB}{DA'}\cdot\dfrac{EA'}{EA}=$ $=\dfrac{FB}{FA}$ ($\triangle ABA'$ şi DE). Cum $\dfrac{DB}{DA'}=\dfrac{c}{c+c^2/a}$ şi $\dfrac{EA'}{EA}=\dfrac{BA'}{BA}=\dfrac{c}{a}$ (teorema bisectoarei), rezultă că $\dfrac{FB}{FA}=\dfrac{c}{a+c}$. Pentru a dovedi că $M\in DE$, arătăm că punctele D, M, E sunt coliniare utilizând reciproca teoremei lui Menelaus relativ la $\triangle ABC$; într-adevăr, avem $\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{MC}{MA}\cdot\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{c}{c+a}\cdot 1\cdot\dfrac{a+c}{c}=1$.

G30. *Fie triunghiul AB_0B_1 dreptunghic în B_0 şi triunghiurile AB_iB_{i+1} cu $B_iB_{i+1}\perp AB_i$, $\forall i\in N^*$, iar $m(\widehat{B_iAB_{i+1}})=30°$, $\forall i\in N$.*

a) Demonstraţi că punctele A, B_q şi B_r sunt coliniare, unde $q=2\left(n^3-n+1\right)$, $r=3^{2002}-3^{2000}+3^{1998}-3^{1996}+\ldots+3^2-3^0$.

b) Aflaţi aria triunghiului $AB_{2001}B_{2002}$ funcţie de $a=B_0B_1$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. a) Observăm mai întâi că dacă $i\in\mathbb{N}$, $i=12q_1+r_1$, $q_1, r_1\in\mathbb{N}$, $0\leq r_1<12$, atunci $B_{r_1}\in[AB_i]$. Deoarece $q=2n\,(n+1)\,(n-1)+2$, $q=M_{12}+2$ şi $B_2\in[AB_q]$. În plus, $r=8\left(3^{2000}+3^{1996}+\cdots+3^0\right)=M_{12}+8$ şi $B_8\in[AB_r]$. Cum B_2, A, B_8 sunt coliniare, B_r, A şi B_q sunt de asemenea coliniare.

b) Observăm că $\triangle AB_iB_{i+1} \sim \triangle AB_{i+1}B_{i+2}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, raportul de asemănare fiind $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Atunci $S_{AB_{2001}B_{2002}} = \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{2\cdot 2001} \cdot S_{AB_0B_1} = \dfrac{2^{4001}}{3^{2001}}\, a^2\sqrt{3}$.

G31. *Se consideră un triunghi isoscel ABC cu baza $BC = 2\sqrt{2}$ cm. Fie punctele variabile $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Fie O mijlocul segmentului $[MN]$ şi P intersecţia dreptelor AO şi BC. Aflaţi perimetrul $\triangle ABC$ ştiind că aria minimă a reuniunii suprafeţelor triunghiulare $[MBP]$ şi $[NCP]$ este* $\sqrt{3}$ cm^2.

Adriana Maxiniuc, Botoşani

Soluţie. Fie $NQ \parallel AB$, $Q \in (BC)$. Atunci $\widehat{NQC} \equiv \widehat{ABC}$ şi cum $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$, $\triangle NQC$ este isoscel, deci $[NC] \equiv [NQ]$. Deoarece $[NC] \equiv [AM]$, rezultă că $[NQ] \equiv [AM]$ şi cum $NQ \parallel AM$, $ANQM$ este paralelogram. Notăm $AQ \cap MN = \{O'\}$. Atunci O' înjumătăţeşte $[MN]$, deci $O' \equiv O$ şi atunci $P \equiv Q$, deci $AMPN$ este paralelogram.

Deoarece $S_{MBP} + S_{NCP} + S_{AMNP} = S_{ABC} =$ constant, aria din enunţ este minimă când S_{AMNP} este maximă. Cum $S_{AMNP} = AM \cdot AN \sin\widehat{BAC} = AM\,(AC - AM) \times \times \sin\widehat{BAC}$, iar $AM\,(AC - AM)$ este maxim când $AM = \dfrac{AC}{2}$, rezultă că S_{AMNP} este maximă atunci când M şi N sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[AC]$, cu valoarea $\dfrac{S_{ABC}}{2}$. Atunci minimul ariei din enunţ este de asemenea $\dfrac{S_{ABC}}{2}$, deci lungimea înălţimii din A este $\sqrt{6}$ cm. Rezultă $AB = 2\sqrt{2}$ cm, iar $P_{ABC} = 6\sqrt{2}$ cm.

G32. *Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90°$, M un punct pe dreapta AD, iar $N \in BC$ astfel încât $MN \perp BC$. Arătaţi că $S_{CMB} \geq S_{AND}$.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie (Constantin Tonu, elev, Iaşi). Patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi sau trapez dreptunghic. Fie N' proiecţia lui N pe AD; atunci $S_{CMB} = \dfrac{1}{2}\, MN \cdot BC$, $S_{AND} = \dfrac{1}{2}\, NN' \cdot AD$. Însă $MN \geq NN'$, iar $BC \geq AD$, de unde concluzia.

G33. *În triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 2\alpha$, fie $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{A}$, iar M, N puncte pe (AB) respectiv (AC). Dacă $\{P\} = AD \cap MN$, demonstraţi că $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = \dfrac{2\cos\alpha}{AP}$ (în legătură cu C:2402 din G.M. 5-6/2001).*

Mihaela Bucătaru, Iaşi

Soluţie. Relaţia se scrie $AP = \dfrac{2\,AM \cdot AN}{AM + AN} \cos\dfrac{A}{2}$, egalitate adevărată, deoarece $[AP]$ este bisectoare în triunghiul AMN.

G34. *În triunghiul ABC având $m(\widehat{BAC}) = 135°$ se înscrie pătratul $MNPQ$ cu $M, N \in (BC)$, $P \in (CA)$ şi $Q \in (AB)$. Arătaţi că:*

1° $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{b + c\sqrt{2}}{c + b\sqrt{2}}$; 2° $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{AM}{AN}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Deoarece $m(\widehat{BAC}) = 135°$, A este pe cercul circumscris pătratului. Observăm de aici că $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{NAC}) = 45°$. Notăm $l = MN$.

1° Deoarece $APMQ$ este inscriptibil, $AM \cdot PQ = AP \cdot MQ + AQ \cdot MP$, deci

$AM = l\left(\dfrac{AP}{PQ} + \sqrt{2}\dfrac{AQ}{PQ}\right)$. Deoarece $\triangle AQP \sim \triangle APC$, $\dfrac{AP}{PQ} = \dfrac{b}{a}$ şi $\dfrac{AQ}{PQ} = \dfrac{c}{a}$. Atunci $AM = \dfrac{l}{a}\left(b + \sqrt{2}\,c\right)$. Analog obţinem că $AN = \dfrac{l}{a}\left(\sqrt{2}\,b + c\right)$, de unde rezultă concluzia.

$2°$ Utilizând teorema sinusurilor în $\triangle ABM$ şi $\triangle ACN$, $\dfrac{BM}{\sin 45°} = \dfrac{AM}{\sin B}$ şi $\dfrac{CN}{\sin 45°} = \dfrac{AN}{\sin C}$. Atunci $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{AM}{AN} \cdot \dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{AM}{AN}$.

G35. *Fie $[ABCD]$ un tetraedru. În planele (ABC), (ADC), (ADB) considerăm tangentele în A la cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, ADC respectiv ADB, care intersectează dreptele BC, CD, DB în M, N respectiv P. Notăm $x = \dfrac{MB}{MC}$, $y = \dfrac{NC}{ND}$, $z = \dfrac{PD}{PA}$. Să se arate că $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geq 1$.*

Marian Ionescu, Piteşti

Soluţie. În planul (ABC), observăm că $\triangle AMB \sim \triangle CMA$, deci $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{MA}{MC}$. Atunci $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MB}{MA} \cdot \dfrac{MA}{MC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$, deci $x = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ şi analog deducem că $y = \dfrac{AC^2}{AD^2}$, $z = \dfrac{AD^2}{AB^2}$, prin urmare $xyz = 1$. Observăm că $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+yz} = 1$, deci inegalitatea de demonstrat se reduce la $\dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geq \dfrac{1}{1+yz}$, care se obţine prin calcul direct.

