Anul XI, Nr. 1 Ianuarie – Iunie 2009

RECREAŢII MATEMATICE

REVISTĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVI ŞI PROFESORI

$$e^{i\pi} = -1$$

Asociaţia "Recreaţii Matematice"
IAŞI - 2009

Semnificaţia formulei de pe copertă:

Într-o formă concisă, formula $e^{i\pi}=-1$ leagă cele patru ramuri fundamentale ale matematicii:

ARITMETICA	reprezentată de 1
GEOMETRIA	reprezentată de π
ALGEBRA	reprezentată de i
ANALIZA MATEMATICĂ	reprezentată de e

TIPĂRITĂ LA SL&F IMPEX IAŞI
Bd. Carol I, nr. 3-5
Tel. 0788 498933
E-mail: simonaslf@yahoo.com

ISSN 1582 - 1765

O sută de ani de la naşterea Academicianului Nicolae Teodorescu

Am ales matematica dintr-un îndemn lăuntric, pentru că mă atrăgeau orizonturile abia întrevăzute ale acestei ştiinţe cu adânci rădăcini în realitate şi cu aripi neasemuite pentru zborul minunat spre adevărul şi frumosul universal. (**N. Teodorescu**)

Istoria matematicii româneşti îl aşează pe **Nicolae Teodorescu** printre marii continuatori ai celor care au pus bazele învăţământului şi cercetării matematice din ţara noastră: *Spiru Haret*, *M. Davidoglu*, *Gh. Ţiţeica*, *Tr. Lalescu*, *D. Pompeiu*, *Al. Myller*, *O. Onicescu* ş.a.

Nicolae Teodorescu a adus o contribuţie importantă la crearea şcolii matematice româneşti, fiind unul dintre marii matematicieni de la mijlocul secolului trecut care au predat la Facultatea de matematică a Universităţii din Bucureşti: *S. Stoilow*, *Gr. Moisil*, *M. Nicolescu*, *Gh. Mihoc*, *V. Vâlcovici*, *Gh. Vrănceanu*, *C. Iacob*, *Al. Ghika* ş.a.

S-a născut la 18 iulie 1908, în Bucureşti. A urmat cursurile Liceului "Spiru Haret" trecând bacalaureatul în 1926, la Seminarul pedagogic "Titu Maiorescu". În perioada liceului rezolvă probleme la *"Gazeta Matematică"*, *"Revista matematică din Timişoara"*, *"Curierul matematic"*, *"Vlăstarul"* şi publică note matematice privind gradul unui polinom, dreapta lui Simson şi poziţia rădăcinilor trinomului de gradul al doilea. Este licenţiat al secţiei de matematică de la Facultatea de ştiinţe a Universităţii Bucureşti, din 1929. În 1931, susţine la Paris teza de doctorat *La derivée aréolaire et ses applications à la Physique mathématique* în faţa unei comisii formată din *Henri Vilat*, specialist în mecanica fluidelor (preşedinte), *Armand Denjoy,* reprezentant de seamă al şcolii franceze de teoria funcţiilor, şi *H. Béyghin*, la lucrările comisiei fiind invitat şi *Dimitrie Pompeiu.* Apreciind valoarea deosebită a lucrării, comisia îl propune pe un post de profesor universitar în Maroc (care făcea parte din Imperiul francez). Se întoarce în România unde devine, în 1931, asistentul acad. *Octav Onicescu* la catedra de macanică şi este numit profesor la Şcoala de conductori arhitecţi şi Institutul de statistică şi actuariat condus de acad. *Gheorghe Mihoc.*

Nicolae Teodorescu a fost numit profesor titular la Catedra de geometrie descriptivă de la Facultatea de arhitectură a Institutului Politehnic Bucureşti, în 1942. A funcţionat ca şef de catedră la Universitate, Institutul Politehnic şi Institutul de Construcţii din Bucureşti.

A iniţiat şi dezvoltat predarea disciplinei ecuaţiile fizicii matematice şi a scris un curs, ce a apărut în cinci ediţii succesive (1956-1978).

A fost membru fondator al Institutului de Matematică al Academiei Române. În 1955 devine membru corespondent, iar din 1973 membru titular al Academiei Române.

A fost decan al Facultăţii de matematică-mecanică de la Universtatea Bucureşti (1960-1972) şi director al Centrului de calcul de la Universitatea Bucureşti.

Nicolae Teodorescu s-a ocupat în teza de doctorat şi în lucrări ulterioare de noţiunea de derivată areolară introdusă de *Dimitrie Pompeiu* în a doua decadă a secolului trecut. Înlocuieşte definiţia clasică a noţiunii de derivată areolară cu o definiţie bazată pe teoria integralei Lebesgue, iniţiind aplicaţiile acestei teorii în mecanică, geometrie diferenţială şi diverse generalizări. Este unul dintre primii matematicieni care utilizează noţiunea de soluţie slabă (sau generalizată), în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. A avut contribuţii deosebite în teoria propagării undelor, teoria fronturilor de undă, matematizarea principiului lui *Huygens.* Este primul matematician care a sesizat importanţa utilizării *spaţiilor Finsler.* Rezultatele sale au fost aprofundate şi extinse de matematicieni ca *Vekua, Bitzadze* ş.a.

A fost *Doctor Honoris Causa al Universităţii din Caen, membru al academiilor din Palermo şi Mesina* (din 1967), *secretar general al Uniunii Balcanice a Matematicienilor* şi a fost decorat cu *Ordinul Metodiu şi Chiril* al Bulgariei.

Timp de peste 75 de ani, **Nicolae Teodorescu** a desfăşurat o activitate susţinută în cadrul Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. A fost vicepreşedinte al S.S.M. în perioada 1948-1973 (preşedinte fiind acad. *Grigore C. Moisil*), preşedinte al S.S.M. în perioada 1973-1995 şi preşedinte de onoare din 1995 până la stingerea sa din viaţă. În 1980 a înfiinţat Gazeta Matematică metodică şi metodologică, pentru profesori. A restructurat conţinutul Gazetei Matematice adăugând rubrici noi: informatică, concursuri, recenzii etc. A coordonat personal organizarea şi buna desfăşurare a olimpiadelor şcolare de matematică. Continuând tradiţia vechii Gazete Matematice, a organizat Concursul anual al rezolvitorilor. S-a preocupat de organizarea unor consfătuiri cu caracter metodic, metodologic şi ştiinţific pentru învăţători şi profesorii de matematică.

În 1975 a reorganizat Societatea de Ştiinţe Matematice prin înfiinţarea a 88 de filiale şi subfiliale cu un program riguros de perfecţionare ştiinţifică şi metodică. A coordonat apariţia, în Biblioteca S.S.M., a unui ciclu de culegeri de probleme şi cărţi cu caracter metodic.

Nicolae Teodorescu a fost un militant neobosit şi consecvent pentru o educaţie completă a tineretului, preocupându-se personal de conţinutul educativ al activităţilor organizate cu tinerii. Taberele de matematică erau organizate în localităţi al căror nume aveau o rezonanţă istorică, întotdeauna în judeţul Argeş, la Câmpulung Muscel sau Curtea de Argeş. Activităţile începeau cu un istoric al instituţiei şi oraşului gazdă şi expuneri privind istoria matematicii din România. Elevii aflându-se în vacanţă, activităţile matematice alternau cu acţiuni cultural educative şi distractive, cu excursii la numeroase obiective istorice din zonă: biserica ctitorită de Negru Vodă la descălecarea în Ţara Românească, mausoleul de la Rucăr şi alte locuri legate de faptele de vitejie ale ostaşilor români în primul război mondial.

La împlinirea unui secol de la naşterea lui **Nicolae Teodorescu**, personalitate complexă a matematicii româneşti, ne plecăm fruntea în faţa amintirii sale cu convingerea că este un model stimulator pentru tânăra generaţie de matematicieni.

Prof. dr. Petru MINUŢ

O problemă de colecţie

Marian TETIVA[1]

Priviţi cu atenţie mulţimile $\{0, 2, 4, 8\}$ şi $\{-1, 3, 5, 7\}$. Ce observaţi? Probabil că, la prima vedere, nu mare lucru (se vede doar că sunt două mulţimi de numere întregi cu acelaşi număr de elemente). Dar ele au o proprietate specială: toate sumele de câte două elemente dintr-una din aceste mulţimi coincid cu sumele de câte două elemente din cealaltă. (E vorba de sumele $0 + 2$, $0 + 4$, $0 + 8$, $2 + 4$, $2 + 8$, $4 + 8$ care sunt egale, într-o anumită ordine, cu $-1 + 3$, $-1 + 5$, $-1 + 7$, $3 + 5$, $3 + 7$, $5 + 7$.) Cu puţină răbdare puteţi constata că şi mulţimile, să zicem, $\{0, 2, 4, 8, 10, 14, 16, 18\}$ şi $\{-1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 19\}$ au aceeaşi proprietate (dar trebuie calculate mult mai multe sume). Se vede că mulţimile din primul exemplu au câte patru elemente, cele din cel de-al doilea - câte opt. Oare ce număr de elemente ar putea să aibă două mulţimi cu această proprietate? Răspunsul la această întrebare a fost dat, el spune că nu veţi găsi asemenea mulţimi nici cu trei, nici cu zece, nici cu o sută cincisprezece elemente, ci doar cu un număr de elemente care este putere a lui doi. Mai precis, are loc

Teorema 1 (Erdős-Selfridge). *Fie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ două colecţii distincte de numere reale astfel încât*

$$\{a_i + a_j :\ 1 \leq i < j \leq n\} = \{b_i + b_j :\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Atunci n este o putere a lui 2. Mai mult, pentru orice n putere a lui 2, se pot construi exemple de asemenea colecţii (fiecare având n elemente).

Să remarcăm că este vorba de mulţimi într-un sens mai larg decât cel obişnuit, anume, de "mulţimi" în care elementele se pot repeta - le-am numit (ca în [**3**]) *colecţii* (se foloseşte termenul *multisets* în limba engleză). Tot astfel se consideră şi colecţiile (iar nu mulţimile) sumelor de câte două elemente formate de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Astfel, se poate verifica uşor că, de pildă, colecţiile $\{0, 2, 2, 2\}$ şi $\{1, 1, 1, 3\}$ produc aceeaşi colecţie de sume, anume $\{2, 2, 2, 4, 4, 4\}$.

Puteţi găsi în [**3**, problema 4.26] acest rezultat, demonstraţia lui clasică (foarte cunoscută; o reluăm şi noi imediat) şi referirea la una din primele apariţii ale sale în literatură. Schiţăm pe scurt această soluţie, căci tot de la ea vom porni şi noi. Ideea principală este de a considera două funcţii

$$f(x) = x^{a_1} + \cdots + x^{a_n} \ \text{ şi } \ g(x) = x^{b_1} + \cdots + x^{b_n}$$

şi de a observa că ipoteza teoremei se transcrie în egalitatea

$$(f(x))^2 - f(x^2) = (g(x))^2 - g(x^2) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = f(x^2) - g(x^2).$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Apoi se scrie $f(x) - g(x) = (x-1)^k h(x)$, cu $h(1) \neq 0$ (adică se pune în evidenţă cea mai mare putere a lui $x - 1$ care divide diferenţa $f(x) - g(x)$), deci obţinem $f(x^2) - g(x^2) = (x-1)^k (x+1)^k h(x^2)$ şi apoi egalitatea decisivă

$$h(x)(f(x) + g(x)) = (x+1)^k h(x^2);$$

într-adevăr, pentru $x = 1$, aceasta ne furnizează concluzia: $2n = 2^k \Leftrightarrow n = 2^{k-1}$.

Exerciţiul 1. Demonstraţi partea a doua a teoremei, adică arătaţi cum, pentru n putere a lui 2, se pot construi două colecţii de câte n numere reale (fiecare) care produc colecţii egale de sume de câte două elemente.

Această demonstraţie are neajunsul că se aplică (în exact aceşti termeni) doar dacă numerele a_i şi b_i sunt întregi, pentru ca f şi g să fie polinoame în adevăratul înţeles al cuvântului (chiar şi atunci trebuie observat că proprietatea numerelor se păstrează dacă li se adună tuturor acelaşi număr, şi facem această operaţie, dacă e nevoie, pentru a le avea pe toate pozitive). Totuşi, câteva argumente simple din analiza matematică vor face demonstraţia acceptabilă chiar dacă avem de-a face cu numere reale oarecare (aşa cum arătăm mai jos). Ceea ce e foarte bine, căci, indiscutabil, avem în faţă o problemă foarte frumoasă cu o rezolvare pe măsură, care (ne-am gîndit noi) merită să fie reamintită din când în când şi (de ce nu?) să fie exploatată ceva mai mult. Asta intenţionăm să facem mai departe, anume să demonstrăm

Teorema 2. *Fie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ două colecţii distincte de numere reale astfel încât*

$$\{a_i + a_j : \ 1 \leq i < j \leq n\} = \{b_i + b_j : \ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Atunci n este o putere a lui 2 şi, dacă $n = 2^{k-1}$, avem

$$a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j,$$

pentru orice $0 \leq j \leq k-1$.

Demonstraţie. Folosim aceleaşi funcţii f şi g ca mai sus, despre care mai facem observaţia că sunt indefinit derivabile pe $(0, \infty)$. Deoarece $f(1) = g(1) (= n)$ se poate considera cel mai mic număr întreg pozitiv k astfel încât $f^{(j)}(1) = g^{(j)}(1)$ pentru orice $j = 0, 1, \ldots, k-1$ şi $f^{(k)}(1) \neq g^{(k)}(1)$ (indicele superior pus în paranteze arată, ca de obicei, ordinul de derivare).

Exerciţiul 2. Fie u o funcţie de k ori derivabilă cu derivata de ordinul k continuă într-o vecinătate a unui punct x_0 astfel încât $u^{(j)}(x_0) = 0$ pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$ şi $u^{(k)}(x_0) \neq 0$. Arătaţi că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u(x)}{(x - x_0)^k} = \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} \neq 0.$$

(Aceasta este o aplicaţie simplă a regulii lui l'Hospital, pe care o găsiţi în orice manual de analiză - de exemplu [**2**]. Observaţi analogia cu funcţiile polinomiale: se poate scrie $u(x) = (x - x_0)^k v(x)$ şi, dacă vrem ca funcţia v să fie continuă şi în x_0, valoarea ei în acest punct rezultă nenulă).

Acum să scriem egalitatea $(f(x))^2 - f(x^2) = (g(x))^2 - g(x^2)$ în forma

$$\frac{f(x)-g(x)}{(x-1)^k}(f(x)+g(x)) = \frac{f(x^2)-g(x^2)}{(x^2-1)^k}(x+1)^k$$

(desigur, pentru $x \neq 1$) şi să facem aici pe x să tindă la 1. Obţinem (folosind exerciţiul 2 pentru funcţiile $x \mapsto f(x) - g(x)$, respectiv $x \mapsto f(x^2) - g(x^2)$ şi, evident, $x_0 = 1$)

$$\frac{f^{(k)}(1)-g^{(k)}(1)}{k!}(f(1)+g(1)) = \frac{f^{(k)}(1)-g^{(k)}(1)}{k!}2^k$$

deci $2n = 2^k$, la fel ca şi în prima variantă de demonstraţie (cea mai cunoscută), graţie faptului că $f^{(k)}(1) \neq g^{(k)}(1)$. Ceea ce nu se spune de obicei când se face acea demonstraţie este că avem egalităţile $f^{(j)}(1) = g^{(j)}(1)$, adică

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i-1)\cdots(a_i-j+1) = \sum_{i=1}^{n} b_i(b_i-1)\cdots(b_i-j+1)$$

pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Acum se poate încheia demonstraţia cu câteva calcule algebrice simple; mai e nevoie doar să justificăm afirmaţia din

Exerciţiul 3. Egalităţile $f^{(j)}(1) = g^{(j)}(1)$ pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$ sunt echivalente cu $a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j$ pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Cititorul atent trebuie să aibă o nemulţumire: de unde ştim că, la un moment dat (asta însemnând pentru un anume k natural) avem $f^{(k)}(1) \neq g^{(k)}(1)$? De ce n-ar fi valorile derivatelor de acelaşi ordin ale funcţiilor f şi g în 1 egale oricare ar fi acest ordin? E clar că în această situaţie s-ar obţine $a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j$ pentru orice număr natural n (la fel ca mai sus), iar răspunsul la întrebare e dat de

Exerciţiul 4. Dacă pentru numerele reale $a_1, \ldots, a_n$ şi $b_1, \ldots, b_n$ avem

$$a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j$$

pentru $j = 1, \ldots, n$, atunci colecţiile $\{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ coincid.

Ori, tocmai asta e ideea: dacă avem două colecţii *distincte* care produc aceeaşi colecţie de sume de câte două, atunci numărul elementelor din fiecare colecţie este o putere a lui 2 (nu am mai spus, dar e aproape evident: două colecţii cu cardinale diferite nu pot produce aceeaşi colecţie de sume; considerarea aceluiaşi n ca număr de a-uri şi de b-uri este obligatorie). Iată de ce nu putem obţine la nesfârşit egalităţi de forma $a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j$, deci la un moment dat trebuie să avem $f^{(k)}(1) \neq g^{(k)}(1)$.

Şi acum chiar că am terminat. Ar mai fi poate de menţionat că exerciţiul 4 este o consecinţă firească şi aproape imediată a *formulelor lui Newton*, care pot fi găsite în orice manual de algebră (v. [**1**]).

Bibliografie

1. **A. Kostrikin** - *Introduction à l'algèbre*, Éditions Mir, Moscou, 1981.
2. **G. E. Şilov** - *Analiză matematică. Funcţii de o variabilă*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.
3. **Ioan Tomescu** - *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

Drepte concurente în conexiune cu punctele I, Γ, N

Temistocle Bîrsan[1]

1. Notaţii şi teoreme utilizate. Fie ABC un triunghi oarecare. Notăm cu D, E, F punctele de tangenţă a cercului înscris $\mathcal{C}(I, r)$ la dreptele BC, CA şi respectiv AB. Cu D_a, E_a, F_a notăm punctele de tangenţă a cercului exînscris $\mathcal{C}(I_a, r_a)$ cu aceleaşi drepte; notaţii similare relativ la cercurile exînscrise $\mathcal{C}(I_b, r_b)$ şi $\mathcal{C}(I_c, r_c)$. Mai notăm cu L_a, L_b, L_c picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor $\widehat{A}, \widehat{B}$ şi respectiv $\widehat{C}$.

Se ştie că *punctul lui Gergonne* (notat Γ) este punctul de concurenţă a dreptelor AD, BE şi CF (numite ceviene Gergonne), iar *punctul lui Nagel* (notat N) este punctul de concurenţă a dreptelor AD_a, BE_b şi CF_c (cevienele Nagel). În sfârşit, punctul Γ_a-unul dintre cele trei *puncte Gergonne adjuncte*–este punctul de intersecţie a dreptelor AD_a, BE_a şi CF_a.

În prezenta notă vom constata că dreptele ce trec prin picioarele unor ceviene şi sunt paralele la altele (dintre cele de mai sus) în cele mai multe din cazurile posibile sunt concurente.

În atingerea scopului, vom prelua neschimbat din **[1]** Propoziţia 2 şi varianta sa, Propoziţia 2′:

Teorema 1. *Dacă poziţiile punctelor M, N, P, Q, R, S din fig. 1 sunt precizate de rapoartele $m = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$, $n = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, $p = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$, $q = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$, $r = \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RA}}$, $s = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SB}}$, atunci dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă avem*

$$prs + mq + nr = mrs + np + rq, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ n & q & rs \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema 1′. *Dacă punctele M, N, P, Q, R, S din fig. 2 au poziţiile precizate de rapoartele $m = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$, $n = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, $p = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$, $q = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$, $r = \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$, $s = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SA}}$, atunci dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă avem*

$$qrs + ms + np = nrs + mq + ps, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & rs \\ n & q & s \end{vmatrix} = 0.$$

Următoarele două rezultate sunt consecinţe ale acestora.

Teorema 2. *Fie punctele M, N, P, Q, R, S ca în fig. 3, cu poziţiile date de rapoartele $m = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{MB}}$, $n = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$, $p = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, $q = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$, $r = \dfrac{\overline{RC}}{\overline{RB}}$ şi $s = \dfrac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$. Atunci dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă*

$$mnp + ms + qr = mnr + mq + ps, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ mn & q & s \end{vmatrix} = 0.$$

[1]Prof. dr., Catedra de matematică, Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

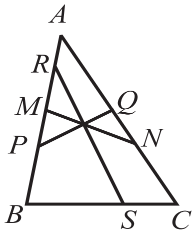


Fig. 1

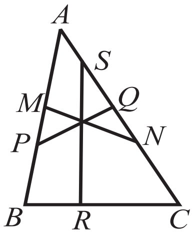


Fig. 2

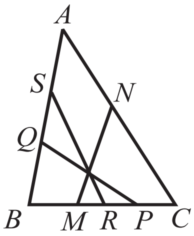


Fig. 3

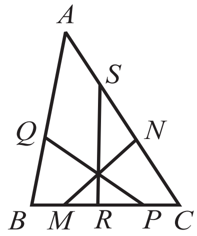


Fig. 4

Teorema 2′. *Fie punctele M, N, P, Q situate ca în fig. 4, cu poziţiile date de $m = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, $n = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$, $p = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$, $q = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$, $r = \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$, $s = \dfrac{\overline{SA}}{\overline{SC}}$. Atunci dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă*

$$pqm + ps + nr = pqr + pn + ms, \text{ i.e. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ n & pq & s \end{vmatrix} = 0.$$

Aceste teoreme sunt forme mai generale ale teoremei lui Ceva şi reciprocei sale. Folosirea segmentelor orientate (marcate prin supraliniere) face posibil ca punctele în discuţie să poată fi situate oriunde pe dreptele suport ale laturilor triunghiului.

2. Paralele la bisectoare. Mai întâi vom antrena bisectoarele interioare.

Propoziţia 1. *Paralelele la bisectoarele AL_a, BL_b, CL_c prin punctele de tangenţă D, E şi respectiv F sunt concurente.*

Demonstraţie. Putem presupune, ca în fig. 5, că $a < c < b$ (se procedează la fel în restul cazurilor). Vom aplica Teorema 2. Avem:

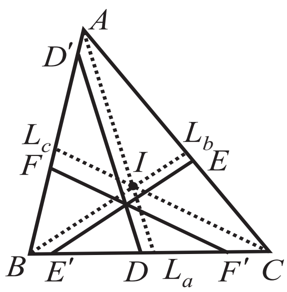


Fig. 5

$$\begin{aligned} m &= \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'B}} = -\frac{E'C}{E'B} = -\frac{EC}{EL_b} = -(p-c)\bigg/\left[\frac{ab}{a+c} - (p-c)\right] \\ &= \frac{a+c}{a-c} \cdot \frac{p-c}{p-b}, \\ n &= \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = -\frac{p-a}{p-c}, \\ p &= \frac{\overline{F'C}}{\overline{F'B}} = -\frac{FL_c}{FB} = -\left[\frac{ac}{a+b} - (p-b)\right]\bigg/(p-b) \\ &= \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{p-c}{p-b}, \\ q &= \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -\frac{p-a}{p-b}, \quad r = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -\frac{p-c}{p-b}, \\ s &= \frac{\overline{D'A}}{\overline{D'B}} = -\frac{DL_a}{DB} = -\left[\frac{ac}{b+c} - (p-b)\right]\bigg/(p-b) = -\frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{p-a}{p-b}. \end{aligned}$$

Condiţia de concurenţă din Teorema 2 sub formă de determinant revine la

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{a+c}{a-c}\cdot\dfrac{p-c}{p-b} & \dfrac{a-b}{a+b}\cdot\dfrac{p-c}{p-b} & -\dfrac{p-c}{p-b} \\ -\dfrac{a+c}{a-c}\cdot\dfrac{p-a}{p-b} & -\dfrac{p-a}{p-b} & -\dfrac{b-c}{b+c}\cdot\dfrac{p-a}{p-b} \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} (a-c)(p-b) & (a+b)(p-b) & (b+c)(p-b) \\ (a+c)(p-c) & (a-b)(p-c) & -(b+c)(p-c) \\ -(a+c)(p-a) & -(a+b)(p-a) & -(b-c)(p-a) \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce este adevărat, întrucât prima coloană este diferenţa celorlalte două. Aşadar, dreptele DD', EE' şi FF' sunt concurente.