B. Nivel liceal

L21. *Rezolvaţi în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $a^2 + 3b^2 = 2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este fixat.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie (dată de Andrei Nedelcu, Iaşi). Dacă a şi b au parităţi diferite, atunci $n = 0$ şi avem soluţia $a = 1$, $b = 0$. Dacă $n > 0$, atunci a, b au aceeaşi paritate şi atunci fie $a + b = 2x$, $x \in \mathbb{N}^*$ şi $a - b = 2y$, $y \in \mathbb{Z}$. Înlocuind, obţinem $4\left(x^2 - xy + y^2\right) = 2^n$, de unde $n \geq 2$. Fie $d = (x, y)$; avem că $d = 2^s$, $2s \leq n - 2$, iar $x = 2^s x_1$, $y = 2^s y_1$, cu $(x_1, y_1) = 1$. Înlocuind din nou, găsim $x_1^2 - x_1 y_1 + y_1^2 = 2^{n-2-2s}$ şi cum membrul stâng este impar, $n = 2(s+1)$ este număr par, iar $x_1^2 - x_1 y_1 + y_1^2 = 1$. Fiindcă $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$, cu $x_1 \neq 0$, obţinem că $x_1 = y_1 = 1$ sau $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, cu soluţiile corespunzătoare $a = 2^{n/2}$, $b = 0$, respectiv $a = b = 2^{\frac{n-2}{2}}$.

Cu această tehnică putem aborda rezolvarea ecuaţiei în $\mathbb{Q}^2$. Să observăm mai întâi că este suficient să găsim soluţiile $(a, b) \in \mathbb{Q}_+^2$, celelalte soluţii fiind de forma $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$. Fie $a = \dfrac{x}{z}$, $b = \dfrac{y}{w}$, cu $x, y, z, w \in \mathbb{N}$, $(x, z) = (y, w) = 1$. Se observă uşor că $z = w$ şi ecuaţia devine $x^2 + 3y^2 = 2^n \cdot z^2 \quad (*)$. Pentru $n = 0$, putem scrie $x^2 - y^2 = z^2 - 4y^2$, i. e. $(x - y)(x + y) = (z - 2y)(z + 2y)$. Dacă $x = y$, atunci $z = 2y$, deci $a = b = \dfrac{1}{2}$. Dacă $x \neq y$, atunci $\dfrac{x-y}{z-2y} = \dfrac{z+2y}{x+y} = \dfrac{m}{n}$, de unde $x = k\left(m^2 - 4mn + n^2\right)$, $y = k\left(m^2 - n^2\right)$, $z = 2k\left(m^2 - mn + n^2\right)$, cu $k, m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x, y, z \geq 0$.

Fie $n \neq 0$; atunci x, y au aceeaşi paritate şi fie $x + y = 2\alpha$, $x - y = 2\beta$. Prin înlocuire în $(*)$, obţinem $4\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right) = 2^n z^2$. Dacă n impar, această ecuaţie nu are soluţii, deoarece în membrul stâng şi în z^2 factorul 2 apare numai la puteri pare. Dacă n este par, fie $(\alpha,\beta)=2^s$, $z=2^r z_1$ cu z_1 impar şi atunci $4\cdot 2^{2s}\left(\alpha_1^2-\alpha_1\beta_1+\beta_1^2\right)=2^n\cdot 2^{2r}z_1^2$, deci $2s+2=n+2r$, iar $\alpha_1^2-\alpha_1\beta_1+\beta_1^2=z_1^2$, cu soluţia $z_1=k\left(m^2-mn+n^2\right)$, iar $(\alpha_1,\beta_1)=\left(k\left(m^2-n^2\right),k\left(2mn-n^2\right)\right)$ sau invers etc.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Alin Iacob*, elev, Iaşi.

L22. *Fie $n\in\mathbb{N}$ un număr scris în baza 10. Acestui număr îi adăugăm la sfârşit 147, numărului obţinut îi adăugăm din nou la sfârşit 147 şi aşa mai departe. Arătaţi că printre numerele astfel obţinute există numere compuse.*

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Avem $n_1=1000n+147=37\,(27n+4)+n-1$, de unde obţinem că $n_1\equiv n-1\pmod{37}$. Apoi $n_2=1000n_1+147=37\,(27n_1+4)+n_1-1$, deci $n_2\equiv n_1-1\pmod{37}\equiv n-2\pmod{37}$ şi aşa mai departe. Astfel obţinem că numerele din şirul construit sunt congruente, modulo 37, cu $n-1$, $n-2,\ldots,n-37,\ldots$, deci există printre ele numere divizibile cu 37, adică numere compuse.

L23. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă principală T astfel încât pe $[0,T]$ f se anulează de un număr finit de ori şi fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale nenule. Arătaţi că există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(\alpha x_n)\cdot f(\alpha+x_n)\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.*

Paul Georgescu şi Iuliana Georgescu, Iaşi

Soluţie. Fie $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ mulţimea pe care f se anulează în $[0,T]$ şi fie

$$A=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{x_n}+\frac{T}{x_n}\mathbb{Z}\right)\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k}(a_i-x_n+T\mathbb{Z})\right).$$

Însă $\dfrac{a_i}{x_n}+\dfrac{T}{x_n}\mathbb{Z}$ şi $a_i-x_n+T\mathbb{Z}$ sunt mulţimi numărabile, $\forall i\in\overline{1,k}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şi A este numărabilă. Cum $\mathbb{R}$ este nenumărabilă, $\mathbb{R}\setminus A\neq\emptyset$.

Fie $\alpha\in\mathbb{R}\setminus A$. Atunci $\alpha\notin\dfrac{a_i}{x_n}+\dfrac{T}{x_n}\mathbb{Z}$, $\forall i\in\overline{1,k}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $\alpha x_n\notin a_i+T\mathbb{Z}$, $\forall i\in\overline{1,k}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că $f(\alpha x_n)\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Analog deducem că $f(\alpha+x_n)\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, de unde rezultă concluzia problemei.

L24. *Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice nesingulare cu $\det A+\det B=0$. Există $\alpha>0$ astfel încât $A^2B-B^2A=\alpha A$?*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că există $\alpha>0$ astfel ca $A^2B-B^2A=\alpha A$. Înmulţind la dreapta cu A^{-1}, obţinem că $A^2BA^{-1}=B^2+\alpha I_n$. Însă

$$\det\left(B^2+\alpha I_n\right)=\det\left(B+i\sqrt{\alpha}I_n\right)\det\left(B-i\sqrt{\alpha}I_n\right)=\left|\det\left(B+i\sqrt{\alpha}I_n\right)\right|^2,$$

iar $\det\left(A^2BA^{-1}\right)=\det A\det B=-\left(\det A\right)^2<0$, contradicţie.

L25. *Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că există $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 3$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$, $|\alpha|\leq 1$, astfel încât $A^{m+1}-\alpha A^m-\alpha A+I_n=O_n$. Să se arate că $|\det A|=1$.*

Lucian Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Fie $P_A(X)=\det(XI-A)=(X-x_1)^{k_1}(X-x_2)^{k_2}\ldots(X-x_l)^{k_l}$ polinomul caracteristic al matricei A. Cum $x_1,x_2,\ldots,x_l$ sunt rădăcini şi ale lui m_A, polinomul minimal al matricei A peste $\mathbb{C}$, iar m_A divide $X^{m+1}-\alpha X^m-\alpha A+1$, rezultă că $x_1,x_2,\ldots,x_l$ au modulele egale cu 1, deoarce ultimul polinom are toate rădăcinile de modul 1. Dar $P_A(0) = \det(-A) = (-1)^{\sum_{i=1}^{l} k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_l^{k_l}$. Atunci $\det(-A) = (-1)^n \det A = (-1)^{\sum_{i=1}^{l} k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_l^{k_l}$, de unde $|\det A| = 1$.

L26. *Fie $f : S_n \to S_n$ endomorfism astfel încât există $\tau \in S_n$ pentru care $(f \circ f)(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$, $\forall \sigma \in S_n$. Arătaţi că f are un punct fix (i.e. $\exists \omega \in S_n$, $f(\omega) = \omega$).*

Ovidiu Munteanu, Braşov

Soluţie. Fie $\tau \in S_n$ cu proprietatea din enunţ. Este uşor de observat că funcţia $\varphi : S_n \to S_n$, $\varphi(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$ este bijectivă. Relaţia din enunţ se scrie sub forma $f \circ f = \varphi$, de unde rezultă că f este bijectivă.

Pentru $\sigma \in S_n$, $(f \circ f \circ f)(\sigma) = f(\varphi(\sigma)) = f\left(\tau\sigma\tau^{-1}\right) = f(\tau) f(\sigma) f\left(\tau^{-1}\right)$ şi, de asemenea, $(f \circ f \circ f)(\sigma) = \varphi(f(\sigma)) = \tau f(\sigma)\tau^{-1}$. Rezultă de aici că $f(\tau) f(\sigma) f\left(\tau^{-1}\right) = \tau f(\sigma)\tau^{-1}$, $\forall \sigma \in S_n$ şi, deoarece f este surjectivă, $f(\tau)\rho f\left(\tau^{-1}\right) = \tau\rho\tau^{-1}$, $\forall \rho \in S_n$. Deci $\left[\tau^{-1} f(\tau)\right]\rho = \rho\left[\tau^{-1} f(\tau)\right]$, $\forall \rho \in S_n$ şi cum $\tau^{-1} f(\tau)$ comută cu toate elementele lui S_n, $\tau^{-1} f(\tau) = e$. Obţinem că $f(\tau) = \tau$.

L27. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu unitate şi $n, k \in \mathbb{N}^*$, k impar, astfel încât $x^{n+k} = x^n$, $\forall x \in A$. Să se arate că $x^{k+1} = x$, $\forall x \in A$ (în legătură cu C: 1896 din G.M. nr.1/1997).*

Dragoş Deliu şi Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Dacă $n = 1$, nu avem nimic de demonstrat. Fie acum $n \geq 2$. Deoarece $(-1)^{n+k} = (-1)^n$, iar n şi $n + k$ au parităţi diferite, avem că $-1 = 1$, deci $1 + 1 = 0$ şi în concluzie $2a = a + a = 0$, $\forall a \in A$.

Demonstrăm acum că în inelul A este valabilă implicaţia $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Într-adevăr, fie $x \in A$ astfel ca $x^2 = 0$. Atunci $x^s = 0$, $\forall s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ şi aplicând formula binomială rezultă că $(1 + x)^p = 1 + px$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Cum $(1 + x)^{n+k} = (1 + x)^n$ din ipoteză, obţinem că $1 + (n - k)x = 1 + nx$, de unde $kx = 0$. Deoarece k este impar şi $2x = 0$, rezultă imediat că $x = 0$, deci implicaţia este dovedită.

Din ipoteză, $x^{n+k} = x^n$, $\forall x \in A$, deci şi $x^{m+k} = x^m$, $\forall x \in A$, pentru $m \geq n$. Vom avea atunci

$$\left(x^{n+k-1} - x^{n-1}\right)^2 = \left(x^{2n+k-2+k} - x^{2n+k-2}\right) - \left(x^{2n-2+k} - x^{2n-2}\right) = 0,$$

ceea ce implică $x^{n+k-1} - x^{n-1} = 0$. Am obţinut că $x^{n+k-1} = x^{n-1}$; repetând raţionamentul obţinem că $x^{n+k-2} = x^{n-2}, \ldots, x^{k+1} = x$, q.e.d.

L28. *Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri ascuţitunghice. Dacă*

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^2 \geq \left(\frac{b}{b'}\right)^2 \geq \left(\frac{c}{c'}\right)^2 \geq \frac{S}{S'},$$

arătaţi că triunghiurile sunt asemenea.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Notăm cu $x = \dfrac{\sin A}{\sin A'}$, $y = \dfrac{\sin B}{\sin B'}$, $z = \dfrac{\sin C}{\sin C'}$. Folosind teorema sinusurilor şi formula $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, obţinem că $x^2 \geq y^2 \geq z^2 \geq xyz$. De aici, $x \geq y \geq z$ şi $xy \leq z$. Atunci şi $xy \leq y$, de unde $x \leq 1$ şi deci $z \leq y \leq x \leq 1$. Deoarece $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ sunt ascuţitunghice, iar funcţia sinus este crescătoare pe $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, din $x \leq 1$, $y \leq 1$, $z \leq 1$ obţinem că $m(\widehat{A}) \leq m(\widehat{A'})$, $m(\widehat{B}) \leq m(\widehat{B'})$, $m(\widehat{C}) \leq m(\widehat{C'})$. Cum $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = m(\widehat{A'}) + m(\widehat{B'}) + m(\widehat{C'}) = 180^\circ$, rezultă că $m(\widehat{A}) = m(\widehat{A'})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{B'})$, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{C'})$, deci cele două triunghiuri sunt asemenea.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Alin Iacob*, elev, Iaşi.

L29. *Fie ABC un triunghi, iar $\mathcal{C}$ un cerc tangent laturilor $[AB]$ şi $[AC]$ în F, respectiv E şi care intersectează latura $[BC]$ în M şi N. Fie X un punct interior triunghiului astfel încât există un cerc $\mathcal{C}_1$ tangent laturilor $[XB]$ şi $[XC]$ în Z, respectiv Y şi care taie $[BC]$ tot în M şi N. Demonstraţi că patrulaterul $EFZY$ este inscriptibil.*

Neculai Roman, Mirceşti, (Iaşi)

Soluţie. Dacă $[AB] \equiv [AC]$, punctul X va fi în mod necesar pe axa triunghiului ABC (altfel $\mathcal{C}_1$ n-ar exista). Ca urmare, patrulaterul $EFZY$ este trapez isoscel, deci este inscriptibil. Fie acum $[AB] \not\equiv [AC]$ şi fie $\{K\} = FE \cap BC$, $\{K'\} = ZY \cap BC$ (K' există deoarce triunghiul XBC nu va fi nici el isoscel). Aplicând teorema lui Menelaus pentru $\triangle ABC$ cu transversala KFE obţinem $\dfrac{KB}{KC} \cdot \dfrac{EC}{EA} \cdot \dfrac{FA}{FB} = 1$, deci $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{FB}{EC}$. Aplicând teorema lui Menelaus pentru $\triangle XBC$ cu transversala KZY obţinem $\dfrac{K'B}{K'C} \cdot \dfrac{YC}{YX} \cdot \dfrac{ZX}{ZB} = 1$, deci $\dfrac{K'B}{K'C} = \dfrac{ZB}{YC}$. Dar $FB = ZB$ şi $YC = EC$ (deoarece B şi C aparţin axei radicale a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}$), prin urmare $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{K'B}{K'C}$, de unde $K = K'$. Deoarece K se află pe axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}$, avem $KE \cdot KF = KY \cdot KZ$, deci punctele E, F, Y, Z sunt conciclice.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Alin Iacob*, elev, Iaşi.

L30. *Fie ABC un triunghi echilateral, iar P un punct în planul triunghiului. Notăm cu A_1, B_1, C_1 simetricele lui P faţă de BC, CA şi respectiv AB. Să se arate că se poate forma un triunghi având lungimile laturilor egale cu AA_1, BB_1, CC_1.*

Constantin Cocea, Iaşi

Soluţie. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $P(p)$ şi fie $O(0)$ centrul cercului circumscris $\triangle ABC$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Avem $\lambda_{BC} = \dfrac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = \dfrac{b-c}{1/b-1/c} = -bc$, de unde $\lambda_{PA_1} = bc$, deoarece $PA_1 \perp BC$. Fie $\{A'\} = PA_1 \cap BC$. Ecuaţia dreptei BC este $z - b = -bc\left(\overline{z} - \overline{b}\right)$ şi poate fi rescrisă sub forma $z + bc\overline{z} = b + c$. Ecuaţia dreptei PA_1 este $z - p = bc(\overline{z} - \overline{p})$. De aici obţinem că afixul a' al punctului A' este dat de egalitatea $a' = \dfrac{1}{2}(b + c + p - bc\overline{p})$. Cum $a' = \dfrac{p + a_1}{2}$, unde a_1 este afixul punctului A_1, urmează că $a_1 = b + c - bc\overline{p}$ şi în mod similar, $b_1 = c + a - ca\overline{p}$, $c_1 = a + b - ab\overline{p}$.

De aici, $(a - a_1) + (b - b_1) + (c - c_1) = 0$ şi se obţine că $|a - a_1| + |b - b_1| \geq |c - c_1|$, de unde $AA_1 + BB_1 \geq CC_1$. Analog obţinem că $AA_1 + CC_1 \geq BB_1$ şi $BB_1 + CC_1 \geq AA_1$, ceea ce trebuia demonstrat.