Observaţie. Cititorul poate evita calculul cu determinanţi utilizând condiţia explicitată din Teorema 2.

Propoziţia 2. *Paralelele prin D_a, E_b, F_c la bisectoarele interioare AL_a, BL_b şi respectiv CL_c sunt concurente.*

Demonstraţie. Ne limităm, din nou, la cazul $a < c < b$. Vom aplica Teorema $1'$ relativ la dreptele D_aD', E_bE' şi F_cF'. Avem:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\overline{F_cB}}{\overline{F_cA}} = -\frac{p-a}{p-b}, \\ n &= \frac{\overline{F'C}}{\overline{F'A}} = -\frac{F_cL_c}{F_cA} = -\left[\frac{bc}{a+b} - (p-b)\right] \Big/ (p-b) \\ &= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{p}{p-b}, \\ p &= \frac{\overline{E'B}}{\overline{E'A}} = -\frac{E_bL_b}{E_bA} = -\left[\frac{bc}{a+c} - (p-c)\right] \Big/ (p-c) \\ &= \frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{p}{p-c}, \\ q &= \frac{\overline{E_bC}}{\overline{E_bA}} = -\frac{p-a}{p-c}, \quad r = \frac{\overline{D_aB}}{\overline{D_aC}} = -\frac{p-c}{p-b}, \\ s &= \frac{\overline{D'C}}{\overline{D'A}} = -\frac{D_aC}{D_aL_a} = -(p-b) \Big/ \left[\frac{ab}{b+c} - (p-b)\right] = \frac{c+b}{c-b}\cdot\frac{p-b}{p}. \end{aligned}$$

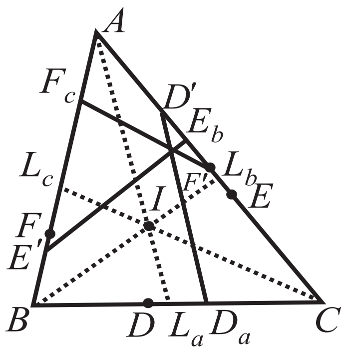


Fig. 6

În acest caz, condiţia din Teorema $1'$ se scrie

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\dfrac{p-a}{p-b} & \dfrac{a-c}{a+c}\cdot\dfrac{p}{p-c} & -\dfrac{c+b}{c-b}\cdot\dfrac{p-c}{p} \\ \dfrac{a-b}{a+b}\cdot\dfrac{p}{p-b} & -\dfrac{p-c}{p-b} & \dfrac{c+b}{c-b}\cdot\dfrac{p-b}{p} \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} (a+b)(p-b) & (a+c)(p-c) & (c-b)p \\ -(a+b)(p-a) & (a-c)p & -(b+c)(p-c) \\ (a-b)p & -(a+c)(p-a) & (b+c)(p-b) \end{vmatrix} = 0,$$

egalitate adevărată, prima coloană fiind suma celorlalte două (calcule de rutină!). Deci, dreptele D_aD', E_bE', F_cF' sunt concurente.

Relativ la punctul Gergonne adjunct Γ_a are loc rezultatul următor:

Propoziţia 3. *Paralelele prin punctele D_a, E_a, F_a (de tangenţă a cercului $\mathcal{C}(I_a, r_a)$ la bisectoarea interioară AI, bisectoarea exterioară BI_a şi, respectiv, bisectoarea exterioară CI_a sunt concurente.*

Demonstraţie. Vom aplica Teorema 1$'$. Mai întâi, observăm că $m(\widehat{E_aE'F_a}) = m(\widehat{I_aBF_a}) = 90° - \dfrac{B}{2}$. Ca urmare, $m(\widehat{AE'E_a}) = 90° + \dfrac{B}{2}$ şi $m(\widehat{AE_aE'}) = \dfrac{C-A}{2}$. În $\triangle AE'E_a$ avem: $AE' = \sin\dfrac{C-A}{2} \cdot \dfrac{p}{\sin(90° + \frac{B}{2})} = p \cdot \dfrac{\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{(c-a)p}{b}$. Rezultă că $BE' = c - AE' = \dfrac{(a+c)(p-c)}{b}$ (după calcule!). Analog găsim: $AF' = \dfrac{(b-a)p}{c}$ şi $CF' = \dfrac{(a+b)(p-b)}{c}$.

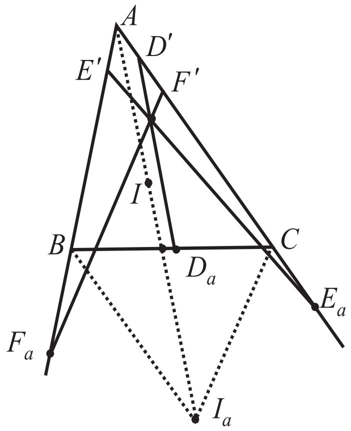


Fig. 7

Cu aceste pregătiri, obţinem: $m = \dfrac{\overline{E'B}}{\overline{E'A}} = -\dfrac{E'B}{E'A} = -\dfrac{c+a}{c-a} \cdot \dfrac{p-c}{p}$, $n = \dfrac{\overline{E_aC}}{\overline{E_aA}} = \dfrac{p-b}{p}$, $p = \dfrac{\overline{F_aB}}{\overline{F_aA}} = \dfrac{p-c}{p}$, $q = \dfrac{\overline{F'C}}{\overline{F'A}} = +\dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{p-b}{p}$, $r = \dfrac{\overline{D_aB}}{\overline{D_aC}} = -\dfrac{p-c}{p-b}$, $s = \dfrac{\overline{D'C}}{\overline{D'A}} = -\dfrac{D_aC}{D_aL_a} = -\dfrac{b+c}{b-c} \cdot \dfrac{p-b}{p}$. Condiţia de concurenţă din Teorema 1$'$ se verifică imediat. În concluzie, dreptele D_aD', E_aE' şi F_aF' sunt concurente.

Dacă rolul bisectoarelor ar fi luat de cevienele Gergonne sau de cele Nagel, nu obţinem concurenţa paralelelor la acestea decât pentru triunghiuri particulare. Cititorul poate stabili, utilizând teoremele din secţiunea **1**, următoarele rezultate:

Propoziţia 4. *Paralelele duse prin picioarele L_a, L_b, L_c ale bisectoarelor interioare la cevienele Gergonne AD, BE şi respectiv CF sunt concurente dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel.*

Propoziţia 5. *Paralelele prin punctele L_a, L_b, L_c la cevienele Nagel AD_a, BE_b şi respectiv CF_c sunt concurente dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel.*

3. Paralele prin puncte izotomice. Două puncte situate pe dreapta suport a unui segment $[AB]$ se numesc *izotomice* dacă sunt simetrice faţă de mijlocul segmentului. Notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ($A' \in BC$ etc.).

Teoremă. *Fie AA_1, BB_1, CC_1 trei ceviene concurente în punctul X şi A_2, B_2, C_2 izotomicele punctelor A_1, B_1 şi respectiv C_1.*

1) *Paralelele prin punctele A_2, B_2, C_2 la cevienele AA_1, BB_1 şi respectiv CC_1 sunt concurente într-un punct Y.*

2) *Paralelele prin mijloacele A', B', C' la cevienele AA_1, BB_1 şi respectiv CC_1 sunt concurente în mijlocul Z al segmentului $[XY]$.*

Demonstraţie. Notăm $\alpha = \dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}$, $\beta = \dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}$, $\gamma = \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}$; prin ipoteză, $\alpha\beta\gamma = -1$. Fie $a < c < b$, ca în fig. 8. Aplicăm Teorema 1 dreptelor $A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2'$. Cu uşurinţă găsim:

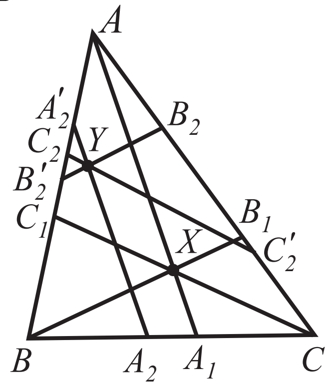


Fig. 8

$$\begin{aligned}
m &= \frac{\overline{C_2B}}{\overline{C_2A}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = \gamma,\\
n &= \frac{\overline{C_2'C}}{\overline{C_2'A}} = \frac{\overline{C_2C_1}}{\overline{C_2A}} = \frac{\overline{C_2B}}{\overline{BC_1}} + 1 = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} + 1 = \gamma + 1,\\
p &= \frac{\overline{B_2'B}}{\overline{B_2'A}} = \frac{\overline{B_2B_1}}{\overline{B_2A}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}} + 1 = \frac{1}{\beta} + 1,\\
q &= \frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{1}{\beta},\\
r &= \frac{\overline{A_2'B}}{\overline{A_2'A}} = \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2A_1}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_2C} - \overline{A_1C}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1} + \overline{CA_1}} = \frac{1}{\alpha + 1},\\
s &= \frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = \alpha.
\end{aligned}$$

Excludem cazul degenerat $\beta = 0$, iar cazul particular $\alpha + 1 = 0$ (adică ceviana AA_1 este mediană) se tratează separat la fel. Cum

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ mn & q & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma & \dfrac{1}{\beta} + 1 & \dfrac{1}{\alpha + 1} \\ \gamma + 1 & \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha + 1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta(\alpha + 1)} \begin{vmatrix} 1 & \beta & \alpha + 1 \\ \gamma & \beta + 1 & 1 \\ \gamma + 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

(ultima egalitate obţinându-se dezvoltând determinantul), rezultă că afirmaţia punctului 1) este dovedită.

Pentru 2) am putea proceda la fel. Mai simplu, observăm că A', B', C' sunt mijloacele segmentelor $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ şi $[C_1C_2]$. Atunci, în fiecare dintre trapezele AA_1A_2A', BB_1B_2B', CC_1C_2C' paralelele la baze prin A', B' şi respectiv C' vor trece prin mijlocul segmentului $[XY]$.

Cititorul poate particulariza acest rezultat considerând diferite triplete de ceviene remarcabile în triunghi; altfel spus, considerând în locul lui X puncte ca H, O, I etc.

Se ştie că (D, D_a) şi (D_b, D_c) sunt perechi de puncte izotomice pe $[BC]$; analog şi pe celelalte două laturi (v. **[3]**, p.31). Se obţin direct următoarele:

Propoziţia 6. *Dreptele ce trec prin punctele de tangenţă D, E, F (sau prin mijloacele laturilor A', B', C') şi sunt paralele cu cevienele Nagel corespunzătoare AD_a, BE_b, CF_c sunt concurente. Punctul Nagel N şi cele două puncte de concurenţă rezultate sunt coliniare.*

Propoziţia 7. *Paralelele prin punctele D_a, E_b, F_c (sau prin mijloacele A', B', C') la cevienele Gergonne corespunzătoare sunt concurente. Punctul Gergonne Γ şi punctele de concurenţă rezultate sunt coliniare.*

4. Comentariu. Cu un efort suplimentar, am putea identifica unele puncte de concurenţă mai sus obţinute şi vedea că ele sunt puncte remarcabile în triunghi. Calea de urmat poate fi următoarea: se calculează coordonatele triliniare/baricentrice ale punctelor de concurenţă (ceea ce nu-i greu!) şi apoi se găseşte în lista ,,centrelor" din [**2**] cine sunt aceste puncte. De exemplu, punctul de concurenţă dat de Propoziţia 1 este notat X_{65} în [**2**], p.76, şi dintre proprietăţile indicate în acest loc enumerăm: se află pe dreptele OI şi ΓN, este izogonalul conjugat al punctului lui Schiffler etc.

Bibliografie

1. **T. Bîrsan** - *Generalizări ale teoremei lui Ceva şi aplicaţii*, Recreaţii Matematice, 4(2002), nr. 2, 10-14.
2. **C. Kimberling** - *Triangle Centers and Central Triangle*, Congressus Numerantium 129, Winnipeg, Canada, 1998.
3. **T. Lalescu** - *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.

Recreaţii ... matematice

MIORIŢA MATEMATICĂ

Pe-un picior de PLAN EUCLIDIAN,
Iată vin în cale,
TRANSLATÂND la vale,
Trei MULŢIMI de PUNCTE,
Toate trei DISJUNCTE,
De FUNCŢII păzite
Toate diferite.
Ele sunt tot trei:
Una-i INJECTIVĂ,
Alta-i BIJECTIVĂ
Şi-alta-i SURJECTIVĂ.
Iar cea INJECTIVĂ
Şi cea SURJECTIVĂ,
Mări, se vorbiră
Şi se sfatuiră
Să rămână treze
Pân-o să-nsereze
Şi s-o ANULEZE
Pe cea BIJECTIVĂ,
C-are PRIMITIVĂ
Şi- ASIMPTOTE multe
Câte şi mai câte,
Că e INVERSABILĂ
Şi chiar DERIVABILĂ ...
Dar într-o MULŢIME
Asta s-a aflat
Şi s-au indignat,
C-ale lor cuvinte
Întrec orice LIMITE.
Dar de la $f(0)$-ncoace
Unui PUNCT nu-i place
Să mai stea-n MULŢIME
Şi de treabă-a se ţine.
BIJECTIVA se-ntrebă:
"PUNCTUL ăsta ce-o avea?"
Şi se duse
Şi îi spuse:
- Dragă PUNCTULEŢUL meu,
Ce rău oare îţi fac eu
Sau nu-ţi place poate
C-ai COORDONATE
NATURALE toate?
Vrei să stai mai jos,
Crezi că-i mai frumos?
Nu vrei un'te-am pus,
Vrei cumva mai sus?
- Dragă BIJECTIVĂ,
Eu chiar dimpotrivă,
Mă simt foarte bine,
Dar e rău de tine!

(continuare la pagina 20)

Asupra inegalităţii lui Jensen

Florin POPOVICI[1]

În această notă stabilim *inegalitatea lui Jensen* pentru funcţii J-convexe; în raport cu demonstraţia lui Cauchy, bazată pe schema $n \to 2^n \to n+1$, raţionamentul nostru inductiv este unul direct şi are un suport geometric natural. Ideea din demonstraţia noastră, prin adaptare, produce demonstraţii simple ale unor inegalităţi clasice; prezentăm o demonstraţie realmente simplă a *inegalităţii mediilor* şi una pentru *inegalitatea lui Huygens*.

1. Inegalitatea lui Jensen

Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie J-convexă (convexă în sens Jensen), adică*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\ (\forall)x_1, x_2 \in I, \tag{1}$$

atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ are loc inegalitatea lui Jensen

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n},\ (\forall)x_1,\ldots,x_n \in I. \tag{2}$$

Demonstraţie. Stabilim (2) prin inducţie. Conform ipotezei, (2) are loc pentru $n = 2$.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, pentru care are loc (2). Arătăm că (2) are loc şi pentru valoarea $n+1$. Fie $a, b \in I$. Considerăm punctele $c = \frac{n}{n+1}a + \frac{1}{n+1}b$ şi $d = \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1}b$. Deoarece $c = \frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}d$ şi $d = \frac{n-1}{n}b + \frac{1}{n}c$, conform ipotezei inductive rezultă că avem

$$f(c) \le \frac{n-1}{n}f(a) + \frac{1}{n}f(d),\quad f(d) \le \frac{n-1}{n}f(b) + \frac{1}{n}f(c). \tag{3}$$

Urmează că

$$f\left(\frac{n}{n+1}a + \frac{1}{n+1}b\right) = f(c) \le \frac{n}{n+1}f(a) + \frac{1}{n+1}f(b). \tag{4}$$

Fie $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$. Conform ipotezei inductive şi ţinând cont de (3), obţinem

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n+1}}{n+1}\right) = f\left(\frac{n}{n+1}\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} + \frac{1}{n+1}x_{n+1}\right) \le \frac{n}{n+1}f\left(\frac{x_1+\ldots x_n}{n}\right) +$$
$$+\frac{1}{n+1}f(x_{n+1}) \le \frac{n}{n+1}\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} + \frac{1}{n+1}f(x_{n+1}) = \frac{f(x_1)+\ldots f(x_{n+1})}{n+1},$$

deci (2) are loc pentru valoarea $n+1$. Conform principiului inducţiei matematice, (2) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

Observaţia 1. Geometric, din (3) rezultă că nu poate avea loc contrara inegalităţii (4), deoarece s-ar contrazice proprietăţile de separare ale planului $\mathbb{R}^2$.

[1]Prof. dr., Colegiul Naţional "Gr. Moisil", Braşov

2. Inegalitatea mediilor

Teorema 2. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ are loc inegalitatea mediilor*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \ (\forall) x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty). \tag{5}$$

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$. Deoarece $\sqrt{x_1 x_2} \leq \dfrac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$, rezultă că (5) are loc pentru $n = 2$.

Fie $n \in \mathbb{N}$, pentru care are loc (1). Fie $a, b \in [0, \infty)$. Considerăm punctele $c = \sqrt[n+1]{a^n b}$ şi $d = \sqrt[n+1]{ab^n}$. Deoarece $c = \sqrt[n]{a^{n-1} d}$ şi $d = \sqrt[n]{b^{n-1} c}$, conform ipotezei inductive avem $c \leq \dfrac{(n-1)a + d}{n}, d \leq \dfrac{(n-1)b + c}{n}$. De aici, obţinem succesiv $n^2 c \leq n(n-1)a + nd \leq n(n-1)a + (n-1)b + c$, $(n^2 - 1)c \leq n(n-1)a + (n-1)b$,

$$\sqrt[n+1]{a^n b} \leq \frac{na + b}{n+1}. \tag{6}$$

Fie $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0, \infty)$. Conform ipotezei inductive şi ţinând cont de (6), rezultă că

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}} &= \sqrt[n+1]{(\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n})^n x_{n+1}} \leq \frac{n \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} + x_{n+1}}{n+1} \\ &\leq \frac{n \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} + x_{n+1}}{n+1} = \frac{x_1 + \ldots x_{n+1}}{n+1}; \end{aligned}$$

deci (5) are loc şi pentru valoarea $n + 1$.

Observaţia 2. În [**1**] sunt selectate şi prezentate cronologic circa 40 de demonstraţii ale inegalităţii mediilor, începând cu prima demonstraţie cunoscută, dată de către C. MacLaurin în 1729.

3. Inegalitatea lui Huygens

Teorema 3. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ are loc inegalitatea lui Huygens:*

$$1 + \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \sqrt[n]{(1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n)}, \ \ (\forall) x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty). \tag{7}$$

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$. Deoarece

$$(1 + \sqrt{x_1 x_2})^2 = 1 + 2\sqrt{x_1 x_2} + x_1 x_2 \leq 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 = \sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)}^2,$$

rezultă că (7) are loc pentru $n = 2$.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care are loc (7). Fie $a, b \in [0, \infty)$. Considerăm punctele $c = \sqrt[n+1]{a^n b}$ şi $d = \sqrt[n+1]{ab^n}$. Avem $c = \sqrt[n]{a^{n-1} d}$ şi $d = \sqrt[n]{b^{n-1} c}$. Conform ipotezei inductive, rezultă că $1 + c \leq \sqrt[n]{(1 + a)^{n-1}(1 + d)}$, $1 + d \leq \sqrt[n]{(1 + b)^{n-1}(1 + c)}$. De aici, obţinem succesiv

$$(1 + c)^{n^2} \leq (1 + a)^{n(n-1)}(1 + d)^n \leq (1 + a)^{n(n-1)}(1 + b)^{n-1}(1 + c),$$

$$(1+c)^{n^2-1} \leq (1+a)^{n(n-1)}(1+b)^{n-1},$$

$$1+\sqrt[n+1]{a^n b} \leq \sqrt[n+1]{(1+a)^n(1+b)}. \tag{8}$$

Fie $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0, \infty)$. Conform ipotezei inductive şi ţinând cont de (8), rezultă că $1+\sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}} = 1+\sqrt[n+1]{(\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n})^n x_{n+1}}$

$\leq \sqrt[n+1]{(1+\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n})^n(1+x_{n+1})}$

$\leq \sqrt[n+1]{\sqrt[n]{(1+x_1) \cdot \ldots \cdot (1+x_n)}^n (1+x_{n+1})} = \sqrt[n+1]{(1+x_1) \cdot \ldots \cdot (1+x_{n+1})};$

deci (7) are loc şi pentru valoarea $n+1$.

4. Observaţii finale

Posibilitatea conectării inegalităţii lui Jensen cu alte inegalităţi a fost evidenţiată (cf. [**2**], pag. 4) de către **G. Aumann** în anul 1933, prin introducerea conceptului de *funcţie (M, N)-J-convexă.*

Fie $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ două intervale. Fie M o medie pe I_1 şi fie N o medie pe I_2. *O funcţie $f: I_1 \to I_2$ se numeşte (M, N)-J-convexă dacă $f(M(x,y)) \leq N(f(x), f(y))$, $(\forall)x, y \in I_1$.* În anumite condiţii asupra mediilor M şi N se obţine *inegalitatea lui Jensen generalizată*:

$$f(M(x_1, \ldots, x_n)) \leq N(f(x_1), \ldots, f(x_n)),\ (\forall)x_1, \ldots, x_n \in I_1.$$

Dacă notăm cu A media aritmetică şi cu G media geometrică, atunci:

1) *inegalitatea lui Jensen clasică* este inegalitatea lui Jensen generalizată pentru funcţii $(A, A) - J$-convexe;

2) *inegalitatea mediilor* este inegalitatea lui Jensen generalizată pentru funcţia $(G, A) - J$-convexă $1_{[0,\infty)}$;

3) *inegalitatea lui Huygens* este inegalitatea lui Jensen generalizată pentru funcţia $(G, G) - J$-convexă $x \to 1+x$, $(\forall)x \in [0, \infty)$.

In [**3**], inegalitatea lui Jensen generalizată este stabilită pentru funcţii $(M, N) - J$-convexe, corespunzător unei clase largi de medii, care include mediile cvasi-aritmetice.

Bibliografie

1. **P.S. Bullen, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić** - *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1988.
2. **C.P. Niculescu, L.E. Persson** - *Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach.* CMS Books in Mathematics, vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.
3. **C.P. Niculescu, F. Popovici** - *Inegalitatea lui Jensen pentru funcţii $(M, N) - J$-convexe în condiţii generale* (va apare).

O rafinare a inegalităţii lui Euler $R \geq r\sqrt{2}$

Mihály BENCZE[1]

Pentru un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O,R)$ şi circumscris unui cerc $\mathcal{C}(I,r)$ este valabilă *relaţia lui Durrande* ([**2**], p.216), din care decurge *inegalitatea de tip Euler* $R \geq r\sqrt{2}$ (cu egalitate dacă şi numai dacă O şi I coincid, ceea ce revine la faptul că patrulaterul este pătrat).