L31. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_1 = a > 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt[p]{a_n^{p-1}} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^p}$ (în legătură cu C:1463 din G.M. nr.11/1993).*

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie. Deoarece $a > 1$, putem demonstra prin inducţie că $a_n > 1$, $\forall n \geq 1$, de unde, ţinând seama că $a_{n+1} - a_n = \sqrt[p]{a_n^{p-1}} - 1$, obţinem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ ar fi mărginit superior, atunci ar avea o limită finită

l. Trecând la limită în relaţia de recurenţă s-ar obţine că $l = l + \sqrt[p]{l^{p-1}} - 1$, deci $l = 1$, contradicţie. În concluzie, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Împărţind acum în relaţia de recurenţă prin a_1 obţinem că $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \sqrt[p]{\frac{1}{a_n}} - \frac{1}{a_n}$, de unde $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Calculăm acum limita $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{a_n}}{n}$ cu ajutorul lemei lui Cesaro - Stolz. Observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{a_{n+1}} - \sqrt[p]{a_n}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt[p]{a_{n+1}^{p-1}} + \sqrt[p]{a_{n+1}^{p-2} a_n} + \ldots + \sqrt[p]{a_n^{p-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sqrt[p]{\frac{1}{a_n^{p-1}}}}{\sqrt[p]{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{p-1}} + \sqrt[p]{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{p-2}} + \ldots + 1} = \frac{1}{p}.$$

De aici, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{a_n}}{n} = \frac{1}{p}$, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} = \frac{1}{p^p}$.

L32. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale care satisface condiţia $\left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = x_n$, $\forall n \geq 1$, iar $x_1 = 2$. Să se arate că există $\alpha > 1$ pentru care $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha^{2^n}} = 1$.*

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Avem că $x_n \leq \frac{x_{n+1}}{x_n} < x_n + 1$, deci $x_n^2 \leq x_{n+1} < x_n^2 + x_n$; în particular, putem deduce prin inducţie că $x_n \geq 2^{2^{n-1}}$, $\forall n \geq 1$. Notăm $y_n = \frac{\ln x_n}{2^n}$. Atunci $y_{n+1} - y_n = \frac{\ln\left(x_{n+1}/x_n^2\right)}{2^{n+1}}$, deci $0 \leq y_{n+1} - y_n < \frac{\ln\left(1 + 1/x_n\right)}{2^{n+1}} < \frac{1}{x_n\, 2^{n+1}}$.

Se obţine că $(y_n)_{n\geq 1}$, este monoton crescător şi, în plus,

$$y_{n+1} = y_1 + \sum_{k=1}^{n} (y_{k+1} - y_k) \leq y_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}},$$

de unde $y_{n+1} < y_1 + 1/2$, adică $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Deducem că $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi fie $\ln\alpha$ limita sa, $\alpha > 1$. Deoarece

$$y_{n+p} - y_n = \sum_{k=0}^{p-1} (y_{n+k+1} - y_{n+k}) < \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{x_{n+k} 2^{n+k+1}},$$

obţinem că $y_{n+p} - y_n < \frac{1}{x_n\, 2^n}$. Cum $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător, pentru $p \to \infty$ obţinem că $0 \leq \ln\alpha - y_n \leq \frac{1}{x_n\, 2^n}$. De aici, $0 \leq \ln\alpha - \frac{\ln x_n}{2^n} \leq \frac{1}{x_n\, 2^n}$, deci $0 \leq \ln \frac{\alpha^{2^n}}{x_n} \leq \frac{1}{x_n}$. Pentru $n \to \infty$ obţinem că $\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\alpha^{2^n}}{x_n} = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha^{2^n}} = 1$.

L33. *Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ fixat. Arătaţi că soluţiile continue ale ecuaţiei funcţionale*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) + \sum_{1\leq i<j\leq m} f\left(x_i - x_j\right) = m\left(\sum_{i=1}^{m} f\left(x_i\right)\right),\ \forall x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,m},$$

sunt funcţiile de forma $f(x) = cx^2$, cu $c \in \mathbb{R}$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, obţinem că $f(0) + C_m^2 f(0) = m^2 f(0)$, deci $f(0) = 0$. Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m-1} = 0$ şi $x_m = x$, obţinem că $f(x) + (m-1) f(-x) = mf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi f este funcţie pară. Este deci suficient să determinăm f pe $(0, \infty)$.

Notăm $f(1) = c$. Pentru $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_3 = \ldots = x_m = 0$, obţinem că $f(2) + (m-2) f(1) = 2mf(1)$, deci $f(2) = 4c = c \cdot 2^2$. Pentru $x_1 = n$, $x_2 = 1$ şi $x_3 = \ldots = x_m = 0$, obţinem că $f(n+1) + (m-2) f(n) + f(n-1) + (m-2) f(1) = m(f(n) + f(1))$ şi deci $f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) + 2f(1)$. De aici se demonstrează uşor prin inducţie că $f(n) = cn^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = x \in \mathbb{R}_+^*$ obţinem că $f(mx) = m^2 f(x)$. De aici, $f\left(\dfrac{x}{m}\right) = \dfrac{f(x)}{m^2}$ şi, prin inducţie, $f\left(\dfrac{x}{m^k}\right) = \dfrac{f(x)}{m^{2k}}$, de unde $f\left(\dfrac{n}{m^k}\right) = c\left(\dfrac{n}{m^k}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notăm $M = \left\{\dfrac{n}{m^k};\ n, k \in \mathbb{N}\right\}$. Din cele demonstrate mai sus, $f(x) = cx^2$, $\forall x \in M$. Demonstrăm că $\forall x > 0$ şi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in M$ astfel ca $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon$. Fie $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\dfrac{1}{m^{k_\varepsilon}} < \min\{x, \varepsilon\}$. Conform axiomei lui Arhimede, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\dfrac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}} \leq x < \dfrac{n_\varepsilon + 1}{m^{k_\varepsilon}}$, deci $0 \leq x - \dfrac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}} < \dfrac{1}{m^{k_\varepsilon}} < \varepsilon$, de unde $\left|x - \dfrac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}}\right| < \varepsilon$. Rezultă că putem alege $x_\varepsilon = \dfrac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}}$. Pentru $\varepsilon = \dfrac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$, obţinem că $\exists (x_l)_{l \geq 1} \subset M$ astfel ca $|x - x_l| < \dfrac{1}{l}$, $\forall l \geq 1$, deci $x_l \to x$ pentru $l \to \infty$. Cum $f(x_l) = cx_l^2$, iar f este continuă, obţinem că $f(x) = cx^2$. În concluzie, $f(x) = cx^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

L34. *Se consideră şirul de funcţii $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [-2, \infty) \to \mathbb{R}$ definit prin $f_0(x) = x$, $f_n(x) = \sqrt{2 + f_{n-1}(x)}$, $\forall n \geq 1$. Notăm*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{f_n(x)}{2}\right)^{4^n}, & \text{dacă } x \in [-2, 2] \\ \lim\limits_{n \to \infty} [3 - f_n(x)]^{4^n}, & \text{dacă } x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

Arătaţi că $f(x)$ defineşte o funcţie pe $[-2, \infty)$ şi cercetaţi dacă această funcţie admite primitive.

Ştefan Alexe, Piteşti

Soluţie. Fie mai întâi $x \in [-2, 2]$. Se observă că funcţia $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $g(x) = \cos x$ este bijectivă. În concluzie, există un unic $t = t(x) \in [0, \pi]$, $t = \arccos \dfrac{x}{2}$, astfel încât $\cos t = \dfrac{x}{2}$, deci $f_0(x) = 2\cos t$. Atunci $f_1(x) = \sqrt{2 + 2\cos t} = 2\cos \dfrac{t}{2}$ şi se demonstrează prin inducţie că $f_n(x) = 2\cos \dfrac{t}{2^n}$.

Fie acum $x \in (2, +\infty)$. Se observă că funcţia $h : (0, \infty) \to (1, \infty)$, $h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$ este bijectivă. În concluzie, există un unic $t = t(x) \in (0, \infty)$, $t = \ln\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{ch} t = \dfrac{x}{2}$. Atunci $f_1(x) = \sqrt{2 + 2\operatorname{ch} t} = \sqrt{2 + e^t + e^{-t}}$, deci $f_1(x) = e^{t/2} + e^{-t/2} = 2\operatorname{ch} \dfrac{t}{2}$ şi se demonstrează prin inducţie că $f_n(x) = 2\,\mathrm{ch}\,\dfrac{t}{2^n}$.

Găsirea expresiei funcţiei f se reduce la calculul unor limite elementare. Se obţine că $f(x) = 1 + e^{-\frac{1}{2}\arccos^2\frac{x}{2}}$, dacă $x \in [-2, 2]$, respectiv $f(x) = e^{-\ln^2\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}}$, dacă $x \in (2, +\infty)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 2$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 1$, $x = 2$ este punct de discontinuitate de speţa întâi pentru f, deci f nu admite primitive pe $[-2, +\infty)$.

L35. *Să se arate că există şi este unic* $\alpha > 1$ *astfel încât*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha \sin x}\,dx \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{e^x + \alpha \sin x}\,dx = \frac{\pi^2}{64\alpha}$$

(se ştie că $0,45 < e^{-\pi/4} < 0,46$*).*

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Notăm $I = I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha \sin x}\,dx$, $J = J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{e^x + \alpha \sin x}\,dx$; se deduce imediat că $I + \alpha J = \dfrac{\pi}{4}$, $\forall \alpha > 0$. Observăm că

$$IJ = \frac{\pi^2}{64\alpha} \Leftrightarrow I \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{4} - I\right) = \frac{\pi^2}{64}\alpha \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{8}.$$

Rămâne să demonstrăm că există un unic $\alpha > 1$ astfel ca $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{8}$. Fie $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$. Deoarece

$$I(\alpha_1) - I(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1) \int_0^{\pi/4} \frac{e^x \sin x}{(e^x + \alpha_1 \sin x)(e^x + \alpha_2 \sin x)}\,dx,$$

obţinem că $I(\alpha_1) > I(\alpha_2)$ şi $|I(\alpha_1) - I(\alpha_2)| \le \dfrac{\pi}{4}(\alpha_2 - \alpha_1)$, deci $\alpha \to I(\alpha)$ este o funcţie continuă strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

Fie $\alpha > 0$ şi $f_\alpha : \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \dfrac{e^x}{e^x + \alpha \sin x}$. Atunci

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha\sqrt{2}e^x \sin(x - \pi/4)}{(e^x + \alpha \sin x)^2} < 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right),$$

deci f_α este strict descrescătoare pe $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Aplicând teorema de medie integralei $I(1)$, obţinem că există $c \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ astfel ca

$$I(1) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^c}{e^c + \sin c} > \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\pi/4}}{e^{\pi/4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} > \frac{\pi}{7}\ . \tag{1}$$

Fie acum $\delta \in \left[0, \dfrac{\pi}{8}\right]$. Atunci

$$I(\alpha) = \int_0^{\delta} \frac{e^x}{e^x + \alpha \sin x}\,dx + \int_\delta^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha \sin x}\,dx \le \delta + \left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \frac{e^\delta}{e^\delta + \alpha \sin \delta}.$$

Pentru $\alpha \to \infty$ obţinem că $\lim\limits_{\alpha\to\infty} I(\alpha) \le \delta < \dfrac{\pi}{8}$. Ţinând seama de (1), de continuitatea lui $I(\alpha)$ şi de stricta sa monotonie, obţinem că există un unic $\alpha > 1$ astfel ca $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{8}$, de unde obţinem concluzia problemei.

Probleme propuse

Clasele primare

P.54. Calculaţi a şi b dacă $46 - a = 36 + a$ şi $b - 3 = 17 - b$.
(*Clasa I*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

P.55. În câte moduri pot fi aranjate în linie dreaptă 9 mingi roşii şi una galbenă?
(*Clasa I*) **Georgiana Ciobanu, elevă, Iaşi**

P56. Cu cinci ani în urmă, suma vârstelor a trei copii era de 11 ani. Care va fi suma vârstelor aceloraşi copii peste 6 ani?
(*Clasa a II-a*) **Înv. Rodica Rotaru, Bârlad**

P.57. În câte moduri pot fi împărţiţi 8 băieţi în două echipe de câte 4 jucători, dacă Petru vrea să fie în echipă cu Mihai şi Dan, dar nu vrea să fie cu Avram?
(*Clasa a II-a*) **Adina Dohotaru, elevă, Iaşi**

P. 58. Să se arate că suma $1 + 4 + 7 + \ldots + 100$ împărţită la 3 dă restul 1.
(*Clasa a III-a*) **Alexandru - Gabriel Tudorache, elev, Iaşi**

P.59. Fie a şi b două numere consecutive. Suma acestor numere împreună cu numerele obţinute mărind cu 12 fiecare dintre vecinii lor este 939. Care sunt cele două numere?
(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.60. Din 16 bile, una este mai grea decât celelalte 15, care au mase egale. Care este cel mai mic număr de cântăriri prin care se poate stabili bila mai grea?
(*Clasa a III-a*) **Carmen Ciolacu, elevă, Iaşi**

P.61. Suma a două numere este un număr de două cifre al căror produs este 3. Diferenţa dintre cele două numere este 7. Care sunt cele două numere?
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.62. Două ceasuri au început să funcţioneze la aceeaşi oră. Se constată că la fiecare 30 minute (faţă de ora exactă) unul rămâne în urmă cu un minut iar celălalt avansează cu un minut. La un moment dat orele indicate de aceste ceasuri sunt: 18 h 36 min şi 19 h 24 min. La ce oră au început să funcţioneze?
(*Clasa a IV-a*) **Felicia Amihăiesei, elevă, Iaşi**

P.63. Alege un număr format din trei cifre. Scrie la dreapta lui un număr format din două cifre. Scoate din numărul format de 99 ori numărul format din trei cifre. Din rezultat scoate diferenţa dintre numărul de trei cifre şi numărul de două cifre şi scrie rezultatul. Eu îţi ghicesc numărul format din două cifre. Cum se explică acest lucru?
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.41. Fie a număr natural compus astfel încât dacă $p \mid a$, cu p prim, atunci $p + 1 \mid a$. Să se arate că $12 \mid a$ şi să se afle cel mai mare număr a de trei cifre.

Ciprian Baghiu, Iaşi

V.42. Se dau numerele $\overline{xy}$, $\overline{ab}$ scrise în baza 10 astfel încât $\overline{xy}$ divide $\overline{ab}$. Să se arate că $x = y$ dacă şi numai dacă $a = b$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

V.43. Să se afle cifrele a şi b ştiind că $a \cdot b = \overline{cd}$ şi $a^b = \overline{dc}$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

V.44. Să se afle $x, y, z \in \mathbb{Q}_+^*$ pentru care $x^n = yz$, $y^n = xz$, $z^n = xy$, cu $n \in \mathbb{N}$.

N. N. Hârţan, Iaşi

V.45. Se dau şase urne, unele conţinând bile. Fie operaţia: se aleg trei urne şi se pune câte o bilă în fiecare dintre ele.

a) Compoziţia urnelor fiind $0, 0, 4, 6, 6, 8$, să se indice o succesiune de operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

b) Compoziţia urnelor fiind $0, 1, 2, 3, 4, 4$, să se arate că nu există o succesiune de operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.41. Pe opt cartonaşe sunt înscrise câte unul din numerele 1, 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 3^3, 3^4. Dacă $P(k)$ este probabilitatea ca, extrăgând două cartonaşe, numerele obţinute să aibă în total k divizori distincţi, să se rezolve inecuaţia $P(k) \geq 1/7$.

Dumitru Dominic Bucescu, Iaşi

VI.42. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ pentru care $84x + 91y + 98z = 2002$. Să se afle valoarea maximă a sumei $x + y + z$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

VI.43. Fie $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^*$ pentru care $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\exists i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, astfel încât $a_k = a_i + a_j$. Să se arate că $n \geq 6$.

Petru Asaftei, Iaşi

VI.44. Fie $ABCD$ un paralelogram şi MAB, NAD triunghiuri echilaterale construite în exteriorul acestuia. Demonstraţi că $[MN] \equiv [BD]$ dacă şi numai dacă $ND \parallel MB$.