Notând cu S şi p aria şi semiperimetrul unui astfel de patrulater, avem $\sin A = \dfrac{2S}{ad+bc}$, $\sin B = \dfrac{2S}{ab+cd}$ (prima formulă rezultă din $ad\sin A + bc\sin C = 2S$ şi faptul că $A+C = B+D = \pi$). De asemenea au loc relaţiile: $S = \frac{1}{2}(a+b+c+d)r = pr$, $a+c = b+d = p$, $S^2 = abcd$ etc. (v. [**2**]).

Rezultatul următor indică un şir de rafinări ale inegalităţii $R \geq r\sqrt{2}$.

Teoremă. *Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de rază R şi circumscris unui cerc de rază r. Atunci, avem*

$$\begin{aligned}
\frac{r\sqrt{2}}{R} &\leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{r^2 + r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}} + \frac{r\sqrt{2}}{R}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \frac{r\sqrt{2}}{R}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sqrt{\frac{r^2 + r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}}\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-D}{2} + \cos\frac{D-A}{2}\right) \\
&\leq \frac{2+\sin A + \sin B}{4} \leq 1.
\end{aligned}$$

Demonstraţie. Ţinând seama de formulele mai sus amintite, obţinem

$$\frac{\sqrt{1+\sin A\sin B}}{\sin A \sin B} = \frac{p(\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)})}{4S^2} = \frac{p\cdot 4RS}{4S^2} = \frac{R}{r}.$$

Ca urmare, $R^2u^2 - r^2u - r^2 = 0$, unde $u = \sin A \sin B$, şi vom avea

$$\sin A \sin B = \frac{r^2 + r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}.$$

Revenind la scopul propus, să notăm $E = \dfrac{1}{4}\sum \cos\dfrac{A-B}{2}$ şi să observăm că

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)\left(\sin\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left[\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\right)^2\right] = \frac{2+\sin A+\sin B}{4} \leq 1.
\end{aligned}$$

[1] Profesor, Braşov, e-mail: benczemihaly@yahoo.com

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sqrt{\sin A\sin B}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sqrt{\frac{r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right) \geq \frac{r\sqrt{2}}{R} \end{aligned}$$

(s-a utilizat faptul că din $R \geq r\sqrt{2}$ decurge că $\sqrt{\dfrac{r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}} \geq \dfrac{r\sqrt{2}}{R}$).

Bibliografie

1. **M. Bencze** - *Inequalities* (manuscript), 1982.
2. **D. Mihalca, I. Chiţescu, M. Chiriţă** - *Geometria patrulaterului. Teoreme şi probleme*, Teora, Bucureşti, 1998.
3. **D.S. Mitrinović** - *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, 1970.
4. *Octogon Mathematical Magazine* (1993-2008).

ERRATUM

În articolul *Acurateţea limbajului matematic în combinatorică* de **L. Modan**, apărut în nr. 1 din v. X (2008), în rândul 19 de la pag. 43, în loc de ”se formează în $4n^3-n+1$ moduri”, se va citi ”se formează în

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{2n-1}^{k}\cdot C_{2n+1}^{k+1} = \frac{(4n)!}{2\cdot[(2n)!]^2}-2n-1$$

moduri”.

Cercuri tangente la două cercuri date

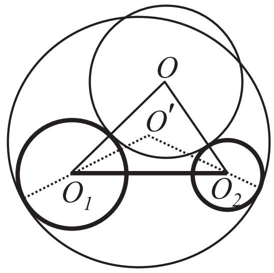
Geanina HĂVÂRNEANU[1]

Fie $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ două cercuri date într-un plan. Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă:

Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor tangente la cercurile $\mathcal{C}_1$ *şi* $\mathcal{C}_2$.

Un prim gând în scopul propus este acela de a folosi metoda coordonatelor. Vom vedea, însă, că este preferabil să abordăm problema cu mijloacele geometriei sintetice; vor fi evitate astfel calculele neplăcute (destul de simple, ce-i drept!).

Fie O_1 şi respectiv O_2 centrele cercurilor $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ şi u distanţa centrelor lor. Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că raza cercului $\mathcal{C}_1$ este 1, iar a lui $\mathcal{C}_2$ este $v \leq 1$. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc tangent la $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ şi variabil. Este evident faptul că locul geometric căutat, locul punctului O, depinde de poziţia relativă atât a cercurilor fixe $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ cât şi a cercului variabil $\mathcal{C}$ faţă de cele fixe.



I. **$\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt exterioare ($u > 1 + v$).** Distingem patru familii de cercuri $\mathcal{C}$ tangente la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$: 1) $\mathcal{C}$ este tangent exterior cercurilor $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$; 2) $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sunt tangente interior cercului $\mathcal{C}$; 3) $\mathcal{C}$ este tangent exterior la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ este tangent interior la $\mathcal{C}$; 4) $\mathcal{C}$ este tangent exterior la $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}_1$ este tangent interior la $\mathcal{C}$.

În cazul 1), avem $OO_1 - OO_2 = (1 + r) - (v + r) =$

$$= 1 - v = \begin{cases} \text{const.}, & v < 1 \\ 0, & v = 1. \end{cases}$$

În cazul 2), avem $O'O_2 - O'O_1 = (r - v) - (r - 1) = 1 - v = \begin{cases} \text{const.}, & v < 1 \\ 0, & v = 1. \end{cases}$

Pentru $v < 1$, în ambele cazuri, avem $|OO_1 - OO_2| = 1 - v > 0$, adică punctul O parcurge o hiperbolă $\mathcal{H}_1$ cu focarele O_1 şi O_2, cu centrul în mijlocul segmentului $[O_1O_2]$ şi vârfurile $V_1, V_1' \in (O_1O_2)$ precizate de $O_1V_1 = \dfrac{u}{2} + \dfrac{1 - v}{2}$ (după cum rezultă din relaţiile $V_1O_1 - V_1O_2 = 1 - v$ şi $O_1O_2 = u$) şi $O_1V_1' = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1 - v}{2}$. Ramura "dreaptă" a hiperbolei $\mathcal{H}_1$ este locul centrelor cercurilor $\mathcal{C}$ aflate în cazul 1), căci în acest caz $OO_1 > OO_2$, iar ramura "stângă" este locul centrelor aflate în cazul 2), căci în acest caz avem $O'O_1 < O'O_2$.

Pentru $v = 1$ (adică cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt egale), în ambele cazuri se obţine $OO_1 = OO_2$ şi locul geometric căutat este mediatoarea segmentului $[O_1O_2]$. Hiperbola $\mathcal{H}_1$ degenerează în această mediatoare.

Procedăm la fel în cazurile 3) şi 4) (cititorul va face singur figura). În cazul 3) avem $OO_1 - OO_2 = (1 + r) - (r - v) = 1 + v$, iar în cazul 4) avem $OO_2 - OO_1 = (r + v) - (r - 1) = 1 + v$. Aşadar, în aceste cazuri $|OO_1 - OO_2| = 1 + v$, adică locul

[1] Profesor, Şcoala generală Horleşti, Horleşti (Iaşi)

geometric este o hiperbolă $\mathcal{H}_2$ cu focarele tot punctele O_1, O_2 şi vârfurile V_2, V_2' date de $O_1V_2 = \dfrac{u}{2} + \dfrac{1+v}{2}$ şi $O_1V_2' = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1+v}{2}$. Ramura "dreaptă" a hiperbolei $\mathcal{H}_2$ este parcursă în cazul 3), iar cea "stângă" în cazul 4). Să mai observăm că situaţa $v = 1$ nu necesită o tratare distinctă.

În concluzie, *locul geometric al centrelor cercurilor tangente la două cercuri* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *exterioare este format din hiperbolele* $\mathcal{H}_1$ *şi* $\mathcal{H}_2$*, dacă* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *au raze diferite, sau din mediatoarea segmentului* $[O_1O_2]$ *şi* $\mathcal{H}_2$*, dacă aceste cercuri au raze egale.*

I$'$. **$\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior** ($u = 1 + v$), caz limită al celui de mai sus. Familiile de cercuri 1) şi 2) conduc şi aici la o hiperbolă $\mathcal{H}_1$ (degenerată, dacă $v = 1$), iar familiile 3) şi 4) conduc la relaţia $|OO_1 - OO_2| = 1 + v = u$, care spune că punctul mobil O aparţine lui d (d notează linia centrelor O_1 şi O_2) şi $O \notin [O_1O_2]$.

Să observăm, însă, că în acest caz intră în discuţie încă două familii de cercuri $\mathcal{C}$: 5) $\mathcal{C}$ este tangent interior la $\mathcal{C}_1$ şi exterior la $\mathcal{C}_2$; 6) $\mathcal{C}$ este tangent exterior la $\mathcal{C}_1$ şi interior la $\mathcal{C}_2$. În aceste cazuri, $\mathcal{C}$ va fi tangent la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ în punctul T de tangenţă a acestor din urmă cercuri. În cazul 5), avem $OO_1 = 1 - r$ şi $OO_2 = v + r$, cu $0 \le r \le 1$, adică O parcurge segmentul $[O_1T]$. În cazul 6), avem $OO_1 = 1 + r$ şi $OO_2 = v - r$, cu $0 \le r \le v$, adică O parcurge $[TO_2]$.

Cu alte cuvinte, punctul mobil O parcurge dreapta d, dacă cercul $\mathcal{C}$ este în cazurile 3)–6); altfel spus, hiperbola $\mathcal{H}_2$ degenerează în dreapta d a centrelor cercurilor fixe.

Rezumând, *dacă* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *sunt tangente exterior, locul centrelor cercurilor* $\mathcal{C}$ *tangente la aceste două cercuri este format dintr-o hiperbolă* $\mathcal{H}_1$ (*care degenerează în mediatoarea segmentului* $[O_1O_2]$ *atunci când* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *au raze egale*) *şi dreapta* d.

Observaţie. Vom da o schiţă de rezolvare analitică a problemei enunţate în cazul cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ exterioare şi de raze diferite.

Considerăm un reper cartezian drept cu originea în O_1, având axa x-lor dreapta determinată de O_1 şi O_2, cu sensul de la O_1 la O_2 şi unitatea de măsură egală cu raza cercului $\mathcal{C}_1$. Atunci, avem $O_1(0,0)$ şi $O_2(u,0)$ şi fie $O(x,y)$.

În cazul familiei 1) de cercuri $\mathcal{C}$ se impun condiţiile:

$$x^2 + y^2 = (r+1)^2 \;\text{ şi }\; (x-u)^2 + y^2 = (r+v)^2.$$

Prin scădere, vom găsi $r = \dfrac{u^2 - 2ux - v^2 + 1}{2(v-1)}$ cu care eliminăm r din prima ecuaţie, obţinând în cele din urmă ecuaţia locului

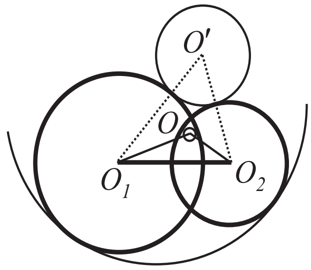
$$\frac{\left(x - \dfrac{u}{2}\right)^2}{\dfrac{(1-v)^2}{4}} - \frac{y^2}{\dfrac{u^2 - (1-v)^2}{4}} = 1,$$

adică hiperbola $\mathcal{H}_1$ (ramura "dreaptă", căci $v < 1$).

Aceste calcule, cât şi cele ce trebuie făcute în cazul familiilor de cercuri 2)–4), ne conving de avantajul abordării sintetice.

II. $\mathcal{C}_1$ **şi** $\mathcal{C}_2$ **sunt secante** $(\mathbf{1 - v < u < 1 + v})$**.** Cercul $\mathcal{C}$ tangent la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ poate fi în unul dintre următoarele cazuri: 1° $\mathcal{C}$ este tangent interior cercurilor $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$; 2° $\mathcal{C}$ este tangent exterior cercurilor $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$; 3° $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sunt tangente interior cercului $\mathcal{C}$; 4° $\mathcal{C}$ este tangent interior la $\mathcal{C}_1$ şi exterior la $\mathcal{C}_2$; 5° $\mathcal{C}$ este tangent exterior la $\mathcal{C}_1$ şi interior la $\mathcal{C}_2$.

În cazul 1°, avem $OO_1 - OO_2 = (1 - r) - (v - r) = 1 - v$ şi $0 \leq r \leq \dfrac{1 + u - v}{2}$; în cazul 2°, avem $O'O_1 - O'O_2 = (1 + r) - (v + r) = 1 - v$ şi $v \geq 0$. Împreună, aceste două cazuri dau, ca făcând parte din locul geomeric, ramura "dreapta" a hiperbolei $\mathcal{H}_1$ (cazul 1° dă arcul din partea comună cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, iar 2° restul ramurei). În cazul 3°, avem $O''O_2 - O''O_1 = (r - v) - (r - 1) = 1 - v$ şi $r \geq 1$, adică ramura "stângă" a hiperbolei $\mathcal{H}_1$.



Cazurile 4° şi 5° (cititorul va face singur figura) conduc, împreună, la elipsa $\mathcal{E}_1 : OO_1 + OO_2 = 1 + v$ având focarele O_1 şi O_2 şi trecând (evident!) prin punctele de intersecţie a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. Într-adevăr, în cazul 4° punctul mobil O verifică relaţia $OO_1 + OO_2 = (1 - r) + (v + r) = 1 + v$, cu $0 \leq r \leq \dfrac{1 + u - v}{2}$, deci O parcurge arcul elipsei $\mathcal{E}_1$ aflat în cercul $\mathcal{C}_1$, iar în cazul 5° avem $OO_1 + OO_2 = (1 + r) + (v - r) = 1 + v$, cu $0 \leq r \leq \dfrac{u + v - 1}{2}$, adică O parcurge arcul elipsei $\mathcal{E}_1$ situat în cercul $\mathcal{C}_2$.

Prin urmare, *locul centrelor cercurilor tangente la două cercuri secante* $\mathcal{C}_1$ *şi* $\mathcal{C}_2$ *este format din hiperbola* $\mathcal{H}_1$ *(care degenerează în mediatoarea segmentului* $[O_1O_2]$ *dacă* $\mathcal{C}_1$*,* $\mathcal{C}_2$ *au raze egale) şi elipsa* $\mathcal{E}_1$*.*

III. $\mathcal{C}_2$ **este interior cercului** $\mathcal{C}_1$ $(\mathbf{0 \leq u \leq 1 - v})$**.** Avem două familii de cercuri $\mathcal{C}$: i) $\mathcal{C}$ tangent interior la $\mathcal{C}_1$ şi exterior la $\mathcal{C}_2$; ii) $\mathcal{C}$ tangent interior la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ tangent interior la $\mathcal{C}$.

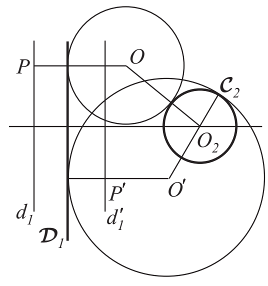
În cazul i) avem $OO_1 + OO_2 = (1 - r) + (v + r) = 1 + v$, adică O parcurge elipsa $\mathcal{E}_1$, iar în cazul ii) avem $OO_1 + OO_2 = (1 - r) + (r - v) = 1 - v > 0$, adică punctul O parcurge o elipsă $\mathcal{E}_2$ având ca focare, ca şi $\mathcal{E}_1$, centrele O_1 şi O_2.

Dacă $\mathcal{C}_2$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}_1$ $(u = 1 - v)$, atunci constatăm cu uşurinţă că elipsa $\mathcal{E}_1$ trece prin punctul de tangenţă a acestora, iar $\mathcal{E}_2$ degenerează în segmentul $[O_1O_2]$. Dacă $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt concentrice $(u = 0)$, vom avea $OO_1 = \dfrac{1 + v}{2}$ şi, respectiv, $OO_1 = \dfrac{1 - v}{2}$, adică elipsele $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ sunt cercuri concentrice cu $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ şi având razele semisuma şi respectiv semidiferenţa razelor cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.

Conchidem că, *dacă* $\mathcal{C}_2$ *este interior cercului* $\mathcal{C}_1$*, locul centrelor cercurilor tangente acestor cercuri este format din elipsele* $\mathcal{E}_1$ *şi* $\mathcal{E}_2$ *(care vor fi cercuri atunci când* $\mathcal{C}_1$ *şi* $\mathcal{C}_2$ *sunt concentrice); elipsa* $\mathcal{E}_2$ *degenerează în segmentul* $[O_1O_2]$ *în cazul în care* $\mathcal{C}_2$ *este tangent interior la* $\mathcal{C}_1$*.*

Considerăm că problema enunţată, cu toate cazurile ce le comportă, a fost complet rezolvată.

Cazul unui cerc fix degenerat în dreaptă. Modificăm problema rezolvată mai sus considerând o dreaptă $\mathcal{D}_1$ în locul cercului $\mathcal{C}_1$. Dintre cazurile posibile, potrivit cu poziţia dreptei $\mathcal{D}_1$ faţă de cercul $\mathcal{C}_2$, ne limităm la unul singur, cel din figura alăturată.



Distingem două tipuri de cercuri $\mathcal{C}$ tangente la dreapta $\mathcal{D}_1$ şi cercul $\mathcal{C}_2$: j) $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior; jj) $\mathcal{C}_2$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}$. Fie d_1 şi d_1' paralele la dreapta $\mathcal{D}_1$ situate la distanţa v de aceasta.

În cazul j) avem $OP = r + v = OO_2$, deci punctul mobil O descrie parabola $\mathcal{P}_1$ de focar O_2 şi directoare d_1, iar în cazul jj) avem $O'P' = r' - v = O'O_2$, deci O' descrie parabola $\mathcal{P}_2$ de focar O_2 şi directoare d_1'.

În concluzie, *în cazul considerat, locul centrelor cercurilor tangente la dreapta* $\mathcal{D}_1$ *şi cercul* $\mathcal{C}_2$ *este format din parabolele* $\mathcal{P}_1$ *şi* $\mathcal{P}_2$.

Recreaţii ... matematice

(continuare de la pagina 11)

Când o să-nsereze,
Vor să te-ANULEZE
Funcţia INJECTIVĂ
Şi cea SURJECTIVĂ!
- Dacă s-o-ntâmpla
De m-or ANULA,
Să mă-ngropi în zori
În CÂMP DE VECTORI
Într-o VECINĂTATE
Pe-aici, pe-aproape,
Sau chiar în MULŢIME,
Să fiţi tot cu mine!
Iar la cap să-mi pui
CALCUL INTEGRAL,
Ori un MANUAL,
Sau poate-un TRATAT
Cât mai inspirat ...
Şi de l-or citi
Îşi vor aminti
Cei ce au uitat
Că am existat,
Şi voi fi propusă,
În SUBIECTE inclusă,
Pentru OLIMPIADĂ
Sau BALCANIADĂ ...
Şi-n loc de ANULAT,
Să le spui curat
C-am INTERSECTAT
Mândrele ELIPSE,
Că am PUNCTE FIXE,
RĂDĂCINI REALE
Şi IMAGINARE
Şi că am DARBOUX!
Iar dacă-i zări,
Dacă-i întâlni
O SFERĂ bătrână,
Cu un CERC de lână,
Prin SPAŢIU alergând,
De toţi întrebând
Şi la toţi zicând :
≪Cine mi-a văzut
Sau mi-a cunoscut
O FUNCŢIE - AFINĂ,
Cu o PANTĂ lină,
Bine DEFINITĂ
Şi NEMĂRGINITĂ?...≫
Să te-nduri de ea
Şi să-i spui aşa :
C-am INTERSECTAT
Mândrele ELIPSE,
Că am PUNCTE FIXE,
Rădăcini COMPLEXE
Şi că am DARBOUX ...
Dar nu-i spune tu
De cele REALE,
Că, de-i povesti,
Mult ai s-o mâhneşti
Şi va şti de-ndat
Că m-au ANULAT...
Şi încă te mai rog,
Ca-ntre colegi buni,
Tot ce am avut
Tu să le aduni,
Să le scoţi din SPAŢIUL
Cu trei DIMENSIUNI...
Iar tu, dragul meu,
Să te INTEGREZI,
Să te ANEXEZI
La altă MULŢIME,
Că-i greu fără mine,
Dar îţi va fi bine
şi vei rezista,
Cât va EXISTA
MATEMATICA!

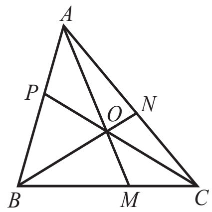
Aplicaţii ale teoremei lui Van Aubel

Omer CERRAHOGLU[1]

Rezultatul asupra căruia ne îndreptăm atenţia în această notă este următorul:

Teoremă (Van Aubel). *Se consideră triunghiul ABC şi trei ceviene AM, BN şi CP, concurente în O; atunci* $\dfrac{AP}{PB}+\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AO}{OM}$.

Demonstraţie. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABM$, cu transversala P-O-C, obţinem $\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BC}{CM}\cdot\dfrac{MO}{OA}=1$, de unde $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{CM}{BC}\cdot\dfrac{AO}{OM}$. Analog se arată că $\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{AO}{OM}$. Însumând cele două relaţii, deducem că



$$\frac{AP}{PB}+\frac{AN}{NC}=\frac{AO}{OM}\cdot\left(\frac{CM}{BC}+\frac{BM}{BC}\right)=\frac{AO}{OM}\cdot\frac{BC}{BC}=\frac{AO}{OM}.$$

Această teoremă poate fi aplicată în probleme în care apar ceviene concurente şi se cunosc anumite rapoarte sau sume de rapoarte.

Problema 1. *Se consideră triunghiul ABC şi cevienele AM, BN şi CP concurente în O. Arătaţi că* $\dfrac{AP}{PB}+\dfrac{AN}{NC}=1$ *dacă şi numai dacă* $\mathcal{A}_{BOC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathcal{A}_{ABC}$.

D. Şt. Marinescu, V. Cornea, *Lista scurtă, O.N.M.*, 2008

Soluţie. Cum $\dfrac{\mathcal{A}_{BOC}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\dfrac{d(O,BC)}{d(A,BC)}=\dfrac{OM}{AM}$, deducem că $\mathcal{A}_{BOC}=\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC}\Leftrightarrow \dfrac{OM}{AM}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{AO}{OM}=1$. Din teorema lui Van Aubel, obţinem că $\dfrac{AO}{OM}=1\Leftrightarrow \dfrac{AP}{PB}+\dfrac{AN}{NC}=1$, ceea ce încheie soluţia problemei.