Ciprian Baghiu, Iaşi

VI.45. Fie E, F picioarele înălţimilor din B şi C ale triunghiului ascuţitunghic ABC. Dacă P, N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, iar $\{Q\} = PE \cap FN$, să se arate că $m(\widehat{PQF}) = \left|180^\circ - 3 \cdot m(\widehat{A})\right|$. (*În legătură cu Q1086 din* ***Parabola****, nr. 3/2000*)

Titu Zvonaru, Bucureşti

Clasa a VII-a

VII.41. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $\dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1} = 1$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

VII.42. Să se arate că $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geq (|a|+|b|)(|b|+|c|)(|c|+|a|)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

VII.43. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ numărul de reprezentări distincte ale lui n ca sumă de două numere naturale ($n = a + b$ şi $n = b + a$ constituie aceeaşi reprezentare). Să se arate că:

a) $s(m+n) = s(m) + s(n) - \dfrac{1}{2}\left[1 + (-1)^{mn}\right]$; *b*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s(k) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Petru Minuţ, Iaşi

VII.44. Fie $[AB]$ diametru al cercului $\mathcal{C}$ de centru $O, N, M \in \mathcal{C}$ astfel încât $m(\widehat{AON}) = 36°$, iar $[OM$ este bisectoare pentru $\widehat{NOB}$. Dacă T este simetricul lui O faţă de MN, să se arate că proiecţia lui T pe AB este mijlocul lui $[AO]$.

Valentina Blendea, Iaşi

VII.45. Fie $\triangle ABC$ echilateral, iar $P \in (BC)$. Notăm cu D, E simetricele lui P faţă de AC, respectiv AB. Să se arate că dreptele AP, BD şi CE sunt concurente.

Constantin Cocea şi Julieta Grigoraş, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.41. Fie f_1, f_2, f_3 funcţii liniare ale căror grafice sunt drepte concurente două câte două. Cele trei drepte sunt concurente dacă şi numai dacă există unic $\beta \in \mathbb{R}$ şi există $u \neq v \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\frac{f_1(u) - \beta}{f_1(v) - \beta} = \frac{f_2(u) - \beta}{f_2(v) - \beta} = \frac{f_3(u) - \beta}{f_3(v) - \beta}, \quad \text{cu} \quad f_i(v) \neq \beta, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

VIII.42. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx}} + \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{xz}}{\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz}} +$$
$$+ \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz}}{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz}} \leq 2.$$

Lucian Tuţescu, Craiova

VIII.43. Dacă un triunghi dreptunghic are laturile numere naturale, iar suma catetelor este pătrat perfect, atunci suma cuburilor catetelor este sumă de două pătrate.

Andrei Nedelcu, Iaşi

VIII.44. Pe laturile $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ şi $[BD]$ ale tetraedrului $ABCD$ se iau respectiv punctele M, N, P, Q, R, S astfel ca $\frac{BP}{BC} = \frac{AQ}{AD}$, $\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC}$, $\frac{AR}{AC} = \frac{DS}{BD}$. Notăm cu V_1, V_2, V_3, V_4, V respectiv volumele tetraedrelor $AMRQ$, $BPMS$, $CPNR$, $DNQS$ şi $ABCD$. Să se arate că $2^{12}V_1V_2V_3V_4 \leq V^4$.

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

VIII.45. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k$ puncte pe un cerc $\mathcal{C}$. Să se determine o condiţie necesară şi suficientă pentru a putea înscrie în $\mathcal{C}$ un poligon regulat cu n laturi, ce admite punctele date ca vârfuri (nu neapărat consecutive).

Irina Mustaţă, elevă, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.41. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, notăm cu $u_2(n)$ numărul format din ultimele două cifre ale lui n. Să se arate că:

a) $u_2\left(a^{20k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{4, 5, \ldots, 23\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{2, 3, 8\}$;
b) $u_2\left(a^{10k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 11\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{4, 9\}$;
c) $u_2(5^n) = 25$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
d) $u_2\left(6^{5k+p}\right) = u_2(6^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 6\}$, $k \in \mathbb{N}$;

e) $u_2\left(7^{4k+p}\right)=u_2\left(7^p\right)$, $p\in\{2,3,4,5\}$, $k\in\mathbb{N}$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.42. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

a) Dacă $|abc|>1$, să se arate că unul dintre numere este mai mare în modul ca 1, iar altul mai mic în modul ca 1.

b) Să se afle numerele dacă $|abc|=1$.

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

IX.43. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, iar $a\in(1,\infty)$. Ştiind că

$$f\left(x^2+ax-a\right)\geq f^2\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)+1,\quad \forall x\in(-\infty,0),$$

să se arate că f nu este injectivă.

Titu Zvonaru, Bucureşti

IX.44. Dacă $\triangle ABC$ este ascuţitunghic, să se găsească maximul expresiei $E=\sin A\cdot\sqrt{\cos A}+\sin B\cdot\sqrt{\cos B}+\sin C\cdot\sqrt{\cos C}$.

Cezar Lupu, elev, şi Tudorel Lupu, Constanţa

IX.45. Demonstraţi că $\triangle ABC$ în care are loc egalitatea

$$\sum\frac{h_ah_bm_c}{m_am_bm_c+h_ah_bm_c+m_am_bi_c}=1,$$

suma fiind obţinută prin permutări circulare, iar notaţiile fiind cele uzuale, este echilateral.

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

Clasa a X-a

X.41. Prove the inequality $\dfrac{F_{2n}^2}{F_{n-1}\cdot F_n}\leq\dbinom{2n}{n}$, where the Fibonacci numbers F_n are defined by $F_0=F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $n\geq 1$.

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Muntenegro

X.42. Să se rezolve ecuaţia $2^{[x]}+6^{[x]}+7^{[x]}=3^{[x]}+4^{[x]}+8^{[x]}$.

Daniel Jinga, Piteşti

X.43. Fie f o funcţie reală nenulă cu proprietatea că

$$f(x+y-xy)=f(x+y)-f(x)f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Să se calculeze $f\left(\dfrac{2003}{2002}\right)$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

X.44. Urnele $U_1,U_2,\ldots,U_n$ conţin fiecare câte a bile albe şi b bile negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă care se depune într-o altă urnă U. Din urna U se scoate o bilă şi se constată că este albă. Care este compoziţia cea mai probabilă a urnei U?

Petru Minuţ, Iaşi

X.45. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC. Să se arate că există un triunghi $A'B'C'$ astfel încât $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$, $C'\in(AB)$, iar $m(\widehat{AC'B'})=$ $=m(\widehat{BA'C'})=m(\widehat{CB'A'})=\alpha\in(0,90]$. Dacă în plus $\triangle ABC$ este echilateral, să se calculeze lungimile laturilor $\triangle A'B'C'$ în funcţie de $a=BC$ şi α. (*În legătură cu o problemă propusă la* ***O. N. M.****, 2002*)

Dan Popescu, Suceava

Clasa a XI-a

XI.41. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\sum\limits_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(k)} = I_n$, unde S_k este mulţimea permutărilor de ordin k. Să se arate că $n \,\vdots\, k!$.

Vladimir Martinuşi, Iaşi

XI.42. Prin punctele M_1 şi M_2 ale unei elipse se duc normalele la elipsă, care intersectează una din axele de simetrie ale acesteia în M_1', respectiv M_2'. Să se arate că mediatoarea segmentului $[M_1M_2]$ trece prin mijlocul lui $[M_1'M_2']$. Rămâne proprietatea adevărată pentru hiperbolă sau pentru parabolă?

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.43. Considerăm şirul de funcţii $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx + \ln x - (n-1)$ şi fie x_n soluţia unică a ecuaţiei $f_n(x) = 0$. Să se calculeze limitele şirurilor $(x_n)_{n \geq 1}$ şi $((x_n)^n)_{n \geq 1}$.

Angela Ţigăeru, Suceava

XI.44. Să se determine funcţiile continue $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ pentru care $f(x) = f\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 1}\right)$, $\forall x > 0$.

Marian Ursărescu, Roman

XI.45. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ cu $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Definim $x_n = \sqrt[n]{b_1 a_1^n + b_2 a_2^n + \ldots + b_k a_k^n}$.

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a_k$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} n(x_n - a_k) = a_k \ln b_k$;

c) Dacă $b_k = 1$, are loc $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\dfrac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n (x_n - a_k) = a_k b_{k-1}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.41. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{(1+x)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^n}}\,dx$, unde $x \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Oana Marangoci, studentă, Iaşi

XII.42. Fie $f\colon \left[\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care $\displaystyle\int_\pi^{\frac{5\pi}{4}} f(x) \sin 2x\, dx = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că există $c \in \left(\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ astfel încât $f(c) \in (1, 2)$.

Mihai Haivas, Iaşi

XII.43. Să se arate că

$$1 - \frac{\ln a}{3} \leq \int_0^1 a^{-x^2}\, dx \leq \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\ln a}}{\sqrt{\ln a}}, \quad \forall a > 1.$$

Petru Răducanu, Iaşi

XII.44. Să se afle numărul rădăcinilor reale ale polinomului $P \in \mathbb{Z}[X]$ de grad minim, care admite rădăcina $\alpha^2 + \alpha$, unde α verifică ecuaţia $x^3 - x + 1 = 0$.