Problema 2. *Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC, cu laturi de lungimi diferite. Fie $M\in(BC)$, $O\in(AM)$, iar X şi Y punctele în care CO, respectiv BO, intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului. Dacă* $\dfrac{AX}{BX}+\dfrac{AY}{CY}=\dfrac{AO}{OM}$, *arătaţi că latura BC este cea de lungime mijlocie.*

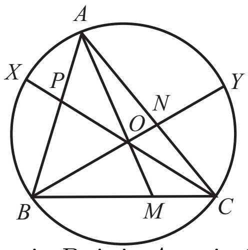
Omer Cerrahoglu

Soluţie. Notăm $\{N\}=BY\cap AC$, $\{P\}=CX\cap AB$. Observăm că $\dfrac{AX}{BX}=\dfrac{AX\cdot XP\cdot\sin\widehat{AXC}}{BX\cdot XP\cdot\sin\widehat{BXC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{BXC}}{\sin\widehat{AXC}}=\dfrac{2\cdot\mathcal{A}_{AXP}}{2\cdot\mathcal{A}_{BXP}}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{d(X,AB)\cdot AP}{d(X,AB)\cdot BP}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B}$, prin urmare $\dfrac{AX}{XB}=\dfrac{AP}{BP}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B}$. Analog se arată că $\dfrac{AY}{YC}=\dfrac{AN}{CN}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C}$. Ţinând seama de

[1]Elev, cl. a VII-a, Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", Baia Mare

ipoteza problemei şi de teorema lui Van Aubel, obţinem că

$$(*) \qquad \frac{AP}{PB} + \frac{AN}{NC} = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{\sin A}{\sin B} + \frac{AN}{NC} \cdot \frac{\sin A}{\sin C},$$



ambii membri ai acestei identităţi fiind egali cu $\frac{AO}{OM}$. Pentru a arăta că BC este latura de lungime mijlocie, ar fi suficient să demonstrăm că $A \neq \min\{A, B, C\}$ şi $A \neq \max\{A, B, C\}$. Presupunem, prin absurd, că $A = \min\{A, B, C\}$; atunci $\sin A < \sin B$ şi $\sin A < \sin C$, deci $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{\sin A}{\sin B} < \frac{AP}{PB}$ şi $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{\sin A}{\sin C} < \frac{AN}{NC}$, în contradicţie cu relaţia $(*)$. Analog se arată că $A \neq \max\{A, B, C\}$ şi astfel problema este rezolvată.

Problema 3. *Fie I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, $\{A'\} = AI \cap BC$, $\{B'\} = BI \cap AC$, $\{C'\} = CI \cap AB$. Arătaţi că $\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$. (O.I.M., 1991)*[1].

Soluţie. Folosind teorema lui Van Aubel şi teorema bisectoarei, obţinem că

$$\frac{AI}{IA'} = \frac{AC'}{BC'} + \frac{AB'}{CB'} = \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC} = \frac{AB + AC}{BC} \Rightarrow \frac{AI}{AA'} = \frac{AB + AC}{AB + AC + BC}.$$

Scriind încă două relaţii analoage şi folosind notaţiile uzuale într-un triunghi, inegalitatea din enunţ, devine

$$\frac{1}{4} < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(2p)^3} \leq \frac{8}{27}.$$

Pentru a demonstra inegalitatea din dreapta, folosim inegalitatea mediilor:

$$\frac{a+b}{2p} \cdot \frac{b+c}{2p} \cdot \frac{c+a}{2p} \leq \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a+b}{2p} + \frac{b+c}{2p} + \frac{c+a}{2p}\right)\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

cu egalitate în cazul triunghiului echilateral. Pentru a demonstra inegalitatea din stânga, folosim inegalitatea lui Bernoulli generalizată:

$$\frac{a+b}{2p} \cdot \frac{b+c}{2p} \cdot \frac{c+a}{2p} = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{p-c}{p}\right)\left(1 + \frac{p-a}{p}\right)\left(1 + \frac{p-b}{p}\right)$$
$$> \frac{1}{8}\left(1 + \frac{p-c}{p} + \frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p}\right) = \frac{1}{4}.$$

Încheiem prin a propune spre rezolvare, celor interesaţi, două probleme.

Problema 4. *Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ şi fie $\{O\} = AC \cap BD$, M mijlocul lui $[AO]$, N mijlocul lui $[CO]$, $\{R\} = DM \cap AB$, $\{P\} = DN \cap BC$. Dacă $\frac{AR}{RB} + \frac{CP}{PB} = 1$, demonstraţi că $ABCD$ este paralelogram.*

Omer Cerrahoglu

Problema 5. *Se consideră triunghul ascuţiunghic ABC, înscris în cercul $\mathcal{C}$. Bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ intersectează $\mathcal{C}$ în S, iar perpendiculara din S pe BC intersectează a doua oară $\mathcal{C}$ în R. Fie M mijlocul lui $[RS]$, $\{P\} = CM \cap AB$, şi $\{Q\} = BM \cap AC$. Dacă $\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QC} = \frac{1}{\cos A}$, demonstraţi că $AB = AC$.*

Omer Cerrahoglu

[1] N.R. Prin problema L36 din RecMat 1/2003, *M. Ionescu* generalizează acest rezultat, considerând I ca fiind punct arbitrar în interiorul sau pe laturile triunghiului median al $\triangle ABC$.

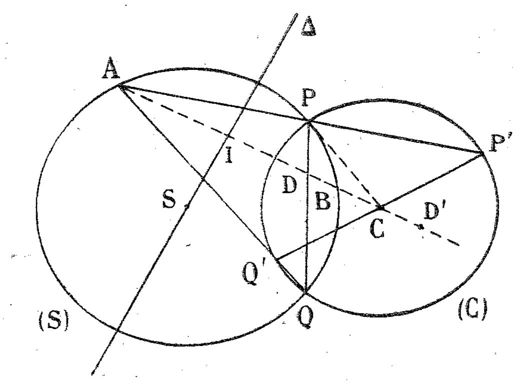
Une application de l'inversion

Adrien REISNER[1]

Etant donné un cercle (C) de centre C et un point A on considère un cercle variable (S) de centre S passant par A et orthogonal à (C), voir figure. Les deux cercles (C) et (S) se coupent en P et Q .

Proposition 1. *Le lieu géométrique du centre S est une droite.*

Démonstration. Soit B le deuxième point commun de la droite CA et du cercle (S). Les deux cercles (C) et (S) étant orthogonaux la droite CP est tangente en P au cercle (S). On a – la puissance du point C par rapport au cercle (S) –: $\overline{CA}\cdot\overline{CB} = \overline{CP}^2$ et par suite le point B est fixe. Le cercle (S) passant par les deux points fixes A et B le lieu géométrique de son centre S est la droite (Δ) perpendiculaire à AB menée par le milieu I du segment AB.



Proposition 2. *La corde PQ commune aux cercles (C) et (S) passe par un point fixe.*

Démonstration. La droite PQ est la polaire du point S par rapport au cercle (C). Le lieu géométrique du point S étant la droite (Δ), la polaire du point S passe par un point fixe D pôle de (Δ) par rapport au cercle (C). Les points A, C, B, D sont alignés sur une droite perpendiculaire à la droite (Δ).

Les droites AP et AQ rencontrent à nouveau le cercle (C) respectivement aux points P'et Q'.

Proposition 3. *La droite $P'Q'$ passe par un point fixe.*

Démonstration. Considérons l'inversion ayant pour pôle le point A et pour module la puissance du point A par rapport au cercle (C). Ce cercle (C) coïncide

[1]Centre de Calcul E.N.S.T., Paris; e-mail: *adrien.reisner@enst.fr*

avec son inverse et les points P' et Q' sont les inverses des points P et Q. La droite $P'Q'$ est l'inverse du cercle (APQ) c'est – a – dire du cercle (S). Le cercle (S) étant orthogonal au cercle (C) on en déduit que la droite $P'Q'$ passe par le point fixe C.

Remarque. Le cercle (S) passe aussi par le point fixe B. Donc $P'Q'$ passe par l'inverse du point B et par suite les points B et C sont des points inverses l'un de l'autre.

Proposition 4. *Le cercle circonscrit au triangle passe par un point fixe.*

Démonstration. Le cercle circonscrit au triangle $AP'Q'$ est l'inverse de la droite PQ. Cette droite PQ passant par le point fixe D, le cercle $(AP'Q')$ passe par le point fixe D' inverse du point D. Démontrons que ce point D' est le symétrique de B par rapport au point C. En effet en considérant les puissances du point C par rapport aux cercles (S) et $(AP'Q')$ on a:

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CP}^2 \quad \text{et} \quad \overline{CA} \cdot \overline{CD'} = \overline{CP'} \cdot \overline{CQ'} = -\overline{CP}^2.$$

On en déduit immédiatement que $\overline{CB} = -\overline{CD'}$, d'où la propriété annoncée.

Références

1. **J. Commeau -** *Géométrie* (pages 398–424), Edition Masson.
2. **A. Lentin, G. Girard -** *Géométrie. Mécanique* (pages 303–328), Edition Hachette.

Recreații ... matematice

$$\begin{array}{rr}
1 \times 8 + 1 = 9 & 1 \times 9 + 2 = 11 \\
12 \times 8 + 2 = 98 & 12 \times 9 + 3 = 111 \\
123 \times 8 + 3 = 987 & 123 \times 9 + 4 = 1111 \\
1234 \times 8 + 4 = 9876 & 1234 \times 9 + 5 = 11111 \\
12345 \times 8 + 5 = 98765 & 12345 \times 9 + 6 = 111111 \\
123456 \times 8 + 6 = 987654 & 123456 \times 9 + 7 = 1111111 \\
1234567 \times 8 + 7 = 9876543 & 1234567 \times 9 + 8 = 11111111 \\
12345678 \times 8 + 8 = 98765432 & 12345678 \times 9 + 9 = 111111111 \\
123456789 \times 8 + 9 = 987654321 & 123456789 \times 9 + 10 = 1111111111
\end{array}$$

O demonstraţie simplă a inegalităţii mediilor

Claudiu-Ştefan POPA[1]

Ne popunem să prezentăm o cale de introducere a inegalităţii mediilor la nivelul clasei a VII-a. Considerăm că această metodă are o serie de avantaje: este uşor de expus de către profesor, facil de înţeles de către elevi, permite recapitularea formulelor de calcul prescurtat şi deschide copiilor noi orizonturi.

În cele ce urmează, a şi b sunt numere reale pozitive, cu $a \leq b$. Mediile uzuale sunt: $M_h = \dfrac{2ab}{a+b}$ (*media armonică*); $M_g = \sqrt{ab}$ (*media geometrică*); $M_a = \dfrac{a+b}{2}$ (*media aritmetică*); $M_p = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (*media pătratică*); $M_{ap} = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ (*media aritmetică ponderată a numerelor a şi b, cu ponderile a, respectiv b*).

Se observă că $a \leq M_g \leq b$ (prima inegalitate revine la $a \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2 \leq ab \Leftrightarrow a \leq b$, iar a doua la $\sqrt{ab} \leq b \Leftrightarrow ab \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b$). Analog se justifică faptul că $a \leq M_a \leq b$. Reţinem, deci, că media geometrică şi media aritmetică a două numere sunt cuprinse între numărul mai mic şi cel mai mare.

Să calculăm acum media aritmetică a numerelor M_h şi M_{ap}: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2ab}{a+b} + \dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(a+b)^2}{a+b} = \dfrac{a+b}{2} = M_a$. Pe de altă parte, este evident că $M_h \leq M_{ap}$, deoarece această inegalitate revine la $2ab \leq a^2+b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$, adevărat. Conform celor de mai sus, obţinem că $M_h \leq M_a \leq M_{ap}$, cu egalitate când $a = b$.

Media geometrică a numerelor M_h şi M_a este $\sqrt{\dfrac{2ab}{a+b} \cdot \dfrac{a+b}{2}} = \sqrt{ab} = M_g$ şi, cum $M_h \leq M_a$, deducem că $M_h \leq M_g \leq M_a$, cu egalitate când $a = b$.

Media geometrică a numerelor M_a şi M_{ap} este $\sqrt{\dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a^2+b^2}{a+b}} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = M_p$. Deoarece $M_a \leq M_{ap}$, rezultă că $M_a \leq M_p \leq M_{ap}$, cu egalitate când $a = b$.

Concluzionăm că, date numerele reale pozitive a şi b, între mediile lor există şirul de inegalităţi

$$M_h \leq M_g \leq M_a \leq M_p \leq M_{ap},$$

care se transformă în egalităţi pentru $a = b$.

[1] Profesor, Şcoala "Alecu Russo", Iaşi

O demonstraţie a teoremei a doua a lui Ptolemeu

Gheorghe COSTOVICI[1]

În [**1**], pag. 134–137, se arată echivalenţa afirmaţiilor:

1) (**prima teoremă a lui Ptolemeu**) *dacă un patrulater este inscriptibil, atunci produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse;*

2) *dacă* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}_+^*)$, *atunci*

$$\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\sin\delta$$

şi apoi, stabilind această identitate, se deduce justeţea primei teoreme a lui Ptolemeu.

Ne propunem un demers similar în privinţa celei de-a doua teoreme a lui Ptolemeu.

Propoziţie. *Dacă* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}_+^*)$, *atunci*

$$\sin(\alpha+\gamma)(\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta)=\sin(\beta+\gamma)(\sin\alpha\sin\delta+\sin\beta\sin\gamma). \tag{1}$$

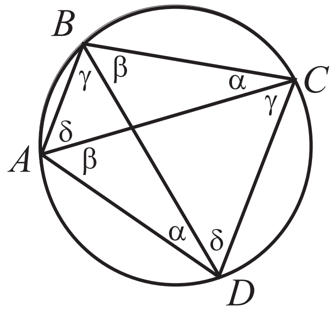
Demonstraţie. Ţinând seama de ipoteză, obţinem:

$$\begin{aligned}4\sin(\alpha+\gamma)(\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta)&=2\sin(\alpha+\gamma)[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)\\&\quad+\cos(\beta-\delta)-\cos(\beta+\delta)]=2\sin(\alpha+\gamma)[\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]\\&=\sin2\alpha+\sin2\gamma+\sin(\alpha+\gamma+\beta-\delta)+\sin(\alpha+\gamma-\beta+\delta)\\&=\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma+\sin2\delta.\end{aligned}$$

La acelaşi rezultat ajungem dacă pornim de la membrul doi al identităţii din enunţ multiplicat cu 4, ceea ce încheie demonstraţia.

Teorema a doua a lui Ptolemeu. *Dacă* $ABCD$ *este un patrulater inscriptibil, atunci are loc relaţia*

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}. \tag{2}$$



Demonstraţie. R fiind raza cercului circumscris patrulaterului, avem: $AB=2R\sin\alpha$, $BC=2R\sin\delta$, $CD=2R\sin\beta$, $DA=2R\sin\gamma$, $AC=2R\sin(\beta+\gamma)$ şi $BD=2R\sin(\alpha+\gamma)$.

Observând că $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$, rezultă că are loc (1), care, prin trecere la laturi pe baza egalităţilor de mai sus, conduce la relaţia de demonstrat.

Observaţie. Propoziţia şi Teorema sunt echivalente, în sensul că se implică una pe alta. Cum s-a văzut că Propoziţia implică Teorema, rămâne de stabilit implicaţia inversă. Fie date $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}_+^*$ cu $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$. Pe un cerc de rază 1 luăm arce de lungimi $2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta$, cu suma egaltă cu 2π (vezi figura). Înlocuind în (2) lungimile AB,BC etc. cu expresiile lor, obţinem imediat relaţia (1).

Bibliografie

1. **I.M. Ghelfand, M. Saul** - *Trigonometry*, Birkhäuser, 2001.

[1]Conf.dr., Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Asupra determinării imaginii unei funcţii de mai multe variabile

Daniel VĂCARU[1]

Vom insista asupra unei metode mai speciale de demonstrare a inegalităţilor, care se pretează la generalizări şi pe care o vom folosi în rezolvarea unor probleme dificile. Primele două aplicaţii pot fi găsite în aproape orice culegere de probleme de algebră pentru liceu, iar următoarele au apărut în ultimul timp în reviste de matematică elementară, ca probleme propuse.

Problema 1. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2z - a > 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Gândim expresia din membrul stâng al inegalităţii din enunţ ca funcţie de variabila reală x, cu y şi z parametri. Prin urmare, vom considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+4x+(y^2+z^2+2y+2z-a)$, pe care o vom deriva, obţinând că $f'(x) = 2x+4$. Cum $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, -2)$, $f'(-2) = 0$ şi $f'(x) > 0$, $\forall x \in (-2, +\infty)$, deducem că $x = -2$ este punct de minim, iar $\mathrm{Im} f = [f(-2), +\infty]$, unde $f(-2) = y^2 + z^2 + 2y + 2z - a - 4$. Dorim ca $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, şi atunci vom impune condiţia $f(-2) > 0$. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = y^2 + 2y + (z^2 + 2z - a - 4)$, cu derivata $g'(y) = 2y + 2$. Obţinem că $y = -1$ este punct de minim al lui g, iar valoarea minimă este $g(-1) = z^2 + 2z - a - 5$. Vrem ca $g(-1) > 0$, $\forall z \in \mathbb{R}$, fapt care conduce la $h(z) > 0$, $\forall z \in \mathbb{R}$, unde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(z) = z^2 + 2z - a - 5$. Deducem, din nou cu ajutorul derivatei, că $h(z) \geq h(-1) = a - 6$ şi cum trebuie verificată condiţia $h(-1) > 0$, obţinem că $a \in (-\infty, -6)$ este condiţie necesară şi suficientă pentru ca inegalitatea din enunţ să aibă loc pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Problema 2. *Pe mulţimea* $G = (-1, 1)$ *se consideră operaţia* $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in G$. *Demonstraţi că* G *este parte stabilă faţă de operaţia definită.*

Soluţie. Pe aceeaşi idee, considerăm funcţia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+y}{1+xy}$, unde $y \in (-1, 1)$ este un parametru. Cum $f'(x) = \dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2} > 0$, $\forall x, y \in (-1, 1)$, deducem că f este strict crescătoare, prin urmare $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) < f(x) < \lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)$, $\forall x \in (-1, 1)$. Dar $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = \dfrac{-1+y}{1-y} = -1$, iar $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \dfrac{1+y}{1+y} = 1$, astfel că $-1 < f(x) < 1$, $\forall x \in (-1, 1)$, adică $x * y \in (-1, 1)$, $\forall x, y \in (-1, 1)$.

Problema 3. *Demonstraţi că* $|-3xy + x + y| \leq 1$, $\forall x, y \in [0, 1]$. (**Ovidiu Pop**, *Problema VIII.82*, RecMat-2/2007, p.151)

Soluţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-3y + 1)x + y$, unde $y \in [0, 1]$. Avem de studiat o funcţie de gradul I pe $\mathbb{R}$. Dacă $y = \dfrac{1}{3}$, funcţia este constant egală

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Zinca Golescu", Piteşti

cu $\frac{1}{3}$, deci $f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, atunci f este strict crescătoare, prin urmare $0 \leq y = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = -2y + 1 \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$. În sfârşit, dacă $y \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$, atunci f este strict descrescătoare, astfel că $-1 \leq -2y + 1 = f(1) \leq f(x) \leq f(0) = y \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Analiza făcută probează cerinţa problemei.

Problema 4. *Demonstraţi că în orice triunghi ABC, cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea*

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{4r - R}{R} \leq \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{a}{2}.$$

(**Alexandru Roşoiu**, *Problema 11306,* American Mahematical Monthly).

Soluţie. Începem prin a nota $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$; evident că $x, y, z > 0$. Atunci

$$\frac{r}{R} = \frac{S}{p} : \frac{abc}{4S} = \frac{4S^2}{pabc} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Inegalitatea din enunţ devine

$$\frac{x+y}{2}\left(\frac{16xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} - 1\right) \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \forall x, y, z > 0.$$

Inegalitatea din dreapta rezultă din inegalitatea mediilor, cu egalitate în cazul în care $x = y$, i.e. $a = b$. Pentru a demonstra inegalitatea din stânga, considerăm funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(z) = 8xy \cdot \frac{z}{(x+z)(y+z)} - \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$. Avem că $f'(z) = 8xy \cdot \frac{-z^2 + xy}{(x+z)^2 \cdot (y+z)^2}$, prin urmare $f'(z) > 0$, $\forall z \in (0, \sqrt{xy})$, $f'(\sqrt{xy}) = 0$ şi $f'(z) < 0$, $\forall z \in (\sqrt{xy}, +\infty)$. Deducem că f are un maxim în $\sqrt{xy}$, iar $f(\sqrt{xy}) = \frac{8xy}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{2}$. Inegalitatea $f(\sqrt{xy}) \leq 0$ revine la $16xy \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4$, care este adevărată conform inegalităţii mediilor. Egalitate se atinge în cazul triunghiului echilateral.

Recreaţii ... matematice

$$
\begin{gathered}
1 \times 1 = 1\\
11 \times 11 = 121\\
111 \times 111 = 12321\\
1111 \times 1111 = 1234321\\
11111 \times 11111 = 123454321\\
111111 \times 111111 = 12345654321\\
1111111 \times 1111111 = 1234567654321\\
11111111 \times 11111111 = 123456787654321\\
111111111 \times 111111111 = 12345678987654321
\end{gathered}
$$

Principiul extremal

Gabriel POPA[1]

Ne vom referi în cele ce urmează la o importantă metodă de raţionament, utilă în soluţionarea unei importante clase de probleme. Ideea este aceea de a ne concentra asupra celui mai mare/mic element al unei mulţimi asociată problemei şi de a vedea ce informaţii oferă acest "element extremal". Exemplul tipic este cel din demonstraţia lui *Euclid* pentru caracterul infinit al mulţimii numerelor prime: se presupune că mulţimea numerelor prime ar fi finită, rezultă existenţa unui cel mai mare număr prim p şi construim un element al mulţimii numerelor prime mai mare decât p. Elevii întâlnesc în şcoală aceeaşi idee atunci când demonstrează iraţionalitatea lui $\sqrt{2}$ sau existenţa celui mai mare divizor comun cu ajutorul algoritmului lui Euclid.

Precizăm că următoarele două tipuri de mulţimi se pretează la aplicarea principiului extremal: 1) *mulţimile finite* de numere reale, care au atât un cel mai mare, cât şi un cel mai mic element şi 2) *submulţimile lui* $\mathbb{N}$, care au întotdeauna un cel mai mic element. În cel de-al doilea caz, principiul îmbracă uneori forma *coborârii infinite*, pe care o vom prezenta mai jos.

Există (cel puţin) trei materiale foarte bune şi accesibile ([**1**], [**2**, pp.15-16], [**3**, pp.53-75]) cu ajutorul cărora se poate realiza familiarizarea cu principiul extremal. Ne propunem să prezentăm alte câteva probleme, care să vină în sprijinul celor interesaţi de acest subiect.

Problema 1. *Într-un turneu de şah, fiecare dintre jucători dispută câte o partidă cu fiecare dintre ceilalţi. Ştiind că nu se înregistrează nicio remiză şi că fiecare participant obţine cel puţin câte o victorie, demonstraţi că există un grup de trei şahişti A, B, C astfel încât A îl învinge pe B, B îl învinge pe C şi C îl învinge pe A.* (*Olimpiadă Irlanda, 2004*)

Soluţie (**Titu Zvonaru**). Fie $P_1, P_2, \ldots, P_n$ şahiştii care participă la turneu şi notăm cu a_i numărul învinşilor jucătorului P_i. Din ipoteza problemei, avem că $a_i \geq 1$, $\forall i = \overline{1,n}$. Mulţimea finită $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ are un cel mai mic element; putem presupune că acesta este a_1 şi fie $P_2, P_3, \ldots, P_{a_1+1}$ şahiştii pe care îi învinge P_1. Cum $a_1 \leq a_2$, există un participant P_k învins de către P_2, unde $k \geq a_1 + 2$. Considerând $A = P_1$, $B = P_2$ şi $C = P_k$, avem îndeplinită cerinţa problemei.

Problema 2. *Spunem că o mulţime $M \subset \mathbb{R}_+$ are proprietatea (P) dacă orice element al lui M este media geometrică a două elemente distincte ale lui M.*

a) O mulţime cu 2005 elemente poate avea proprietatea (P)?

b) Arătaţi că există o infinitate de mulţimi cu proprietatea (P).

(**Gabriel Popa şi Paul Georgescu**, *Recreaţii Matematice-2/2005,* p.170)

Soluţie. a) În general, nicio mulţime finită M nu poate avea proprietatea (P). Într-adevăr, dacă M este o mulţime finită, atunci M are un cel mai mare element, fie acesta a. Dacă a ar fi media geometrică a elementelor $b, c \in M$, cu $b < c$, ar trebui să avem $b < a < c$. Astfel, c este un element al lui M strict mai mare decât a şi se ajunge la o contradicţie.

[1]Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

b) Se observă că pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, mulţimea $M_x = \{x^n | n \in \mathbb{Z}\}$ are proprietatea (P), deoarece $x^n = \sqrt{1 \cdot x^{2n}}$, $n \in \mathbb{Z}^*$, iar $1 = \sqrt{x^n \cdot x^{-n}}$.

Problema 3. *Spunem că o mulţime $A \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea (P) dacă $\forall a, b \in A$, există $c \in A\backslash\{a, b\}$ astfel încât a, b, c să fie lungimile laturilor unui triunghi.*

a) $\mathbb{N}^*$ are proprietatea (P)?

b) Demonstraţi că există o infinitate de mulţimi având proprietea (P).

(**Gabriel Popa**, *Concursul "Radu Miron"*, 2003)

Soluţie. a) Vom lua în considerare cel mai mic element al lui $\mathbb{N}^*$, anume pe 1. Dacă $b, c \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $b \neq c$, este evident că numerele $1, b, c$ nu pot fi lungimile laturilor unui triunghi (dacă $b < c$, atunci $1+b \leq c$ şi este contrazisă inegalitatea triunghiului).

b) Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, atunci mulţimea $A_n = \{2, 3, \ldots, n\}$ are proprietatea (P). Într-adevăr, dacă $a, b \in A$ şi $a \leq b-2$, putem considera $c = b-1$, iar dacă $a = b-1$, luăm convenabil $c \in \{b-2, b+1\}$.

Problema 4. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi A mulţimea numerelor naturale cel puţin egale cu 2, care sunt relativ prime cu fiecare dintre numerele $1, 2 \ldots, n$. Demonstraţi că A nu poate conţine doar numere compuse.*

Soluţie. Cum A este o mulţime de numere naturale, va conţine un cel mai mic element, fie acesta p. Vom demonstra că p este prim, de unde concluzia problemei. Pentru aceasta, să presupunem prin absurd că p nu ar fi prim; cum $p \geq 2$, înseamnă că este compus, prin urmare există q prim şi $k \geq 2$ astfel încât $p = q \cdot k$. Numărul prim q nu divide niciunul dintre numerele $1, 2 \ldots, n$ şi atunci $q \in A$. Pe de altă parte, $q < p$, ceea ce contrazice faptul că p este cel mai mic element al lui A.

Problema 5. *Fie x, y, z trei numere prime distincte. Demonstraţi că $30(xy + yz + zx) \leq 31xyz$.*

(**Marius Ghergu**, *Concursul "Florica T. Câmpan"*, 2005)

Soluţie. Încercăm să folosim buna ordonare a mulţimii numerelor prime. Împărţind ambii membri prin $30xyz$, inegalitatea dată se scrie echivalent sub forma $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{31}{30}$. Cum valorile minime ale numerelor prime distincte x, y, z sunt 2, 3 şi 5, valoarea maximă a sumei $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ este $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$, fapt care încheie rezolvarea problemei.

Problema 6. *Pe tablă sunt scrise numerele $\sqrt{3}-1$, $\sqrt{3}+1$ şi 2. Se şterg numerele şi se scriu în locul lor cele trei medii geometrice a câte două dintre numerele iniţiale. Procedeul se repetă cu noile numere. Este posibil ca, după mai mulţi paşi, să avem pe tablă $2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$ şi 4?*

(**Monica Nedelcu**, *Concursul "Florica T. Câmpan"*, 2007)

Soluţie. Teoretic, asemenea probleme se rezolvă folosind principiul invariantului; în cazul problemei date, încercările de a găsi un invariant (sau măcar un semiinvariant) nu dau prea repede roade! Observăm însă că, întrucât media geometrică a două numere distincte este strict cuprinsă între numărul mai mic şi cel mai mare, numărul maxim de pe tablă scade la fiecare repetare a operaţiei. Iniţial, acest maxim era

$\sqrt{3}+1$ şi deducem că nu vom putea face în aşa fel încât pe tablă să apară numărul mai mare 4.

Problema 7. *Demonstraţi că nu există triunghiuri dreptunghice având catetele numere raţionale, iar ipotenuza egală cu* $\sqrt{2001}$.

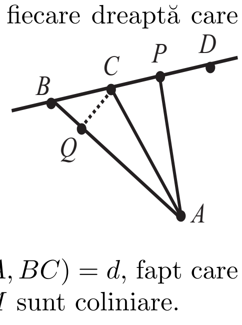
(**Constantin Cocea**, *RecMat-1/2002*, p.81)

Soluţia. Pentru a arăta că ecuaţia $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{z^2}{u^2}=2001$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$, este suficient să demonstrăm că ecuaţia $m^2+n^2=2001p^2(*)$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$. Vom utiliza *metoda coborârii*, o variantă a principiului extremal. Presupunem că ecuaţia $(*)$ are soluţii în $\mathbb{N}^*$. Cum $\mathbb{N}^*$ este bine ordonată, putem considera acea soluţie pentru care p este minim. Observăm că $3|m^2+n^2$ (deoarece 2001 se divide cu 3) şi atunci m şi n sunt multipli de 3, după cum se poate uşor demonstra. Fie $m=3m_1$, $n=3n_1$ cu $m_1,n_2\in\mathbb{N}^*$; din $(*)$ obţinem că $3(m_1^2+n_1^2)=667p^2$ şi, cum $(3,667)=1$, atunci $p=3p_1$, $p_1\in\mathbb{N}^*$. După înlocuire, $m_1^2+n_1^2=2001p_1^2$, prin urmare (m_1,n_1,p_1) este o nouă soluţie a ecuaţiei $(*)$, cu $p_1<p$. Am contrazis astfel minimalitatea asumată a lui p şi urmează că ecuaţia $(*)$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$.

Problema 8. *Se consideră şase discuri astfel încât frontierele lor au un punct comun. Demonstraţi că există o pereche de discuri astfel încât unul dintre ele conţine centrul celuilalt.*

Soluţie. Fie $O_1,O_2,\ldots,O_6$ centrele celor şase discuri, iar A punctul comun al frontierelor lor. Considerăm toate unghiurile cu vârful în A şi având ca laturi semidrepte de forma $[AO_i, i=\overline{1,6}$. Dacă unul dintre aceste unghiuri este nul, cerinţa problemei este imediată. Dacă toate sunt nenule, considerăm un unghi de măsură minimă, fie acesta $\widehat{O_1AO_2}$. Presupunând, fără a restrânge generalitatea, că $AO_2\geq AO_1$, vom avea că $m(\widehat{O_1AO_2})\leq 60^\circ$, $m(\widehat{AO_1O_2})\geq 60^\circ$, prin urmare $O_1O_2\leq AO_2$ şi astfel deducem că O_1 aparţine discului de centru O_2.

Problema 9. *Fie M o mulţime finită de puncte din plan cu proprietatea că orice dreaptă care uneşte două puncte ale lui M conţine cel puţin trei puncte din M. Demonstraţi că toate punctele din M sunt coliniare.* (**Sylvester**)



Soluţie. Calculăm distanţele de la fiecare punct din M la fiecare dreaptă care uneşte două puncte din M. Să presupunem că există astfel de distanţe nenule; cum numărul lor este finit, există o asemenea distanţă care este cea mai mică. Notăm această distanţă cu d şi să zicem că $d=\mathrm{dist}(A,BC)$, cu $A,B,C\in M$. Conform ipotezei, mai există un punct $D\in BC$. Notăm cu P piciorul perpendicularei din A pe BC; măcar două dintre punctele B,C şi D sunt de aceeaşi parte a lui P şi să presupunem că acestea sunt B şi C, cu $C\in(PB)$. În aceste condiţii, $\mathrm{dist}(C,AB)<d(A,BC)=d$, fapt care contrazice minimalitatea lui d. Rămâne că toate punctele din M sunt coliniare.

Propunem spre rezolvare câteva probleme, bazate pe aceeaşi idee.

Problema 10. *Şase unghiuri în jurul unui punct au proprietatea că diferenţa măsurilor oricăror două unghiuri consecutive este de* 2°*. Determinaţi măsurile unghiurilor.*

(**Dragoş Moldoveanu**, *O.M., etapa locală, Prahova,* 2008)

Problema 11. *Interiorul unui pătrat este descompus într-un număr finit de pătrate mai mici, cu ajutorul unor paralele duse la laturile sale. Demonstraţi că măcar două dintre pătratele descompunerii au laturile de lungimi egale.*

Problema 12. *Fie suma* $S = \frac{1}{39} + \frac{1}{40} + \frac{1}{41} + \ldots + \frac{1}{50}$*. Dacă* S *se scrie ca fracţie ireductibilă sub forma* $\frac{p}{q}$*, demonstraţi că* $p \vdots 89$*, iar* $q \vdots 2$*.* (*O.M., etapa locală, Iaşi, 2007*)

Problema 13. *Fie* x, y, z *trei numere prime distincte. Să se demonstreze că* $3(x+y)(y+z)(z+x) < x^2y^2z^2$*.* (*Concursul "Florica T. Câmpan",* 2005)

Problema 14. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$*. Demonstraţi că oricum am alege* $B \subset A$ *cu* $|B| = n + 1$*, fie putem selecta trei elemente ale lui* B *cu proprietatea că unul dintre ele este egal cu suma celorlaltor două, fie putem selecta două elemente ale lui* B*, unul fiind dublul celuilalt.*

Problema 15. *Rezolvaţi în* $\mathbb{Z}$ *ecuaţia* $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = x^2y^2z^2$*.*

(**Dan Radu**, *G.M.-A,3/2007*)

Problema 16. *Determinaţi mulţimea numerelor naturale* n *pentru care există* n *cercuri în plan cu interioarele disjuncte, fiecare dintre ele tangent la cel puţin alte şase cercuri dintre cele* n*.*

(**Luis Funar**, *Concurs R.M.T., ediţia a V-a*)

Problema 17. *În sistemul solar Câinele Verde sunt* 2001 *planete. Pe fiecare dintre aceste planete este câte un astronom care se uită prin telescop la planeta cea mai apropiată. Dacă distanţele reciproce dintre planete sunt diferite, demonstraţi că există o planetă la care nu se uită nimeni.*

(**Daniel Stretcu**, *E:13684, G.M. 7-8/2008,* p.400; [**2**], *4.3,* p.15)

Nu putem încheia fără a mulţumi domnului **Mircea Lascu**, la insistenţele căruia am scris această notă.

Bibliografie

1. <*Principiul extremal*>, http://math.ournet.md/competitiva/extrem/extrem.html
2. **N. Agahanov, O. Podlipsky** - *Olimpiadele matematice ruseşti*, GIL, Zalău, 2004.
3. **A. Engel** - *Probleme de matematică-Strategii de rezolvare*, GIL, Zalău, 2006.
4. **N.N. Hârţan** - *Matematică pentru clasa a V-a*, Moldova, Iaşi, 1995.
5. **E.A. Morozova, I.S. Petrakov, V.A. Skvorţov** - *Olimpiadele internaţionale de matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978.

Profesorul Constantin E. Popa la şaizeci de ani

Anul trecut un bun coleg şi, în acelaşi timp, bun prieten a împlinit vârsta de şaizeci de ani.

Folosesc acest rotund prilej spre a supune atenţiei momentele semnificative ale activităţii unui dascăl deosebit, pentru care munca la catedră a însemnat întotdeauna dăruire, profesionalism şi, lucru destul de rar în zilele noastre, multă modestie.

S-a născut la 13 octombrie 1948 în comuna Avrămeşti din judeţul Vaslui. A urmat cursurile şcolii primare şi gimnaziale la Puieşti. Absolvent al Liceului Teoretic din Puieşti, promoţia 1966, urmează Institutul Pedagogic din Iaşi pe care-l absolvă în 1969 şi apoi cursurile Facultăţii de Matematică din cadrul Universităţii "Alexandru Ioan Cuza", tot din Iaşi.

Preocupat constant de continua sa pregătire metodico-ştiinţifică, profesorul **Constantin Popa** promovează cu succes toate examenele de grad (definitivare în 1972, gradul didactic II în 1978 şi gradul didactic I în 1983).

Cartea de muncă a dlui profesor îl menţionează ca profesor la şcoala generală din Rădeşti în anul şcolar 1969-1970. În anul şcolar următor îl găsim la Liceul de Cultură Generală din Puieşti, iar în perioada 1971-1975 la Şcoala Generală din Lăleşti.

În 1975 îşi satisface stagiul militar şi apoi este angajat profesor titular la Grupul Şcolar Industrial Bârlad, ca urmare a promovării concursului de ocupare a catedrelor. După doi ani este transferat la Liceul "Gheorghe Roşca Codreanu" - actualul Colegiu Naţional - unde funcţionează cu succes şi în prezent.

În anul şcolar 1990-1991 este numit director adjunct, iar în perioada 1991-1995 funcţionează ca director. Este eliberat din funcţie la cerere, caz oarecum singular pentru vremurile în care situaţia cel mai des întâlnită este aceea a omului care ţine la funcţie. În anul 2002 este numit în funcţia de director adjunct cu delegaţie şi apoi ocupă postul prin concurs până în 2006.

Cariera didactică a profesorului Popa este marcată de rezultate excepţionale. Clasele cu care a lucrat au avut întotdeauna rezultate deosebite la concursurile şcolare, la examenele de absolvire (bacalaureat şi capacitate) şi la examenele de admitere la obiectul matematică.

Pot afirma cu certitudine că cele mai bune rezultate obţinute în ultimii 25 de ani de către elevii Colegiului Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu" au fost realizate sub îndrumarea profesorului Constantin Popa. În ultimii zece ani patru dintre foştii săi elevi, absolvenţi ai facultăţilor de matematică din ţară, au obţinut titlul de doctor în matematică; este vorba despre *Cătălin Trenchea* (doctorat obţinut la Universitatea "Al. I. Cuza" din Iaşi), *Cristian Mardare* (doctorat obţinut la Sorbona), *Constantin C. Popa* (fiul dlui profesor; doctorat obţinut la Institutul Weissman din Israel) şi *Marius Tărnăuceanu* (doctorat la Universitatea "Ovidius" din Constanţa). Şi, tot ca o dovadă a talentului profesorului Popa de a genera profesionişti în domeniu, să mai spunem că opt dintre elevii unei clase care a absolvit acum câţiva ani sunt astăzi profesori de matematică. De asemenea, elevul *Andrei Carp*, absolvent din 2006, actualmente student la Facultatea de Automatizări din Universitatea Politehnică din Bucureşti se află abia la începutul drumului: el a participat la Balcaniada de Matematică a studenţilor. Şi să nu uităm un alt rezultat excepţional: ca elev, Marius Tărnăuceanu a fost component al lotului olimpic lărgit al României pentru Olimpiada Internaţională de Matematică.

Fără îndoială că mai există profesori cu asemenea palmares. Eu vreau însă să subliniez bucuria de a întâlni şi de a lucra cu un om dăruit de Dumnezeu cu mult har şi cu deosebită inteligenţă, pe care a ştiut să le folosească, ”înmulţind talanţii”.

Nu este deloc lipsit de importanţă să semnalăm şi una din cele mai mari realizări ale domnului **C. Popa** ca director: reparaţiile capitale la care a fost supusă clădirea străveche a şcolii noastre s-au realizat în cea mai mare parte sub conducerea domniei sale. Sper ca în felul acesta să înlăturăm o mare nedreptate, pentru că la festivităţile care au avut loc cu ocazia împlinirii a 150 de ani de la înfiinţarea liceului, când dealtfel s-au finalizat lucrările de consolidare, nici măcar nu i-a fost pomenit numele.

Personal am avut dintotdeauna o relaţie specială cu domnul profesor Popa. Îmi amintesc cu mare bucurie de discuţiile noastre despre matematică, dar şi despre viaţă. În anul 1979, proaspăt absolvent al Facultăţii de Matematică, am fost repartizat la Liceul ”Gheorghe Roşca Codreanu”, ca profesor de Rezistenţa Materialelor şi Organe de Maşini (!), deşi erau ore de matematică disponibile. Sfătuit de profesorul C. Popa, am plecat la Ministerul Învăţământului, unde am prezentat situaţia. Ca urmare a acestui demers şi conform legii, în următorul an şcolar am fost titularizat pe o catedră de matematică.

Mărturisesc că am apreciat încă de la început calităţile domnului profesor **Constantin Popa** şi că, pentru mine, domnia sa a fost mereu un model de seriozitate, conştiinciozitate şi profesionalism; nu pot decât să regret că nu sunt suficiente cuvintele pentru a exprima în profunzime acest lucru.

Portretul domnului profesor nu poate fi complet dacă nu evidenţiem armonia din viaţa sa de familie; poate că multe din cele menţionate mai sus nu s-ar fi putut realiza fără sprijinul discret şi permanent al soţiei domniei sale, doamna *Mariana Popa*. S-au completat atât de firesc de-a lungul timpului şi sunt părinţii a doi copii cu educaţie aleasă: Constantin Popa - doctor în matematică (aşa cum am mai spus) şi Elena Popa - medic.

Închei aici - deşi ar mai fi destule de povestit - mai spunând că sunt bucuros şi fericit că am lucrat şi lucrez la Colegiul Naţional ”Gheorghe Roşca Codreanu” cu oameni deosebiţi; doar câteva nume, pe lângă cel al profesorului Popa: Bernard Perl, Constantin Iancu, Petru Sava, Ion Luchian, Răzvan Ionescu, Vasile Ţugulea, Rodica Popovici, Gabi Ghidoveanu, Marian Tetiva, Dănuţ Mihai, Anişoara Creţu.

Cu mulţumiri colegei *Gabi Ghidoveanu* pentru adăugiri, limpeziri şi organizarea materialului.

Dumitru MIHALACHE
Colegiul Naţional ”Gh. Roşca Codreanu”, Bârlad

Concursul "Recreaţii Matematice" Ediţia a VI-a, Muncel (Iaşi), 26 august 2008

Clasa a VI-a

1. Determinaţi ultimele două cifre ale numărului $A = 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 1999 \cdot 2011$. (Numărul A reprezintă produsul tuturor numerelor naturale mai mici decât 2012 care dau restul 7 la împărţirea cu 12.)

2. Se consideră şirul de numere naturale $1, 1, 2, 5, 12, 27, 58, \ldots$ Calculaţi suma primilor 100 de termeni ai şirului.

3. Pe o masă sunt mai multe bomboane, iar în jurul mesei sunt aşezaţi mai mulţi elevi. Primul elev ia de pe masă $\frac{1}{15}$ din numărul de bomboane; al doilea ia $\frac{1}{15}$ din numărul bomboanelor rămase şi încă $\frac{1}{15}$ din numărul de bomboane luate de primul elev. Al treilea elev ia $\frac{1}{15}$ din numărul de bomboane rămase şi încă $\frac{1}{15}$ din numărul de bomboane luate de primul şi al doilea elev împreună etc. Procedeul continuă până când ultimul elev reuşeşte să ia ultimele bomboane de pe masă, după regula de mai sus. Aflaţi numărul de elevi.

Clasa a VII-a

1. Determinaţi $p \in \mathbb{N}$ pentru care numerele $p, p+12, p+22, p+52, p+72, p+102$ şi $p+132$ sunt prime.

2. Alegeţi în faţa fiecăruia dintre numerele 1, 2, 3, ..., 2009 unul dintre semnele $+$ sau $-$ astfel încât numărul $A = |\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm 2009|$ să ia cea mai mică valoare posibilă.

3. Fie unghiul $\sphericalangle AOB$ având măsura de $120°$, iar P un punct pe bisectoarea sa astfel încât $OP = OA + OB$. Să se arate că triunghiul PAB este echilateral.

Clasa a VIII-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^4 + 4y^4 = 2z^4 + 8u^4$.

2. Determinaţi numerele întregi a, b, c, d pentru care $ac + bd = 1$ iar $ad + bc = 2$.

3. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^o$ şi $D \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle CAD) = 30^o$ şi $CD = AB = 1$. Să se calculeze lungimea segmentului $[BC]$, ştiind că aceasta este un număr natural nenul.

Clasa a IX-a

1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2\}$. Determinaţi n, ştiind că există o funcţie $f : A \to A$ astfel încât $f(x) - f(y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, $\forall x, y \in A$.

2. Arătaţi că $x + y + z - xy - yz - zx \leq 1, \forall x, y, z \in [0; 1]$.

3. Fie $M \in \mathrm{Int}(\Delta ABC)$. Dacă P este perimetrul $\triangle ABC$, demonstraţi că

$$\frac{P}{2} < MA + MB + MC < P.$$

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] = 11 \cdot \left[\frac{n}{36}\right].$$

(s-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x).

2. Fie punctul M interior triunghiului ABC şi fie $AM \cap BC = \{A'\}, BM \cap AC = \{B'\}, CM \cap AB = \{C'\}$. Se notează cu S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 şi S_6 ariile triunghiurilor $MA'B, MA'C, MB'C, MB'A, MC'A$, respectiv, $MC'B$. Să se demonstreze că

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 3$$

dacă şi numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie surjectivă şi strict crescătoare. Să se determine funcţiile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $g(f(x)) \leq x \leq f(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Apoi, să se determine g dacă $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x, x \in \mathbb{R}$.

Clasa a XI-a

1. Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $|3^{-x} - 4| - \left|x^3 - 3\right| = a\left(x^3 - 3^{-x} + 1\right)$, unde $a > 1$, fixat.

2. Fie n puncte pe un cerc, cu proprietatea că oricare două coarde cu extremităţile în cele n puncte nu sunt paralele şi oricare trei nu sunt concurente într-un punct situat în interiorul cercului. Să se determine numărul de regiuni din interiorul cercului delimitate de laturile şi diagonalele poligonului convex care are ca vârfuri cele n puncte date, $n \geq 4$.

3. Să se calculeze suma $S(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} C_{n+k}^{k}$.

Clasa a XII-a

1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{\ln x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n$.

2. Cercetaţi dacă există $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det(A + 2005B) = 0$ şi $\det(A + 2007B) = 2009$.

3. Se consideră o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

(i) funcţia f are limite laterale în orice punct $a \in \mathbb{R}$ şi

$$f(a - 0) \leq f(a) \leq f(a + 0);$$

(ii) pentru orice $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, avem $f(a - 0) < f(b - 0)$.

Să se arate că f este strict crescătoare.

Concursul omagial "Recreaţii Ştiinţifice"

Rezultatul concursului

Amintim punctajul pe baza căruia s-au acordat premiile:
- fiecare problemă este notată maxim cu 10 puncte;
- se acordă câte 2 puncte în plus pentru alte soluţii, generalizări etc.;
- se depunctează soluţiile incomplete sau redactate neîngrijit.

A treia problemă a concursului a apărut enunţată în nr. 2/2008, p.182, cu o greşeală de tipărire în formula de stabilit; formula corectă este
$$\mathrm{tg}\widehat{IOI'} = \frac{2\left|\sin B - \sin C\right|}{2\cos A - 1},$$
cum este dată în *Recreaţii Ştiinţifice*, t.VI(1888), p.96, şi nu cu numitorul $2\cos B - 1$, cum apare în locul menţionat.