Laurenţiu Modan, Bucureşti

XII.45. Fie $\sigma \in S_5$. Să se arate că σ^2 are puncte fixe dacă şi numai dacă σ^3 are puncte fixe.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G46. Determinaţi ultimele cinci cifre ale numărului

$$A = 7^{2000} + 7^{2001} + 7^{2002} + 7^{2003}.$$

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

G47. Determinaţi valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care soluţiile sistemului

$$x = a\,\frac{y}{y+1}\ ;\quad y = b\,\frac{x}{x+1}$$

sunt în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G48. Fie $A \subset (0, \infty)$ o mulţime care conţine $\dfrac{2002}{2003}$ şi având proprietatea că, dacă $\dfrac{a}{b} \in A$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$, atunci $\dfrac{a+1}{b} \in A$ şi $\dfrac{a}{2b} \in A$. Să se arate că $A \supseteq \mathbb{Q}_+^*$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G49. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} \leq (n+2)\,m$, iar $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \leq \dfrac{n+4}{4}\,M^2$, unde $m = \min x_i$, $M = \max x_i$. Să se arate că exact n dintre numerele date sunt egale.

Eugen Jecan, Dej

G50. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 3$. Să se arate că

$$\left[\sqrt{an+1}\right] = \left[\sqrt{an+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{an+a-1}\right],\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow\ a \in \{3, 4\}.$$

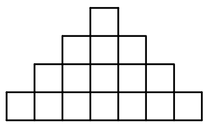
Ovidiu Pop, Satu Mare

G51. Fie $a, b, c \in \left[\dfrac{3}{10}, \infty\right)$ cu $a + b + c = 1$. Să se arate că

$$\frac{2}{3} \leq a\sqrt{a+bc} + b\sqrt{b+ca} + c\sqrt{c+ab} < \frac{3}{4}\ .$$

Gabriel Dospinescu, elev, Oneşti

G52. Se consideră o piramidă formată din pătrate 1×1, având n trepte, pe treapta k existând $2k - 1$ pătrate (în figură, $n = 4$). Aflaţi numărul minim de dreptunghiuri, fiecare alcătuit numai din căsuţe întregi, în care poate fi împărţită tabla.



Adrian Zahariuc, elev, Bacău

G53. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 70. Să se arate că există o mulţime de pătrate $\mathcal{P}_k = \left\{A_iB_iC_iD_i \mid A_iB_i = i,\ i = \overline{1,k}\right\}$ care să aibă suma ariilor egală cu aria pătratului dat. Putem acoperi pătratul $ABCD$ cu elementele mulţimii $\mathcal{P}_k$?

Petru Asaftei, Iaşi

G54. Să se arate că nu putem alege nici un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC de latură $l \leq 10$, care să aibă distanţele la vârfuri numere prime distincte.

Doru Buzac, Iaşi

G55. Printr-un punct situat în interiorul unui tetraedru se duc planele paralele cu feţele tatraedrului. Dacă V_1, V_2, V_3, V_4 sunt volumele tetraedrelor unic determinate de aceste plane, iar V este volumul tetraedrului dat, să se arate că

$$V \leq 16\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right).$$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

B. Nivel liceal

L46. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$ se intersectează într-un punct situat pe latura $[CD]$. Să se arate că $CD = AD + BC$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

L47. Dacă un triunghi are pătratele laturilor în progresie aritmetică, atunci simetricul centrului de greutate faţă de latura mijlocie se află pe cercul circumscris triunghiului.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

L48. Fie R, r, R_1 raza cercului circumscris $\triangle ABC$, raza cercului înscris $\triangle ABC$, respectiv raza cercului circumscris $\triangle DEF$ determinat de picioarele bisectoarelor interioare ale $\triangle ABC$. Să se arate că $R/2 \geq R_1 \geq r$.

Marian Tetiva, Bârlad

L49. Într-un pătrat 10×10 se înscriu numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ în aşa fel încât oricare două numere consecutive să se afle în căsuţe vecine. Demonstraţi că există o linie sau o coloană ce conţine măcar două pătrate perfecte.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

L50. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică având $a_1 = 5$, $r = 2002$. Pentru un element b al progresiei, să se arate că b^m aparţine progresiei dacă şi numai dacă $60 \mid m - 1$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

L51. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice care comută şi pentru care $\det\left(A^2 + B^2\right) < < (\det A + \det B)^2$. Să se arate că $xA + yB$ este matrice nesingulară, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

Cătălin Calistru, Iaşi

L52. Fie $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de grad m având rădăcinile distincte. Să se determine cardinalul mulţimii

$$E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ a. î. } Q(A) = O_n \text{ şi } P(X) = \det(XI_n - A)\}.$$

Ovidiu Munteanu, Braşov

L53. Fie $n \geq 2$ şi $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu n^2 elemente, care are cel mult $n - 2$ divizori ai lui zero. Să se arate că A este corp.

Gabriel Dospinescu, elev, Oneşti

L54. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivata continuă pentru care $f(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$. Să se determine funcţiile continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac identitatea

$$f(x)\left[\int_0^y \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(y)\right] = f(y)\left[\int_0^x \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(x)\right], \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

unde $a \neq 0$ este o constantă dată.

Adrian Corduneanu, Iaşi

L55. Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin $x_0 = \dfrac{a-1}{\ln a}$; $x_n = \dfrac{a}{\ln a} - -\dfrac{n}{\ln a}\, x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Premii acordate de FUNDAŢIA POIANA

Fundaţia Poiana, prin d-l **Dan Tiba**, pune la dispoziţia revistei *"Recreaţii matematice"* suma de 100 € care se constituie ca fond de premii acordate elevilor - colaboratori care se disting prin calitatea *articolelor*, *notelor* şi *problemelor originale* apărute în paginile revistei.

Redacţia revistei decide premierea cu câte **1 000 000 lei** a următorilor elevi:

1. DOSPINESCU Gabriel (*Liceul "D. Cantemir", Oneşti*)
– Combinatorică . . . algebrică (RecMat 2/2003, 19–22),
– probleme propuse: G.51, L.53;

2. PACHIŢARIU Marius (*Colegiul Naţional, Iaşi*)
– Câteva aplicaţii ale teoremei lui Casey (RecMat 1/2003, 30–31),
– probleme propuse: IX.37, IX.42;

3. CÂRJĂ OANA (*Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi*)
– Aplicaţii ale rotaţiei planului complex (RecMat 2/2002, 21–23),
– Un procedeu de calcul al limitelor unor şiruri de forma $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$ (RecMat 2/2003, 23–24).

Premiile se pot ridica direct de la redacţie sau pot fi trimise prin mandat poştal.

Premii acordate rezolvitorilor

Pentru apariţia de trei ori la rubrica *"Pagina rezolvitorilor"* redacţia revistei *"Recreaţii matematice"* acordă o **diplomă** şi un **premiu** în cărţi elevei

SOFICU Crina Maria (*Şcoala nr.3 "Al. Vlahuţă", clasa a IV-a, Iaşi*):
– RecMat 1/2002 (6 pb), 2/2002 (6 pb), 1/2003 (5 pb).

Cărţile au fost oferite de către

Editura *PARALELA 45*

Pagina rezolvitorilor

BOTOŞANI

Şcoala nr. 7 "Octav Băncilă". **Clasa a VIII-a.** NEGRESCU Alexandru: VI(31, 37), VII(31,36,38), VIII(31,33,37), IX.31, G(23,26,27,33,38-41).

CRAIOVA

Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti". **Clasa a V-a.** AL KHATIB Anne Marie: P(51,53), V(36,37,39); BAZĂ-VERDE Daniela: P(50-53), V.36; DECA Alexandra Maria: P(51-53), V(37,40); PĂTRAŞCU Andrada: P(50-53), V.37. **Clasa a VI-a.** POPESCU Mihnea: V.37, VI(37-40). **Clasa a VII-a.** VASILE Teodor: VI(37-40), VII(39,40).

Şcoala nr. 22 "M. Eliade". **Clasa a III-a** (înv. STAICU Angela). STANCIU Ioan: P(44-50,52,53).