Ca urmare, această problemă a fost retrasă, în concurs rămânând numai patru probleme. Ne cerem scuze pentru acest incident regretabil.

Doi concurenţi au îndeplinit condiţiile de premiere:
- **CĂPĂŢÂNĂ Roxana**, cl. a IX-a, Colegiul Naţional din Iaşi;
- **TIBA Marius**, cl. a X-a, Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti,

amândoi cu acelaşi punctaj: 38 puncte din 40 posibile.

Comisia de concurs a hotărât ca, în această situaţie de egalitate a punctajului obţinut, să acorde **premiul I** acestor concurenţi (iniţial era prevăzut un singur premiu I). Premiul I constă dintr-o **diplomă** şi suma de **200 lei.**

Rezolvarea problemelor

1. *Ion şi Constantin merg la cumpărături cu soţiile lor, Maria şi Elena. Fiecare din aceste patru persoane cumpără un număr de obiecte ce le plăteşte pe fiecare cu atâţia lei câte obiecte a cumpărat. Ion cumpără nouă obiecte mai mult decât Elena şi fiecare soţ cheltuieşte cu 21 lei mai mult decât soţia sa. Care este soţia lui Ion şi care este a lui Constantin? Care este numărul de obiecte cumpărate de fiecare dintre aceste persoane? Care este suma cheltuită de fiecare dintre ele?*

Recreaţii Ştiinţifice, I(1883)-*Problema 50,* p.279

Soluţie (*ibidem*, p.279). Notăm cu x numărul obiectelor cumpărate de un bărbat şi cu y cel cumpărat de soţia lui. Din enunţul problemei rezultă că
$$x^2 - y^2 = 21 \quad \text{sau} \quad (x+y)(x-y) = 21,$$
ecuaţie echivalentă cu următoarele două sisteme:
$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x+y=21 \\ x-y=1 \end{cases}.$$
Primul sistem are soluţia $x = 5$, $y = 2$, iar al doilea $x = 11$, $y = 10$. Aşadar, un bărbat a cumpărat 5 obiecte şi celălalt 11 obiecte, iar o femeie a cumpărat 2 şi cealaltă 10.

Cum, din enunţ, Ion cumpără 9 obiecte mai mult decât Elena, rezultă că Ion cumpără 11 obiecte, Elena 2 obiecte, Constantin 5 şi Maria 10.

Ca urmare, Ion a cheltuit $11^2 = 121$ lei, Constantin $5^2 = 25$ lei, Elena $2^2 = 4$ lei şi Maria $10^2 = 100$ lei.

În sfârşit, din condiţiile problemei deducem că Maria este soţia lui Ion şi Elena a lui Constantin.

2. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii*

$$
\begin{aligned}
&(x+2y)\,(x+2z)=a,\\
&(y+2x)\,(y+2z)=b,\\
&(z+2x)\,(z+2y)=c \qquad (0<a<b<c)\,.
\end{aligned}
$$

Recreaţii ştiinţifice, IV(1886)-*Problema 209,* p.144

Soluţie (*Recreaţii Ştiinţifice*, t.V, p.18 – schiţă de soluţie). Utilizând identitatea $mn=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$ şi notând $t=(x+y+z)^2$, putem scrie sistemul în forma

$$
\begin{cases} t-(y-z)^2=a\\ t-(z-x)^2=b\\ t-(x-y)^2=c \end{cases} \qquad \text{sau} \qquad \begin{cases} |y-z|=\sqrt{t-a}\\ |z-x|=\sqrt{t-b}\\ |x-y|=\sqrt{t-c}, \end{cases}
$$

cu $t>c$ ($t=c$ ar implica $a=b$). Explicitarea valorilor absolute conduce la opt cazuri (+ inseamnă că expresia ”dintre bare” rămâne neschimbată, iar $-$ spune că aceasta se ia cu semn schimbat):

$$
I\begin{cases}+\\+\\+\end{cases},II\begin{cases}+\\+\\-\end{cases},III\begin{cases}+\\-\\+\end{cases},IV\begin{cases}+\\-\\-\end{cases},V\begin{cases}-\\+\\+\end{cases},VI\begin{cases}-\\+\\-\end{cases},VII\begin{cases}-\\-\\+\end{cases},VIII\begin{cases}-\\-\\-\end{cases}.
$$

Cazurile I şi VIII. Adunând cele trei ecuaţii, suntem conduşi la ecuaţia în t

$$\sqrt{t-a}+\sqrt{t-b}+\sqrt{t-c}=0, \quad t>c,$$

care nu are soluţii pe mulţimea $t>c$. Ca urmare, sistemele I şi VIII nu au soluţii.

Cazurile II şi VII. În acelaşi mod, obţinem ecuaţia

$$\sqrt{t-a}+\sqrt{t-b}=\sqrt{t-c}, \quad t>c,$$

care nu are soluţii, căci, din $0<a<b<c$, avem $\sqrt{t-c}<\sqrt{t-a}$.

Cazurile III şi VI. Se obţine ecuaţia

$$\sqrt{t-a}+\sqrt{t-c}=\sqrt{t-b}, \quad t>c,$$

şi, ca în cazul precedent, se consată că nu avem soluţii.

Cazurile IV şi V. Obţinem, pe mulţimea $t>c$, ecuaţia

$$\sqrt{t-b}+\sqrt{t-c}=\sqrt{t-a} \quad \text{sau} \quad 2\sqrt{t-b}-\sqrt{t-c}=b+c-a-t,$$

care, pentru t verificând condiţiile $c<t<b+c-a$, este echivalentă cu

$$4(t-b)(t-c)=t^2-2(b+c-a)t+(b+c-a)^2$$

sau

$$3t^2-2(a+b+c)t+4bc-(b+c-a)^2=0$$

(menţionăm că nu putem avea $t=b+c-a$ fără a fi în contradicţie cu $0<a<b<c$). Această ecuaţie de gradul al doilea are rădăcinile

$$t_{\pm} = \frac{1}{3}[(a+b+c) \pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}].$$

Vom vedea că numai t_+ verifică condiţiile $c < t < b+c-a$. Într-adevăr, avem

$$t_{\pm} > c \;\Leftrightarrow\; \pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} > 2c-a-b$$

şi, cum $2c-a-b > 0$, urmează că rădăcina t_- trebuie exclusă. În privinţa lui t_+, ridicând la pătrat şi operând reduceri, obţinem $a^2+b^2 > 2ab$, care este adevărată, căci $a < b$. Deci $t_+ > c$ şi rămâne de văzut că are loc şi inegalitatea $t_+ < b+c-a$: $t_+ < b+c-a \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} < b+c-2a \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (b-a)(c-a) > 0$, ceea ce este adevărat.

Să revenim la rezolvarea sistemelor IV şi V, adică

$$IV \begin{cases} y-z = \sqrt{t-a} \\ z-x = -\sqrt{t-b} \\ x-y = -\sqrt{t-c} \end{cases} \quad \text{şi} \quad V \begin{cases} y-z = -\sqrt{t-a} \\ z-x = \sqrt{t-b} \\ x-y = \sqrt{t-c}, \end{cases}$$

cu $3t = (a+b+c) + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$.

Mai întâi, amintindu-ne că am notat $(x+y+z)^2 = t$, deducem că $x+y+z = \pm\sqrt{t}$. Pentru a rezolva sistemul IV procedăm astfel: aflăm x înlocuind în această ultimă egalitate pe y şi z daţi de ultimele două ecuaţii ale sistemului IV, iar y şi z se găsesc în mod similar; obţinem următoarele două soluţii:
$3x = \pm\sqrt{t}+\sqrt{t-b}-\sqrt{t-c}$, $3y = \pm\sqrt{t}+\sqrt{t-a}+\sqrt{t-c}$, $3z = \pm\sqrt{t}-\sqrt{t-a}-\sqrt{t-b}$.
Analog, sistemul V are soluţiile:
$3x = \pm\sqrt{t}-\sqrt{t-b}+\sqrt{t-c}$, $3y = \pm\sqrt{t}-\sqrt{t-a}-\sqrt{t-c}$, $3z = \pm\sqrt{t}+\sqrt{t-a}+\sqrt{t-b}$,
cu $3t = (a+b+c) + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$.

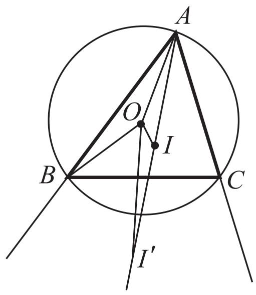
În concluzie, sistemul dat are patru soluţii, două câte două opuse (adică, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluţie, atunci şi $(-x_0, -y_0, -z_0)$ este soluţie a sistemului).

3. *Fie O, I, I' centrele cercului circumscris triunghiului ABC, cercului înscris acestuia şi, respectiv, al cercului exînscris tangent laturii BC. Să se demonstreze că*

$$\text{tg}\widehat{IOI'} = \frac{2\,|\sin B - \sin C|}{2\cos A - 1}.$$

Recreaţii Ştiinţifice, VI(1888)-*Problema 285,* p.96

Soluţie (*ibidem*, p.273). Dacă O se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{A}$, atunci $\triangle ABC$ este isoscel (cu vârful în A). Excludem acest caz banal. De asemenea, cu teorema lui Pitagora şi calcule de rutină, avem: $m(\widehat{IOI'}) = 90° \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 60° \Leftrightarrow 2\cos A - 1 = 0$ şi formula are loc. Apoi, dacă $\widehat{C} > \widehat{B}$, atunci O se află în semiplanul determinat de dreapta II' care nu conţine vârful C (chiar dacă $\widehat{A}$ sau $\widehat{C}$ este obtuz).



În $\triangle OII'$, cu teorema cosinusului, avem:

$$\cos\widehat{IOI'} = \frac{OI^2 + OI'^2 - II'^2}{2OI \cdot OI'}.$$

Pe de altă parte, cu teorema sinusurilor aplicată $\triangle OII'$ şi $\triangle OI'A$, avem:

$$\sin\widehat{IOI'} = \frac{II' \cdot \sin\widehat{OI'I}}{OI} = \frac{R \cdot II' \cdot \sin\widehat{OAI}}{OI \cdot OI'}.$$

Ca urmare, obţinem că

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \widehat{IOI'} = \frac{2R \cdot II' \cdot \sin \widehat{OAI}}{OI^2 + OI'^2 - II'^2}.$$

În $\triangle AOI$ şi $\triangle AOI'$ avem relaţiile: $OI^2 = R^2 + AI^2 - 2R \cdot AI \cdot \cos \widehat{OAI}$ şi $OI'^2 = R^2 + AI'^2 - 2R \cdot AI' \cdot \cos \widehat{OAI}$, care, înlocuite în (1), conduc la

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \widehat{IOI'} = \frac{R \cdot II' \cdot \sin \widehat{OAI}}{R^2 + AI \cdot AI' - R(AI + AI') \cos \widehat{OAI}}.$$

Pentru AI, AI' şi II' se cunosc sau se stabilesc uşor formulele următoare:

$$(3) \qquad AI = \frac{p-a}{\cos \frac{A}{2}}, \quad AI' = \frac{p}{\cos \frac{A}{2}}, \quad II' = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Să mai observăm că, dacă $\widehat{C} > \widehat{B}$, vom avea

$$m(\widehat{OAI}) = \frac{A}{2} - m(\widehat{OAB}) = \frac{A}{2} - \frac{1}{2}(\pi - 2C) = \frac{C-B}{2},$$

iar, dacă $\widehat{B} > \widehat{C}$, vom obţine $m(\widehat{OAI}) = \dfrac{B-C}{2}$. Aşadar, în ambele cazuri, avem

$$(4) \qquad m(\widehat{OAI}) = \frac{|B-C|}{2}.$$

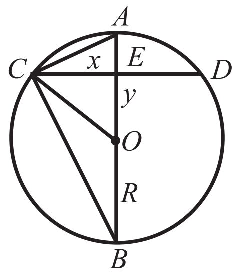
Nu mai rămâne decât să înlocuim în (2) expresiile mărimilor ce intervin, date de (3) şi (4), şi să facem calcule de rutină pentru a ajunge la rezultatul dorit.

Notă. Această problemă a fost rezolvată de *Vasile Cristescu*, viitorul fondator şi unul dintre cei patru "stâlpi" ai *Gazetei Matematice.*

4. *Să se taie o sferă cu un plan astfel încât diferenţa volumelor conurilor drepte ce au ca baze secţiunea planului cu sfera şi vârfurile pe sferă să fie maximă.*

Recreaţii Ştiinţifice, IV(1886)-*Problema 227,* p.288

Soluţie. (*Recreaţii Ştiinţifice*, t. V, pp.89, 113, 277). Să notăm cu x raza bazei conurilor şi cu y distanţa centrului sferei la planul de secţiune. Înălţimile conurilor fiind $R+y$ şi $R-y$, unde R notează raza sferei, diferenţa V a a volumelor conurilor este dată de formula



$$V = \frac{1}{3}\pi x^2(R+y) - \frac{1}{3}\pi x^2(R-y) = \frac{2}{3}\pi x^2 y.$$

Având în vedere că $x^2 = (R+y)(R-y)$ (teorema înălţimii), obţinem că

$$V = \frac{2}{3}\pi y(R^2 - y^2).$$

Valoarea y pentru care V este maxim este aceeaşi cu cea pentru care este maxim produsul $y(R^2-y^2)$ sau pătratul acestuia $y^2(R^2-y^2)^2$. Cum suma factorilor ultimului

produs este $y^2+(R^2-y^2)=R^2$ =constant, rezultă că el va fi maxim pentru valorile y ce satisfac condiţia
$$\frac{y^2}{1}=\frac{R^2-y^2}{2}\Leftrightarrow 3y^2=R^2,$$
adică $y=\frac{R\sqrt{3}}{3}$. Obţinem că V are valoarea maximă egală cu $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi R^3$.

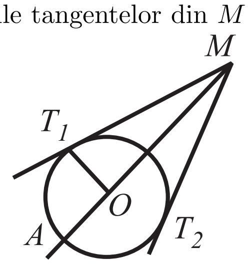
Secţiunea cu un plan perpendicular pe un diametru AB în punctul E al acestuia, cu $OE=\frac{R\sqrt{3}}{2}$, va satisface cerinţele problemei.

Notă. *Vasile Cristescu*, elev al Licelui Naţional din Iaşi, dă două soluţii acestei probleme.

5. *Fie M un punct exterior cercului $\mathcal{C}$ de centru O şi raza R. Notăm cu T_1, T_2 punctele de contact ale tangentelor duse din M la $\mathcal{C}$ şi cu A punctul de intersecţie a dreptei OM cu cercul $\mathcal{C}$ care verifică condiţia $A\notin[OM]$. Să se determine mulţimea punctelor M pentru care se poate construi un triunghi cu segmentele $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MO]$, dar nu se poate construi un triunghi cu $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MA]$.*

Recreaţii Matematice, 1/2009-*Problema L156,* p.78

Soluţie. Notăm cu d distanţa între M şi O şi cu t lungimile tangentelor din M. Condiţia necesară şi suficientă de existenţă a unui triunghi având laturile $[MT_1],[MT_2]$ şi $[MO]$ este $d<2t$, iar cea de non-existenţă a unui triunghi cu laturile $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MA]$ este $d+R\geq 2t$. Mulţimea X căutată este



$$\begin{aligned}X&=\{M|d<2t\}\cap\{M|d+R\geq 2t\}\\&=\{M|d<2\sqrt{d^2-R^2}\}\cap\{M;d+R\geq 2\sqrt{d^2-R^2}\}\\&=\{M|3d^2>4R^2\}\cap\{M|3d^2-2Rd-5R^2\leq 0\}\\&=\{M|d>\frac{2\sqrt{3}}{3}R\}\cap\{M|3(d+R)(d-\frac{5}{3}R)\leq 0\}\\&=\{M|\frac{2\sqrt{3}}{R}<d\leq\frac{5}{3}R\},\end{aligned}$$

adică X este coroana de centru O şi raze $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ şi $\frac{5}{3}R$ incluzând cercul mare, dar nu şi pe cel mic.

Recreaţii ... matematice

$$\begin{gathered}9\times 9+7=88\\98\times 9+6=888\\987\times 9+5=8888\\9876\times 9+4=88888\\98765\times 9+3=888888\\987654\times 9+2=8888888\\9876543\times 9+1=88888888\\98765432\times 9+0=888888888\end{gathered}$$

PROBLEME ŞI SOLUŢII

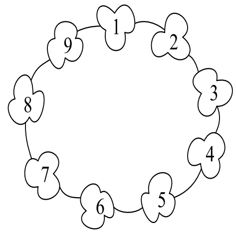
Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 2008

Clasele primare

P.144. *Elevii clasei I intră în clasă în rând câte unul. Câţi elevi sunt în clasă, dacă Matei este al 12-lea când se numără începând din faţă şi al 16-lea când se numără începând din spate?*
(*Clasa I*) **Inv. Elena Porfir, Iaşi**

Soluţie. $(12-1)+16=11+16=27$.

P.145. *Un fluture zboară din floarea 1 în floarea 3, apoi din aceasta în floarea 5 şi aşa mai departe (figura 1). După câte zboruri ajunge în floarea de pe care a plecat?*



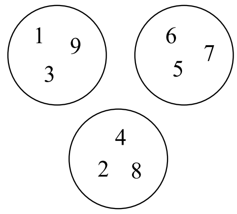
(*Clasa I*) **Evelina Zaporojanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Formăm şirul de numere: 1 3 5 7 9 2 4 6 8 1. Fluturele ajunge în floarea de pe care a plecat după 9 zboruri.

P.146. *După ce fratele meu mi-a dat un sfert din merele sale, le-am amestecat cu cele* 6 *ale mele şi le-am aşezat pe două farfurii, cu câte* 5 *mere fiecare. Câte mere avea fratele meu?*
(*Clasa a II-a*) **Inst. Elena Nuţă, Iaşi**

Soluţie. Pe cele două farfurii au fost aşezate $5+5=10$ (mere). Un sfert din merele fratelui înseamnă $10-6=4$ (mere). Fratele avea $4+4+4+4=16$ (mere).

P.147. *Dacă numerele ar fi puse corect în cele trei cercuri, atunci am avea aceeaşi sumă a celor aflate în fiecare dintre cercuri (figura 2). În câte moduri pot fi aşezate corect aceste numere?*



(*Clasa a II-a*) **Cătălina Istrate, elevă, Iaşi**

Soluţie. $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$; $45=15+15+15$. Avem cazurile:

1) $1+9+5=15$; $2+6+7=15$; $3+4+8=15$;
2) $1+8+6=15$; $2+4+9=15$; $3+5+7=15$.

P.148. *Aflaţi valoarea a ştiind că* $100-99:99-98:98-97:97-\cdots-a:a=11$.
(*Clasa a III-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fiecare împărţire are rezultatul 1; $100-b=11, b=100-11, b=89$. Pe 1 trebuie să-l scădem de 89 ori. De la a la 99, trebuie să avem 89 numere consecutive; $99-a+1=89, 99-a=88, a=99-88=11$.

P.149. *Irina îi spune Mioarei:*
– Dă-mi 2 lei ca să am şi eu cât tine!
Mioara îi răspunde:
– Dă-mi tu 2 lei, să am o sumă de 2 ori mai mare decât suma ce-ţi rămâne ţie!
Ce sumă a avut la început fiecare fată?
(*Clasa a III-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Mioara are cu $2+2=4$ (lei) mai mult ca Irina. Suma Irinei, micşorată cu 2 lei, este $2+2+2+2=8$ (lei). La început Irina a avut 8 lei $+2$ lei $=10$ lei, iar Mioara a avut 10 lei $+4$ lei $=14$ lei.

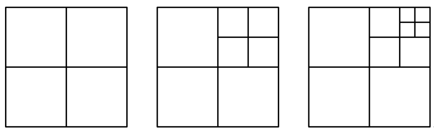
P.150. *Romanul Harry Potter are 7 volume. Ştiind că fiecare volum, începând cu al doilea, are cu 144 pagini mai puţin decât dublul numărului de pagini al volumului precedent, iar al treilea volum are 176 de pagini, aflaţi câte pagini are întregul roman.*
(*Clasa a III-a*) **Robert Vicol, elev, Iaşi**

Soluţie. Volumul al doilea are $(176+144):2=160$ (pagini), iar primul volum are $(160+144):2=152$ pagini. Volumele IV, V, VI, VII au, respectiv, 208 pagini, 272 pagini, 400 pagini, 656 pagini. Însumând, obţinem că întregul roman are 2024 de pagini.

P.151. *Descoperiţi regula de formare a şirului 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... şi scrieţi numărul de pe locul 2008.*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. $1=1; 3=1+2; 6=1+2+3; 10=1+2+3+4; \ldots$

Termenul de pe locul 2008 este $1+2+3+\ldots+2008=2017036$.

P.152. *În şirul de pătrate egale,*  ..., *fiecare pătrat este împărţit în pătrate mai mici, după o anumită regulă.*

a) Arătaţi că nu există în acest şir un pătrat împărţit în 23 pătrate mai mici;

b) Arătaţi că există în şir un pătrat împărţit în 2008 pătrate mai mici.

(*Clasa a IV-a*) **Ana Tăbăcaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. Primul pătrat are $3\times 1+1$ pătrate mai mici, al doilea are $3\times 2+1$ pătrate mai mici, al treilea are $3\times 3+1$ pătrate mai mici etc.

a) $23=3\times 7+2$, deci nu există un pătrat în şir cu 23 pătrate mici;

b) $2008=3\times 669+1$; pătratul de pe locul 669 este împărţit în 2008 pătrate mai mici.

P.153. *O veveriţă transportă nişte alune la scorbura sa în 6 ore, iar alta face acelaşi lucru în 3 ore. În câte ore cele două veveriţe ar transporta alunele împreună?*
(*Clasa a IV-a*) **Alexandru-Dumitru Chiriac, elev, Iaşi**

Soluţie. Dacă prima veveriţă transportă, în 6 ore, x alune, a doua va transporta, în 6 ore, $2x$ alune. Împreună, ele vor transporta, în 6 ore, $3x$ alune, deci în 2 ore vor transporta x alune.

Clasa a V-a

V.88. *O secvenţă de numere este formată din multipli consecutivi ai lui* 4*, astfel încât suma dintre primul şi ultimul număr este* 280*, iar suma ultimelor două numere este* 508*. Arătaţi că media aritmetică a tuturor numerelor este termen al secvenţei considerate.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numerele date, atunci $a_{n-1}+a_n=508$ şi, cum $a_n=a_{n-1}+4$, deducem că $a_n=256$. Apoi, $a_1=280-a_n=24$, iar $n=\dfrac{a_n-a_1}{4}+1=$

59. Media aritmetică a numerelor va fi 140 şi va fi termen al secvenţei, deoarece $140 \vdots 4$, iar $24 \leq 140 \leq 256$.

V.89. *Determinaţi cifrele x, y, z pentru care $\overline{xy}^2 + \overline{xz}^2 = \overline{168x}$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Dacă $x \geq 3$, atunci $\overline{xy}^2 + \overline{xz}^2 \geq 30^2 + 30^2 = 1800 > \overline{168x}$. Dacă $x = 1$, atunci $\overline{xy}^2 + \overline{xz}^2 \leq 19^2 + 19^2 = 722 < \overline{168x}$. Rămâne că $x = 2$ şi, datorită simetriei, putem presupune că $y \leq z$. Dacă $z < 9$, atunci $\overline{2y}^2 + \overline{2z}^2 \leq 28^2 + 28^2 = 1568 < 1682$. Deducem că $z = 9$ şi, în acest caz, $\overline{2y}^2 + 29^2 = 1682 \Leftrightarrow \overline{2y}^2 = 841 \Leftrightarrow \overline{2y} = 29 \Leftrightarrow y = 9$. În concluzie, $(x, y, z) = (2, 9, 9)$.

V.90. *Fie $E(n) = 3^n + 5^n$, $n \in \mathbb{N}$. Aflaţi ultimele două cifre ale numerelor $E(10)$ şi $E(2008)$.*

Mihaela Bucătaru, Iaşi

Soluţie. Observăm că $3^8 = 3^4 \cdot 3^4 = 81 \cdot 81 = \overline{\ldots 61}$, prin urmare $3^{10} = \overline{\ldots 61} \cdot 9 = \overline{\ldots 49}$. Apoi, $5^{10} = \overline{\ldots 25}$, deci $E(10) = \overline{\ldots 74}$.

Avem că $3^{20} = \overline{\ldots 49} \cdot \overline{\ldots 49} = \overline{\ldots 01}$, de unde $3^{2000} = (3^{20})^{100} = \overline{\ldots 01}$ şi astfel $3^{2008} = 3^{2000} \cdot 3^8 = \overline{\ldots 01} \cdot \overline{\ldots 61} = \overline{\ldots 61}$. În concluzie, $E(2008) = \overline{\ldots 61} + \overline{\ldots 25} = \overline{\ldots 86}$.

V.91. *Să se arate că 61^n, $n \in \mathbb{N}^*$, se poate scrie atât ca sumă, cât şi ca diferenţă de două pătrate perfecte nenule.*

Alexandru Negrescu, student, Iaşi

Soluţie. Dacă $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, atunci:

$$61^n = 61^{2k} \cdot 61 = 61^{2k} \cdot (5^2 + 6^2) = (61^k \cdot 5)^2 + (61^k \cdot 6)^2;$$
$$61^n = 61^{2k} \cdot 61 = 61^{2k} \cdot (31^2 - 30^2) = (61^k \cdot 31)^2 - (61^k \cdot 30)^2.$$

Dacă $n = 2k + 2, k \in \mathbb{N}$, atunci:

$$61^n = 61^{2k} \cdot 3721 = 61^k(60^2 + 11^2) = (61^k \cdot 60)^2 + (61^k \cdot 11)^2;$$
$$61^n = 61^{2k} \cdot 3721 = 61^{2k}(1861^2 - 1860^2) = (61^k \cdot 1861)^2 - (61^k \cdot 1860)^2.$$

V.92. *Demonstraţi că* $\dfrac{2^2}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{4^2}{3} + \cdots + \dfrac{17^2}{16} > 171.$

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Observăm că $\dfrac{n^2}{n-1} = \dfrac{n^2 - n + n - 1 + 1}{n-1} = n + 1 + \dfrac{1}{n-1}$, prin urmare $\dfrac{2^2}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{4^2}{3} + \ldots + \dfrac{17^2}{16} = 4 + \left(4 + \dfrac{1}{2}\right) + \left(5 + \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(18 + \dfrac{1}{16}\right) = 169 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{8}\right) + \left(\dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{16}\right) > 169 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{8}\right) + \left(\dfrac{1}{16} + \ldots + \dfrac{1}{16}\right) = 169 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 171.$

V.93. *Fie $A = \{2, 3, 4, \ldots, 50, 52, 53, \ldots, 100\}$. Folosind fiecare element al lui A câte o singură dată, fie ca numărător, fie ca numitor, se scriu 49 de fracţii. Demonstraţi că măcar una dintre aceste fracţii este reductibilă.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Mulţimea A conţine 50 de elemente pare; conform principului cutiei, dintre cele 49 de fracţii, măcar una va avea şi numărătorul şi numitorul pare, deci se va simplifica prin 2.

V.94. *Fie A mulţimea acelor numere naturale cel mult egale cu 2008, care se divid cu 2, dar nu se divid cu 6. Dacă scriem elementele lui A în ordine descrescătoare, care este al 322-lea număr?*

Enache Pătraşcu, Focşani

Soluţie. Scriem multiplii lui 2 în ordine descrescătoare, grupându-i câte trei: (2008, 2006, 2004), (2002, 2000, 1998),.... Multiplii lui 6 apar în fiecare grupă pe al treilea loc; numărul căutat se află în a 161-a grupă, pe a doua poziţie şi acesta va fi 1046.

Clasa a VI-a

VI.88. *Fie a, b, c, d numere raţionale pozitive astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ şi $\frac{a+1}{b+1} = \frac{c+1}{d+1}$. Să se arate că $\frac{a+x}{b+x} = \frac{c+x}{d+x}$, $\forall x \in \mathbb{Q}_+$.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Toţi numitorii care apar sunt strict pozitivi, deci nenuli. Din ipoteză obţinem că $ad = bc$ şi $(a+1)(d+1) = (b+1)(c+1)$, prin urmare $a+d = b+c$. Însă

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{c+x}{d+x} \Leftrightarrow ad + x(a+d) + x^2 = bc + x(b+c) + x^2$$

şi cum ultima egalitate este adevărată, rezultă concluzia.

VI.89. *Arătaţi că numărul $N = 1^{2007} + 2^{2007} + \cdots + 2008^{2007}$ se divide cu 2009.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Dacă n este impar şi $a, b \in \mathbb{N}$, se ştie că $a^n + b^n = M(a+b)$. Grupând câte doi termenii sumei şi observand că $1^{2007} + 2008^{2007} = M2009, 2^{2007} + 2007^{2007} = M2009, \ldots, 1004^{2007} + 1005^{2007} = M2009$, obţinem concluzia problemei.

VI.90. *Să se determine numerele naturale cu proprietatea că atât ele cât şi răsturnatele lor se scriu ca produs de doi factori primi, fiecare factor având două cifre şi fiind răsturnatul celuilalt.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Să determinăm numerele N care îndeplinesc condiţiile: 1. $N = p \cdot q$ cu p, q prime, 2. $p = \overline{ab}$ şi $q = \overline{ba}$ şi 3. $\overline{N}$, răsturnatul lui N, verifică 1 şi 2.

Din aceste ipoteze rezultă că a şi b nu pot fi pare şi nici 5, adică $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$.

I. $p = q$, ceea ce este echivalent cu $a = b$. Avem $p \in \{11, 33, 77, 99\}$ şi numai $p = 11$ este număr prim. Obţinem o soluţie a problemei: $N = 121 = 11 \cdot 11$.

II. $p \neq q$ şi putem presupune $a < b$. Avem $p \in \{13, 17, 19, 37, 39, 79\}$ şi cum $p = 19$ conduce la $q = 91$ care este compus, iar $p = 39$ este compus, urmează că $p \in \{13, 17, 37, 79\}$. Vom arăta că nu avem soluţii ale problemei pentru niciuna dintre aceste patru valori ale lui p. Într-adevăr, dacă $p = 13$, avem $N = 13 \cdot 31 = 403$ şi $\overline{N} = 304 = 16 \cdot 19$ nu verifică 1. Dacă $p = 17$, atunci $N = 17 \cdot 71 = 1207$ şi $\overline{N} = 7031 = 7 \cdot 17.59$ nu convine. Pentru $p = 37$, avem $N = 37 \cdot 73 = 2701$ şi

$\overline{N} = 1072 = 16 \cdot 67$ nu verifică. În sfârşit, $p = 79$ implică $N = 79 \cdot 97 = 7663$ şi $\overline{N} = 3667 = 19 \cdot 193$, care nu verifică 2.

În concluzie, singura soluţie a problemei este numărul 121.

VI.91. *Considerăm numerele scrise în baza 8: $a_1 = 0,0\,(4)_{(8)}$; $a_2 = 0,0\,(04)_{(8)}$; ...; $a_n = 0,0(\underbrace{00\ldots0}_{n-1}4)_{(8)}$. Să se arate că numărul $N = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$ este divizibil cu $14_{(10)}$.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Trecem de la fracţii zecimale la fracţii ordinare; rolul pe care îl are 9 în baza 10 este jucat de 7 în baza 8. Avem:

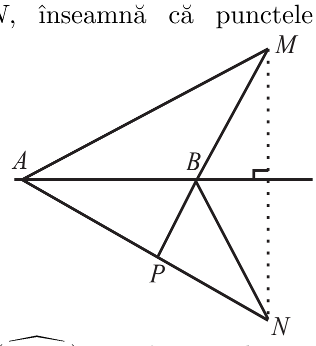
$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{4}{70}\right)_{(8)} = \frac{4}{7 \cdot 8 + 0} = \frac{1}{14}; \\ a_2 &= \left(\frac{4}{770}\right)_{(8)} = \frac{4}{7 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 0} = \frac{1}{14(8+1)}; \ldots; \\ a_n &= \left(\frac{4}{77\ldots70}\right)_{(8)} = \frac{4}{7 \cdot 8^n + \ldots + 7 \cdot 8 + 0} = \frac{1}{14(8^{n-1} + \ldots + 8 + 1)}, \end{aligned}$$

de unde concluzia este evidentă (acolo unde nu am precizat baza de numeraţie, aceasta este 10).

VI.92. *De o parte şi de alta a unei drepte AB se consideră punctele M şi N astfel încât $\triangle ABM \equiv \triangle ABN$, $m(\widehat{MAN}) + m(\widehat{MBN}) = 180^\circ$, iar $[AB] \cap [MN] = \emptyset$. Să se arate că B este ortocentrul $\triangle AMN$.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Cum $AM = AN$ şi $MB = BN$, înseamnă că punctele A şi B se află pe mediatoarea segmentului $[MN]$, prin urmare $AB \perp MN$. Să arătăm că $MB \perp AN$; ne plasăm în cazul în care $m(\widehat{MAN}) < 90^\circ$, celălalt caz tratându-se analog. Notăm $\{P\} = MB \cap AN$ şi, observând că $P \in (AN)$ (deoarece $[AB] \cap [MN] = \emptyset$), obţinem: $m(\widehat{PBN}) + m(\widehat{PNB}) = [180^\circ - m(\widehat{MBN})] + [90^\circ - m(\widehat{NAB}) - m(\widehat{BNM})] = 270^\circ - [180^\circ - m(\widehat{MAN})] - \frac{1}{2}m(\widehat{MAN}) - \frac{1}{2}[180^\circ - (180^\circ - m(\widehat{MAN}))] = 90^\circ + m(\widehat{MAN}) - \frac{1}{2}m(\widehat{MAN}) - \frac{1}{2}m(\widehat{MAN}) = 90^\circ$. Astfel, $m(\widehat{BPN}) = 90^\circ$ şi rezolvarea este încheiată.



VI.93. *Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = 80^\circ$ şi $AB = CD = DA$ şi astfel încât există $F \in (BC)$ pentru care $m(\widehat{BAF}) = 20^\circ$.*

a) Demonstraţi că $\triangle AFD$ este echilateral.

b) Determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{C}$ şi $\widehat{D}$.

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. a) Avem că $m(\widehat{AFB}) = 180° - m(\widehat{BAF}) - m(\widehat{B}) = 80°$, deci $\triangle ABF$ este isoscel, cu $AB = AF$. Atunci $AD = AF$ şi, cum $m(\widehat{DAF}) = 80° - 20° = 60°$, deducem că $\triangle ADF$ este echilateral.

b) Din a) şi ipoteză obţinem că $DF = DC$, deci $\triangle DFC$ este isoscel. Pe de altă parte, $m(\widehat{DFC}) = 180° - m(\widehat{DFA}) - m(\widehat{AFB}) = 40°$. Rezultă că $m(\widehat{C}) = 40°$, iar $m(\widehat{D}) = m(\widehat{ADF}) + m(\widehat{FDC}) = 60° + 100° = 160°$.

VI.94. *Un joc are trei beculeţe. Primul se aprinde la fiecare două secunde. Al doilea se aprinde prima dată la o secundă după aprinderea primului, apoi la fiecare trei secunde. Al treilea se aprinde prima dată la a două aprindere a primului, apoi la fiecare* 5 *secunde. În primele* 10 *minute de funcţionare, de câte ori cele trei beculeţe sunt aprinse simultan?*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Dacă secunda zero este cea în care se aprinde prima dată primul beculeţ, atunci în secunda n sunt aprinse simultan toate beculeţele dacă şi numai dacă $n = M2 = M3+1 = M5+2$. Cel mai mic număr cu aceste proprietăţi este $n = 22$. Apoi, cum $n - 22 = M2 - 22 = M3 - 21 = M5 - 20$, deducem că $n - 22$ se divide simultan cu $2, 3$ şi 5, deci cu 30. Începând cu secunda 22, din 30 în 30 de secunde vor fi aprinse simultan toate beculeţele; în primele 10 minute de funcţionare, acest fapt se petrece de 20 ori.

Clasa a VII-a

VII.88. *Fie x, y, z numere reale distincte, iar $a = (x-y)(y-z)$, $b = (y-z)(z-x)$, $c = (z-x)(x-y)$. Să se arate că exact două dintre numerele a, b, c sunt negative, iar al treilea este pozitiv.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Să presupunem că $x < y < z$, celelalte situaţii discutându-se analog; atunci $x - y < 0, y - z < 0$, deci $a > 0; y - z < 0, z - x > 0$, deci $b < 0$, iar $z - x > 0, x - y < 0$, prin urmare $c < 0$.

VII.89. *Determinaţi cifrele x, y, z pentru care $\sqrt{\overline{14xyzx5}} \in \mathbb{Q}$.*

Damian Marinescu, Târgovişte

Soluţie. Evident, trebuie ca $\overline{14xyzx5}$ să fie pătrat perfect; cum acest număr are ultima cifră 5, penultima cifră va fi 2, deci $x = 2$. Aplicând algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate pentru $\sqrt{\overline{142yz25}}$, obţinem că $1192^2 < \overline{142yz25} \leq 1195^2$ şi astfel numărul dorit va fi 1428025, prin urmare $y = 8, z = 0$.

VII.90. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $4^x = 5y + 4$.*

Ion Vişan, Craiova

Soluţie. Nu putem avea $x < 0$, deoarece în acest caz $0 < 4^x < 1$, iar $5y + 4 \in \mathbb{Z}$, imposibil. Căutăm soluţii cu $x \in \mathbb{N}$; atunci $4^x = (5-1)^x = M5 + (-1)^x$ şi cum $4^x = 5y+4$, în mod necesar trebuie că x să fie impar. Pentru orice $x = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, avem $y = \dfrac{4(4^{2k}-1)}{5} \in \mathbb{Z}$, deoarece $4^{2k} - 1 = 16^k - 1 = M(16-1) = M5$. În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $\left(2k+1, \dfrac{4(4^{2k}-1)}{5}\right), k \in \mathbb{N}$.

VII.91. *Fie $a \in \mathbb{N}^*$, $a \leq 98$, iar $n = \dfrac{1}{a(a+1)} + \dfrac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \dfrac{1}{98 \cdot 99}$. Demonstraţi că n nu poate fi pătratul unui număr raţional.*

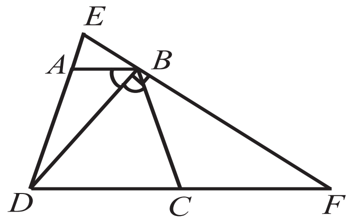
Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Cu procedeul uzual de calcul pentru sume telescopice, obţinem că $n = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{99} = \dfrac{99-a}{9 \cdot 11 \cdot a}$. Presupunem prin absurd că $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$; atunci $\dfrac{99-a}{11 \cdot a}$ va fi pătratul unui număr raţional. Cum 11 este prim, avem fie că $11|99-a$, fie că $a = 11b, b \in \mathbb{N}^*$. În oricare dintre situaţii, a va fi multiplu de 11, fie $a = 11k, k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, iar $\dfrac{99-a}{11a} = \dfrac{9-k}{11k}, k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Verificând fiecare dintre cele 8 situaţii, nu obţinem niciodată pătrat al unui număr raţional, de unde concluzia problemei.

VII.92. *În trapezul $ABCD$ cu baza mare $[CD]$, diagonala BD este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$. Perpendiculara în B pe diagonala BD intersectează dreapta AD în E. Să se arate că dreapta CE trece prin mijlocul laturii $[AB]$.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

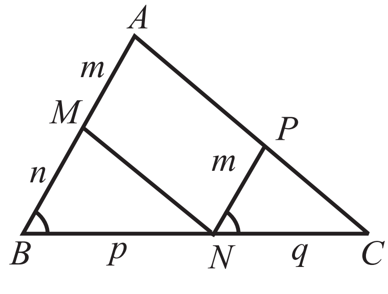
Soluţie. Din $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BDC}$ (alterne interne) şi $\widehat{ABD} \equiv \widehat{DBC}$ (BD bisectoare), deducem că $\widehat{DBC} \equiv \widehat{BDC}$, prin urmare $BC = CD$. Dacă $\{F\} = BE \cap CD$, atunci $\widehat{CBF} \equiv \widehat{CFB}$ (au complementele congruente $\widehat{DBC}$, respectiv $\widehat{BDF}$, deci $BC = CF$. Astfel, C este mijlocul lui $[DF]$ şi mediana EC în $\triangle EDF$ va trece prin mijlocul segmentului $[AB]$ paralel cu baza.



VII.93. *Pe latura $[AB]$ a triunghiului ABC se consideră punctul M şi notăm $m = AM$, $n = BM$. Paralela prin M la AC taie BC în N, iar paralela prin N la AB taie AC în P. Fie $S_1 = \mathcal{A}_{BMN}$, $S_2 = \mathcal{A}_{CNP}$, $S = \mathcal{A}_{ABC}$, iar $x = \dfrac{m}{n}$. Să se exprime raportul $\dfrac{S_1+S_2}{S}$ în funcţie de x şi să se afle x pentru care acest raport este minim.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Notăm $p = BN, q = CN$; atunci $S_1 = \dfrac{1}{2} np \sin \widehat{B}$, $S_2 = \dfrac{1}{2} mq \sin \widehat{PNC}$, $= \dfrac{1}{2} mq \sin \widehat{B}$, $S = \dfrac{1}{2}(m+n)(p+q) \sin \widehat{B}$, deci



$$\begin{aligned}
\frac{S_1+S_2}{S} &= \frac{np+mq}{(m+n)(p+q)} \\
&= \frac{np+mq}{nq} : \frac{(m+n)(p+q)}{nq} \\
&= \left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\right) : \left[\left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{p}{q}+1\right)\right] \\
&= \left(x + \frac{1}{x}\right) : \left[(x+1)\left(\frac{1}{x}+1\right)\right] = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Se demonstrează imediat că $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} \geq \dfrac{1}{2}$, cu egalitate când $x = 1$, prin urmare valoarea minimă a raportului este $\dfrac{1}{2}$, atinsă când M este mijlocul laturii $[AB]$.

VII.94. *Determinaţi poligoanele regulate care au proprietatea că oricare trei vârfuri ale lor determină un triunghi isoscel.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon regulat cu proprietatea din enunţ. Evident că $n = 3$ convine; fie $n \geq 4$. Cum $m(\widehat{A_1A_2}) = \dfrac{360^\circ}{n}$, $m(\widehat{A_2A_4}) = \dfrac{2\cdot 360^\circ}{n}$, atunci în $\triangle A_1A_2A_4$ vom avea $m(\widehat{A}_1) = \dfrac{360^\circ}{n}$, $m(\widehat{A}_4) = \dfrac{180^\circ}{n}$, iar $m(\widehat{A}_2) = 180^\circ - \dfrac{540^\circ}{n}$. Este clar că $m(\widehat{A}_1) \neq m(\widehat{A}_4)$; putem avea $m(\widehat{A}_1) = m(\widehat{A}_2)$ când $\dfrac{360^\circ}{n} = 180^\circ - \dfrac{540^\circ}{n} \Leftrightarrow n = 5$ şi $m(\widehat{A}_2) = m(\widehat{A}_4)$ când $\dfrac{180^\circ}{n} = 180^\circ - \dfrac{540^\circ}{n} \Leftrightarrow n = 4$. Se verifică uşor că pătratul şi pentagonul regulat au proprietatea cerută, ele adăugându-se astfel triunghiului echilateral.

Clasa a VIII-a

VIII.88. *Fie $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$, iar S_1 şi S_2 reprezintă suma elementelor lui A, respectiv suma pătratelor elementelor lui A. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $S_2 - 3\cdot|A| \geq S_1$.*

Laurenţiu Modan, Bucureşti

Soluţie. Avem că $|A| = n$, $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, iar $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$. Atunci:

$$S_2 - 3\cdot|A| \geq S_1 \Leftrightarrow n(4n^2-1) - 9n \geq 3n^2 \Leftrightarrow n(n-10) \geq 0,$$

fapt care se întâmplă când $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$.

VIII.89. *Demonstraţi că* $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \cdots + \sqrt{n^2+2n} < \dfrac{4n^2+2n+1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Obţinem imediat că $\sqrt{n^2+a} < n + \dfrac{a}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a > 0$; dând lui a valorile $1, 2, \ldots, 2n$ şi sumând inegalităţile obţinute, rezultă inegalitatea dorită.

VIII.90. *Demonstraţi că mulţimea $A = \left\{x \mid x = 27^{6n+2} + 3^{12n+5} + 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ nu conţine numere prime.*

Damian Marinescu, Târgovişte

Soluţie. Observăm că $x = (3^{6n+2})^3 + 3(3^{6n+2})^2 + 3\cdot 3^{6n+2} + 1 - 3\cdot 3^{6n+2} = (3^{6n+2}+1)^3 - 3^{6n+3} = (3^{6n+2} - 3^{2n+1} + 1)[(3^{6n+2}+1)^2 + 3^{2n+1}\cdot(3^{6n+2}+1) + 3^{4n+2}]$. Evident că ambii factori sunt diferiţi de 1 şi atunci x nu poate fi număr prim.

VIII.91. *Se consideră funcţia $f : \{1, 2, \ldots, 2008\} \to \mathbb{N}$ care asociază unui element n al domeniului, numărul divizorilor săi naturali.*

a) Determinaţi n pentru care $f(n) = 7$.

b) Aflaţi valoarea maximă a funcţiei.

c) Dacă $f(n) + f(m) + f(p) = 33$, arătaţi că măcar unul dintre numerele n, m sau p este pătrat perfect.

Monica Nedelcu, Iaşi

Soluţie. a) Dacă $f(n) = 7$, atunci $n = p^6$, cu p prim. Convin situaţiile $n = 2^6 = 64$ şi $n = 3^6 = 729$.

b) Utilizând formula care dă numărul de divizori ai unui număr natural şi făcând o analiză simplă, găsim valoarea maximă 40, atinsă pentru $n = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$.

c) Măcar unul dintre numerele $f(n), f(m)$ şi $f(p)$ va fi impar, iar un număr care are un număr impar de divizori va fi pătrat perfect.