IAŞI

Colegiul Naţional. **Clasa a VII-a.** COŞBUC Mircea: VI(36-40), VII(37-40), VIII.37; IANUŞ Andrada: VI(36-39), VII.40; PRELIPCEAN Cristina: VI(37,38,40), VII(36-40), G.40. **Clasa a VIII-a.** ANDRIEŞ Delia: VI(36-39), VII.36, G.40; APETROAEI Georgiana: VII(36,39,40), VIII(39,40); BALAN Doru: VI(36,39), VII.38, VIII.40, G.40; BALANIUC Dragoş: VI(36-38,40), VII.39; BĂTRÂNU Mădălina: VI(36-40), VII(36,39), VIII.37; BELCESCU Cosmin Cezar: VI(37,38), VII(36-38,40); CHELSĂU Ariel: VI(37,38), VII(36,38,39); CHIRUŢA Marta: VI(36,38), VII(36,38-40), VIII.37; CHITIC Ionuţ: VI(36,38,40); VII(36-39); VIII.37; CONSTANTIN Diana: VII.39, VIII(37-40); CROITORU Cosmina: VI(36-39), VII(36, 38), VIII.36, G(37,40,42); DOBRILĂ Tudor: VI(36,38,40), VII(38,40), VIII.39; DODEA Andreea: VI.40, VII(38,40), VIII.36, G.40; FĂLTICEANU Paul: VI(36-40), VII.40; FLORESCU Darian: VI(37-40), VII(36,38,40); GRĂDINARIU Ioana Alexandra: VII(36,39,40), VIII(37,38); GRĂDINARU Andrei: VI(36,37,39,40), VII(39, 40); ILIESCU Alca-Iolanda: VI(36,38,39), VII.39, VIII.37; LUCA Paul: VI(36-38), VII(38-40); MACUC Andra: VI(36-39), VII.39; MATEI Silvia: VII(36-40), VIII.37; MARARI Cezarina: VI(36-38), VII(36,37,39); MARTINUŞ Luciana: VII(36-39), G.40; SAVENCU Ramona-Irina: VI(36-38), VII.39, VIII.37; TOMESCU Sebastian: VI(36,38-40), VII.36; TUCALIUC Vlad: VI(36,38,40), VII(38-40); ŢURCANU Roxana: V.37, VI(36,38), VII(38,40); VÂNTU Călin: VII(36-40), VIII.40; ZANOSCHI Delia: VI(36,39, 40), VIII(36,38); ZANOSCHI Iulia: VI(36,38), VII.38, VIII(36,38). **Clasa a IX-a.** PACHIŢARIU Marius: VIII(36-40), IX(36-40), X(37-40), G(36,38, 41,42), L(36,39). **Clasa a X-a.** MUSTAŢĂ Irina: VIII(36-38,40), IX(36-40), X(36-38), XII.36.

Colegiul Naţional "C.Negruzzi". **Clasa a V-a.** HARAGA Anca-Elena: P(50-52), V(37,38), VI(37,38). **Clasa a VII-a.** DICU Ciprian-Dinu: VI(38,39), VII(36-38). **Clasa a X-a.** BEJINARIU Alexandru: VIII(31-35), IX(32-35), X(31-33), G(23,25,26,28,30,32,33).

Liceul "Garabet Ibrăileanu". **Clasa a IV-a** (înv. LISNIC Sebastian). TIBA Marius P(47-53). **Clasa a VI-a.** BUDEANU Ştefana: P(52,53), V(37,39), VI.38; LUCA Matei: P(52,53), V(37,39), VI.38; PLACINSCHI Oana: P(41,42,50), V(31,33). **Clasa a VIII-a.** TĂNASE Ioana: VI(37-40), VII.40, VIII.40.

Liceul Teoretic "M.Eminescu". **Clasa a V-a.** CIURARU Ionela: P(42,43,50-53), V(31,33,37-39); MAŞTALERU Alexandra: P(50,52), V(36,37,39).

Şcoala nr. 17 "I. Creangă". **Clasa a VII-a.** IFTODE Andreea: VI(33-35), VII.32, IX.31; PAULIN Ana Maria: VI(33-35), VII(31,32,34); SOFRONEA Gabriela: VI(33-35), VII(31,32); TANANA Irina-Eliza: VI(33-35), VII(31,32).

Şcoala "G.Coşbuc". **Clasa a II-a** (înv. GALIA Paraschiva). ALUPEI Andra: P(37,44-47); CIOABĂ Oana-Cătălina: P(37,44-47); GHERCĂ Cătălin: P(37,44-47); HOMEA Liviu: P(37,44-47); HUIDEŞ Gina: P(37,44-47); IGNAT Andrei: P(37,44-47); MIHĂILESCU Laura: P(37,44-47); PISICĂ Alexandru: P(37,44-47); SCUTARU Constantin: P(37,44-47). **Clasa a II-a** (înv. RACU Maria). BARABULĂ Ioana: P(37, 44-47); BULGARU Ionela: P(37, 44-47); CALOIAN Andrei: P(37, 44-47); CĂLIN Georgiana: P(37, 44-47); CRĂCIUN Mădălina: P(37, 44-47); IFROSĂ Adriana: P(37, 44-47); IOJĂ Petru-Alexandru: P(34,44-47); LEAGĂN Crina-Alexandra: P(37, 44-47); MOISA Bogdan: P(37, 44-47); PINTILIE Răzvan: P(37, 44-47); RUSU Flavia: P(37, 44-47).

Şcoala "Alexandru cel Bun". **Clasa a II-a** (înv. SPÂNU Doiniţa). BURLACU Ionuţ-Mihai: P(44-47,53); DAMIAN Daniel: P(44-47,53); FLOREA Roxana-Maria: P(44-47,53); FURTUNĂ Marta: P(44-47,53); IFTENIE Ioana-Cătălina: P(44-47,53); RUSU Alexandru: P(44-47,53); URSU Gina-Ioana: P(44-47,53).

Şcoala "N.Tonitza". **Clasa I** (înv. TUDOSE Elena). ANCHIDIN Alexandru: P(33,34,44-46); CÂRNU Alina: P(33,34,44-46); DOBRIN Diana: P(33,34,44-46); LEONTE Anca: P(33,34,44-46); POSTICĂ Simona: P(33,34,44-46); ROTARIU Larisa-Maria: P(33,34,44-46). **Clasa I** (înv. MELINTE Rodica). BACIU Ciprian: P(33,34,44-46); BÂRZU Constantin: P(33,34,44-46); BOTOŞANU Bianca-Mihaela: P(33,34,44-46); BUZDUGAN Petru-Cătălin: P(33,34,44-46); CEUCĂ Dănuţ-Vasilică: P(33,34,44-46); CONSTANTINESCU Diana-Gabriela: P(33,34,44-46); CUCUTEANU Paul-Cătălin: P(33,34,44-46); GUŞOVATE Diana-Ştefana: P(33,34,44-46); LEOGAN Larisa-Diana: P(33,34,44-46); MIRON Vlad-Ştefan: P(33,34,44-46); MOTAN Geanina-Diana: P(33,34,44-46); ROTARIU Marian: P(33,34,44-46); SUCIUC Raluca: P(33,34,44-46); TEIU-COSTIN Andra: P(33,34,44-46). **Clasa a III-a** (înv. MARCU Monica). BUTNARU Valentin: P(44-49); ONUŢĂ Alin: P(44-49).

Şcoala "B.P.Haşdeu". **Clasa I** (înv. TÂRZIORU Iuliana). ADĂSCĂLIŢEI Victor: P(33,34,44-46); BALAN Andrei: P(33,34,44-46); CUBERSCHI PAUL: P(33-35,44-46); EŞANU Georgiana: P(33,34,44-46); GREIEROSU Claudiu: P(33,34,44-46); LĂMĂTIC Ioana: P(33-35,44-46); REBEGEA Andrada: P(33,34,44-46). **Clasa I** (înv. TUTU Laura). BUHU Vlad: P(33,34,44-46); BUZĂ Eduard-Andrei: P(33,34,44-46); CHICHIRĂU Alexandra-Elena: P(33,34,44-46); GURĂU Raluca-Claudia: P(33,34,44-46); HATESCU Iustina: P(33,34,44-46); NĂSTASE Andrei: P(33,34,44-46); SIMIRAD Andrei: P(33,34,44-48). **Clasa a IV-a** (înv. ŞTEFAN Liviu). PINTILIE Liviu: P(44-53); PINTILIE Nicoleta: P(44-53); ŞTERBULEAC Daniel: P(44-53).

Şcoala "T.Maiorescu". **Clasa a III-a** (înv. CHIRILĂ Beatrice). TUDORACHE Alexandru-Gabriel: P(44-53).