VIII.92. *Să se arate că pentru orice număr întreg impar n, există numerele naturale a şi b astfel încât $a(a + 2n) = b(b + n)$.*

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie. Avem succesiv:

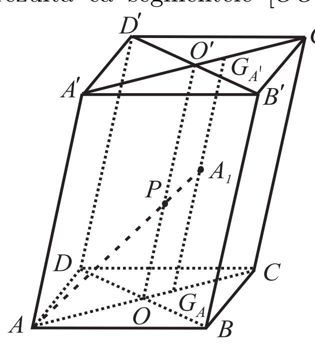
$$\begin{aligned} &a(a + 2n) = b(b + n) \Leftrightarrow 4a^2 + 8an + 4n^2 - 4n^2 = 4b^2 + 4bn + n^2 - n^2 \\ &\Leftrightarrow (2a + 2n)^2 - (2b + n)^2 = 3n^2 \Leftrightarrow (2a - 2b + n)(2a + 2b + 3n) = 3n^2. \end{aligned}$$

Cum avem libertatea de a căuta a şi b, încercăm să avem $2a + 2b + 3n = 3n^2$, $2a - 2b + n = 1$; găsim atunci $a = \frac{1}{4}(3n^2 - 4n + 1)$, $b = \frac{1}{4}(3n^2 - 2n - 1)$. Ar mai trebui să avem a, b numere naturale; însă $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ şi astfel $a = 3k^2 + k \in \mathbb{Z}$, $b = 3k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. Observăm şi că numerele $a = k(3k + 1)$ şi $b = k(3k + 2)$ sunt pozitive pentru $k \in \mathbb{Z}$, ceea ce încheie rezolvarea problemei.

VIII.93. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped oarecare şi O, O' punctele de intersecţie a diagonalelor bazelor. Se notează cu G_A şi $G_{A'}$ centrele de greutate ale $\triangle BCD$ şi, respectiv, $\triangle B'C'D'$ şi cu A_1 mijlocul segmentului $[G_A G_{A'}]$. Notaţiile G_B, $G_{B'}$ şi B_1 etc. se introduc în mod similar. Arătaţi că dreptele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sunt concurente într-un punct P situat pe OO' şi precizaţi poziţia lui P pe $[OO']$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Din $O, G_A \in AC$ şi $O', G_{A'} \in A'C'$ rezultă că segmentele $[OO']$ şi $[G_A G_{A'}]$ aparţin planului $ACC'A'$. Se constată uşor că aceste segmente sunt paralele şi egale. Ca urmare, există $\{P\} = AA_1 \cap OO'$. Din $\triangle AOP \sim \triangle AG_A A_1$ şi faptul că $AG_A = AO + OG_A = AO + \frac{1}{3}AO = \frac{4}{3}AO$, avem



$$\frac{OP}{G_A A_1} = \frac{AO}{AG_A} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow OP = \frac{3}{4}G_A A_1 \Leftrightarrow OP = \frac{3}{8}OO' \qquad (*)$$

ceea ce precizează poziţia lui P pe OO'.

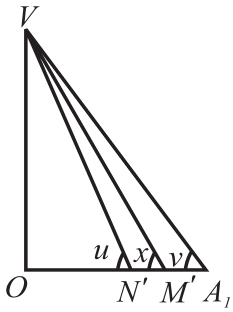
În mod analog se arată că BB_1, CC_1 şi DD_1 intersectează OO' în acelaşi punct P precizat de $(*)$.

Notă. Problema se poate uşor extinde la cazul în care A_1 împarte $[G_A G_{A'}]$ în raportul $k \neq \dfrac{1}{2}$ şi analog pentru B_1, C_1, D_1.

VIII.94. *Fie $VA_1A_2\ldots A_n$ o piramidă regulată; notăm cu $\mathcal{P}$ poligonul $A_1A_2\ldots A_n$ şi fie $U = \left\{m(\widehat{VM,(A_1A_2A_3)}) \mid M \in \mathcal{P}\right\}$. Demonstraţi că $\max U < 2\min U$.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Evident că $m(\widehat{VM,(A_1A_2A_3)}) = m(\widehat{VMO})$, unde O este centrul lui $\mathcal{P}$. Din considerente de simetrie, este suficient să luăm M pe segmentul $[A_1N]$, unde N este mijlocul lui $[A_1A_2]$. Fie N' şi M' pe $[OA_1]$ astfel încât $ON' = ON$, $OM' = OM$; din congruenţe imediate de triunghiuri, avem că $\widehat{VN'O} \equiv \widehat{VNO}$, $\widehat{VM'O} \equiv \widehat{VMO}$. Notăm $u = m(\widehat{VN'O})$, $v = m(\widehat{VA_1O})$ şi se arată imediat că $M' \in [N'A_1]$, prin urmare $u = \max\mathcal{U}$, $v = \min\mathcal{U}$.



Rămâne să demonstrăm că $u < 2v$; cum $u = v + m(\widehat{N'VA_1})$, ar trebui să avem $m(\widehat{N'VA_1}) < v$, adică $N'A_1 < N'V\,(*)$. Notăm $R = OA_1$, $a = ON$, $h = VO$ şi se vede uşor că $a = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$, $N'A_1 = R - a = R(1 - \cos\dfrac{180^\circ}{n})$, iar $N'V = \sqrt{h^2 + a^2}$. Atunci:

$$(*)\quad \Leftrightarrow R^2\left(1 - \cos\frac{180^\circ}{n}\right)^2 < h^2 + a^2 \Leftrightarrow R^2 - 2R^2\cos\frac{180^\circ}{n} + R^2\cos^2\frac{180^2}{n}$$
$$< h^2 + R^2\cos^2\frac{180^\circ}{n} \Leftrightarrow h^2 > R^2\left(1 - 2\cos\frac{180^\circ}{n}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{h}{R}\right)^2 > 1 - 2\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Aceasta din urmă inegalitate este adevărată pentru $n \geq 3$, întrucât membrul stâng este pozitiv, iar cel drept negativ.

Clasa a IX-a

IX.86. *Fie O mijlocul ipotenuzei $[BC]$ a triunghiului dreptunghic ABC, r raza cercului înscris, iar R_1 şi R_2 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, respectiv AOC. Să se demonstreze că $\sqrt{R_1R_2} \geq \dfrac{a^2}{2a + 4r}$.*

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Utilizând formulele uzuale, avem că $r = \dfrac{bc}{a+b+c}$, $R_1 = \dfrac{a^2}{4b}$, $R_2 = \dfrac{a^2}{4c}$. Cum $a + 2r = a + \dfrac{2bc}{a+b+c} = \dfrac{a^2 + 2bc + a(b+c)}{a+b+c} = \dfrac{(b+c)(a+b+c)}{a+b+c} = b + c$, inegalitatea de demonstrat revine la $\dfrac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2(b+c)} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0$, evident adevărată. Egalitatea se atinge pentru $b = c$, deci când $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel.

IX.87. *Demonstraţi că într-un triunghi ascuţitunghic, cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea*

$$\frac{a}{b^4 + c^4} + \frac{b}{c^4 + a^4} + \frac{c}{a^4 + b^4} < \frac{3}{4Rrp}.$$

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

Soluţie. Pentru $x, y > 0$, avem succesiv:

$$(x-y)^2(x^2+y^2+xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2+xy) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^4+y^4 \geq x^3y+xy^3 \Leftrightarrow \frac{x^4+y^4}{xy} \geq x^2+y^2.$$

Aplicând această inegalitate pentru laturile unui triunghi ascuţitunghic, obţinem:

$$\frac{a^4+b^4}{ab} \geq a^2+b^2 > a^2+b^2-2ab\cos C = c^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^4+b^4}{abc} > c \Leftrightarrow \frac{a^4+b^4}{c} > abc \Leftrightarrow \frac{c}{a^4+b^4} < \frac{1}{abc}.$$

Considerând relaţiile analoage şi sumându-le, obţinem concluzia dacă observăm că $abc = 4SR = 4Rrp$.

IX.88. *Demonstraţi că* $15 \cdot 25^n + 32 \cdot n^2 + 120n - 15 \,\vdots\, 128$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Notând $A_n = 15 \cdot 25^n + 32n^2 + 120n - 15$, vom arăta că $A_n \vdots 128$, $\forall n \in \mathbb{N}$, prin inducţie matematică. Avem că $A_0 = 0 \vdots 128$; presupunem că $A_k \vdots 128$ şi să demonstrăm că $A_{k+1} \vdots 128$. Cum $A_{k+1} = A_k + 360 \cdot 25^k + 64k + 152$, $360 = 256 + 104$ şi $152 = 182 + 24$, rămâne să arătăm că $104 \cdot 25^k + 64k + 24 \vdots 128$, ceea ce revine la faptul că $B_k = 13 \cdot 25^k + 8k + 3 \vdots 16$. Această din urmă afirmaţie se probează uşor printr-o nouă inducţie matematică.

IX.89. *Să se arate că pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *are loc inegalitatea*

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)^2}\right) > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Din inegalitatea mediilor obţinem că

$$2\sqrt{2} \cdot (3k-1)^2 = 2 \cdot (3k-1) \cdot \sqrt{1 \cdot (3k-1)} \cdot \sqrt{2(3k-1)}$$
$$< 2(3k-1) \cdot \frac{1+3k-1}{2} \cdot \frac{2+3k-1}{2} = \frac{(3k-1) \cdot 3k \cdot (3k+1)}{2}, k \in \mathbb{N}^*,$$

inegalitatea fiind strictă deoarece nu putem avea simultan $3k-1=1$ şi $3k-1=2$. Rezultă că $\frac{1}{2\sqrt{2}(3k-1)^2} > \frac{2}{(3k-1)3k \cdot (3k+1)} = \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} + \frac{1}{3k+1} = \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{k}$. Dând valori lui k şi sumând inegalităţile obţinute, găsim tocmai inegalitatea dorită.

IX.90. *Să se determine toate şirurile de numere reale* $(a_n)_{n \geq 0}$ *cu proprietatea că* $a_{n+m} + a_{n-m} = a_{3n} + n$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

I. V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Dacă notăm $b_n = a_n + n$, relaţia din enunţ se scrie sub forma $b_{n+m} + b_{n-m} = b_{3n}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Pentru $n = m = 0$, obţinem că $b_0 = 0$. Pentru $n = m$, deducem că $b_{2n} = b_{3n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Luând acum $m = 0$, găsim că $2b_n = b_{3n}, \forall n \in \mathbb{N}(1)$, de unde $b_{2n} = 2b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. În sfârşit, facem $n = 2m$ şi rezultă că $b_{3m} + b_m = b_{6m} = b_{2\cdot 3m} = 2b_{3m}, \forall m \in \mathbb{N}$, prin urmare $b_m = b_{3m}$, $\forall m \in \mathbb{N}(2)$. Din (1) şi (2) obţinem că $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $a_n = -n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Clasa a X-a

X.86. *Aflaţi* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *pentru care* $\lg^2 \dfrac{x}{y} = 3 \lg \dfrac{x}{3} \lg \dfrac{3}{y}$.

A. V. Mihai, Bucureşti

Soluţie. Ecuaţia se scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
&\lg^2 x - 2 \lg x \lg y + \lg^2 y + 3(\lg x \lg y - \lg x \lg 3 - \lg 3 \lg y + \lg^2 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lg x - \lg 3)^2 + (\lg y - \lg 3)^2 + (\lg x + \lg y - 2 \lg 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lg x = \lg y = \lg 3 \Leftrightarrow x = y = 3.
\end{aligned}$$

X.87. *Fie* $A \subset \mathbb{N}$ *şi* $f : A \to A$ *o funcţie injectivă; notăm* $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ funcţii}}$. *Determinaţi* f, *ştiind că există* $p, q \in \mathbb{N}^*$ *numere prime între ele astfel încât* $f_p(x) + f_q(x) = 2x$, $\forall x \in A$.

Romeo Ilie, Braşov

Soluţie. Fie $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, cu $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$. Avem că $f_p(x_1) \geq x_1$, $f_q(x_1) \geq x_1$ şi, cum $f_p(x_1) + f_q(x_1) = 2x_1$, înseamnă că $f_p(x_1) = f_q(x_1) = x_1$. Inductiv se demonstrează că $f_p(x_k) = f_q(x_k) = x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (folosim faptul că f_p şi f_q sunt funcţii injective), prin urmare $f_p(x) = f_q(x) = x$, $\forall x \in A$. Din $f(f_{p-1}(x)) = x, \forall x \in A$, deducem că f este surjectivă, deci bijectivă.

Ştim că $(p, q) = 1$; atunci există $u, v \in \mathbb{Z}$ pentru care $up + vq = 1$ şi astfel $f(x) = f_{up+vq}(x) = (f_{up} \circ f_{vq})(x) = x$, $\forall x \in A$ (unde $f_k = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}}_{-k \text{ funcţii}}$, pentru $k \in \mathbb{Z}, k < 0$). În concluzie, există o singură funcţie cu proprietatea dată, anume funcţia identică.

X.88. *Fie* $ABCD$ *un paralelogram, iar* M *şi* N *mijloacele laturilor* (BC), *respectiv* (CD). *Dacă* $AM = BN$ *şi* $AM \perp BN$, *arătaţi că* $ABCD$ *este pătrat.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $a = AB, b = AD$; deoarece $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AD} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ şi $AM \perp BN$, obţinem că $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{3}(a^2 - b^2)$. Apoi, cum $AM = BN$, vom avea că $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BN}^2$, de unde $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{8}(b^2 - a^2)$. Rezultă că $\dfrac{2}{3}(a^2 - b^2) = \dfrac{3}{8}(b^2 - a^2)$, deci $a = b$ şi apoi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Astfel, $ABCD$ va fi un pătrat.

Dl. **Titu Zvonaru**, Comăneşti, observă că ipoteza poate fi slăbită, în sensul că este suficient ca punctele M şi N să împartă laturile $[BC]$, respectiv $[CD]$, într-un acelaşi raport, adică $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{ND}$. Domnia sa oferă o demonstraţie analitică, însă poate fi uşor adaptată şi soluţia de mai sus.

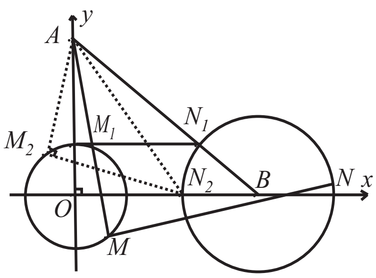
X.89. *În planul complex se consideră punctele* $A(3i)$, $B(4)$, *iar* M *este un punct variabil de modul* 1.

a) Determinaţi locul geometric al punctului N *cu proprietatea că triunghiurile* AOB *şi* AMN *sunt asemenea şi la fel orientate.*

b) Găsiţi punctele N_1, N_2 *ale locului ce se plasează pe segmentele* $[BA]$, *respectiv* $[BO]$, *precum şi punctele* M_1, M_2 *din care provin.*

Dan Brânzei, Iaşi

Soluţie. a) Asemănarea revine la condiţia $\dfrac{z_N - z_A}{z_N - z_M} = \dfrac{z_B - z_A}{z_B}$, care se rescrie $3z_N = 12 + (3+4i)z_M (*) \Leftrightarrow 3(z_N - z_B) = (3+4i)z_M$. Trecând la module în această relaţie, deducem că $3NB = 5$ şi aceasta este singura condiţie pentru N, deoarece egalarea argumentelor conduce la argumentul variabil al lui M. În concluzie, locul geometric cerut este cercul $\mathcal{C}\left(B, \dfrac{5}{3}\right)$.



b) Punctul N_1 este pe paralela prin M_1 la OB, unde M_1 este punctul în care OA taie cercul unitate; găsim $z_{M_1} = i, z_{N_1} = \dfrac{8}{3} + i$. Dacă $z_{M_2} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ şi N_2 este punctul de pe Ox corespunzător, anulând partea imaginară a lui z_{N_2} în (*) obţinem condiţia $4\cos\alpha + 3\sin\alpha = 0$, deci $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$ şi pentru un astfel de α găsim $z_{N_2} = \dfrac{7}{3}$.

X.90. *Fie* X_1, X_2, $\ldots$, X_n *variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele luând valorile* -1 *şi* 1 *cu probabilităţile* p, *respectiv* q. *Considerăm* $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a) Să se calculeze media şi dispersia lui Y.

b) Să se precizeze care este valoarea luată de Y *cu probabilitate maximă.*

Petru Minuţ, Iaşi

Soluţie. a) Notăm cu Z numărul de variabile X_i (din suma care defineşte Y) care primesc valoarea -1; atunci $Y = n - 2Z$. Deoarece $P(Z=k) = C_n^k \cdot p^p \cdot q^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$, variabila aleatoare Z are media $M(Z) = np$ şi dispersia $D(Z) = npq$, prin urmare $M(Y) = n - 2np$, iar $D(Y) = 4npq$.

b) Avem că $P(Y = n-2k) = P(Z=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. Acest număr este maxim pentru $k \in [np - q, np + q]$. Valoarea cea mai probabilă a lui Y este $n - 2k_0$, unde $k_0 = [np - q] + 1$, dacă $np - q \notin \mathbb{N}$ şi $k_0 \in \{np - q, np + q\}$ pentru $np - q \in \mathbb{N}$.

Clasa a XI-a

XI.86. *Fie* $n \in 2\mathbb{N}^*$ *şi* $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$; *arătaţi că numerele* $\det\left(A^{n+1} - I_m\right)$ *şi* $\det(A - I_m)$ *au acelaşi semn.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Are loc egalitatea

$$A^{n+1} - I_m = (A - I_m)(A^n + A^{n-1} + \ldots + A + I_m).$$

Fie $n = 2p$, iar $\varepsilon_1, \overline{\varepsilon}_1, \varepsilon_2, \overline{\varepsilon}_2, \ldots, \varepsilon_p, \overline{\varepsilon}_p$ rădăcinile complexe nereale de ordin $n+1$ ale unităţii: atunci $A^n + A^{n-1} + \ldots + A + I_m = \prod_{i=1}^{p}(A - \varepsilon_i I_m)(\overline{A - \varepsilon_i I_m})$. Cum $\det(B \cdot \overline{B}) = \det B \cdot \det \overline{B} = \det B \cdot \overline{\det B} = |\det B|^2 \geq 0$, $\forall B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, rezultă că $\det(A^n + A^{n-1} + \ldots + I_m) \geq 0$ şi atunci $\det(A^{n+1} - I_m)$ şi $\det(A - I_m)$ au acelaşi semn.

XI.87. *Studiaţi convergenţa şirurilor* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$, *unde*

$$a_n = \frac{2008 + \cos\sqrt{n}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}}, \quad b_n = \frac{2009 + \cos\sqrt{n}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. Vom arăta că a_n converge spre 1, în timp ce b_n este un şir fără limită. Avem:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{\cos\sqrt{n} - \cos\sqrt{n+1}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}} = 1 + \frac{2\sin\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}} = \\ &= 1 + \frac{\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}}{\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{2\sin\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Al doilea factor al produsului tinde către 0, primul către 1, iar al treilea este mărginit; deducem că limita produsului este 0, deci $a_n \to 1$.

Observăm apoi că $b_n = a_n + \dfrac{1}{2008 + \cos\sqrt{n+1}}$ şi cum al doilea termen la sumei nu are limită, rezultă că b_n este şir divergent.

XI.88. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin:* $x_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x_{n+1} = 2\operatorname{tg} x_{n+1} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Studiaţi existenţa limitelor* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Fixăm $a \in \left(x_1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi definim $f : [0, a] \to [0, 2\operatorname{tg} a - a]$, $f(t) = 2\operatorname{tg} t - t$; evident că f este bijectivă şi strict crescătoare şi are loc inegalitatea $f^{-1}(a) < a$ (aceasta fiind echivalentă cu $f(a) > a \Leftrightarrow 2\operatorname{tg} a > 2a$, adevărată pentru $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Observăm că $x_n = f(x_{n+1})$ şi prin inducţie se arată că $x_n \in (0, a), \forall n \geq 1$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir mărginit. Apoi, aceeaşi inegalitate $\operatorname{tg} u > u, u \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, impune că $x_{n+1} > 2x_{n+1} - x_n$, de unde $x_{n+1} < x_n, \forall n \geq 1$. Conform teoremei lui Weierstrass, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ va fi convergent şi trecând la limită în relaţia de recurenţă găsim că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Considerăm şirul $\dfrac{1}{nx_n} = \dfrac{\frac{1}{x_n}}{n}$, $n \geq 1$, şi îi aplicăm criteriul Stolz-Cesàro:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{2\operatorname{tg} x_{n+1} - x_{n+1}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2\operatorname{tg} x_{n+1} - 2x_{n+1}}{x_{n+1}(2\operatorname{tg} x_{n+1} - x_{n+1})}.\end{aligned}$$

Cum $\dfrac{1}{x_{n+1}} > \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 1$ şi $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg} t - 2t}{t(2\operatorname{tg} t - t)} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{nx_n} = 0$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = +\infty$.

XI.89. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1^2\sin 1} + \dfrac{1}{2^2\sin\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n^2\sin\frac{1}{n}}\right)$.

Silviu Boga, Iaşi

Soluţia autorului. Mai general, vom demonstra următoarea

Propoziţie. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale astfel încât există* $(b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *şir strict monoton şi nemărginit cu* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n(a_{n+1} - a_n)}{b_{n+1} - b_n} = L \in \mathbb{R}^*$. *Atunci* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este strict monoton de la un rang încolo şi* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \cdot (sgnL)$.

Într-adevăr, vom avea că $\dfrac{b_n}{b_{n+1} - b_n} > 0$ de la un rang încolo; cum $L \neq 0$, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ va fi strict monoton începând cu acel rang, ceea ce arată şi existenţa limitei $L' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Vom aplica Stolz-Cesàro pentru $a_n = \dfrac{a_n b_n}{b_n}$: dacă există $L'' = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, unde $d_n = \dfrac{a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n}{b_{n+1} - b_n}$, atunci $L'' = L'$. Însă

$$d_n = \frac{a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) + b_n(a_{n+1} - a_n)}{b_{n+1} - b_n} = a_{n+1} + \frac{b_n(a_{n+1} - a_n)}{b_{n+1} - b_n},$$

ceea ce justifică existenţa lui L''; în plus, vom avea că $L' = L' + L$, egalitate ce nu poate avea loc decât dacă $L' = \pm\infty$. În concluzie, $L' = +\infty \cdot (\operatorname{sgn} L)$.

Revenim la problemă: dacă (a_n) este şirul din enunţ, iar $b_n = n^2$, obţinem că $\dfrac{b_n(a_{n+1} - a_n)}{b_{n+1} - b_n} = \dfrac{n^2}{2n+1} \cdot \dfrac{1}{(n+1)^2 \sin\frac{1}{n+1}} \to \dfrac{1}{2}$. Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

XI.90. *Există funcţii polinomiale* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care să aibă exact* n *puncte fixe distincte* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *şi astfel încât pentru fiecare* $1 \leq j \leq n$, *ecuaţia* $p(x) = a_j$ *să aibă soluţie reală unică?*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Există astfel de funcţii pentru n impar şi nu există pentru n par.

Pentru $n = 1$, un exemplu ar fi $p(x) = a_1 + \alpha(x - a_1)$, cu $\alpha \neq 0$; să considerăm $n \geq 3$ impar. Pentru $j \in \{1, \ldots, n\}$ oarecare, fie m_j valoarea minimă a funcţiei $q_j(x) =$

$\prod_{i \neq j}(x-a_i)$ şi fie k un număr real pozitiv fixat astfel încât $k < -\dfrac{1}{m_j}$, $\forall j = \overline{1,n}$ (se vede uşor că fiecare m_j există şi este negativ deoarece funcţia ia şi valori negative). Arătăm că funcţia polinomială definită prin $p(x) = x + k(x-a_1)\dots(x-a_n)$ are proprietăţile cerute. Faptul că $p(a_j) = a_j, j = \overline{1,n}$, este imediat. Apoi, dacă presupunem că există j şi un $b \neq a_j$ astfel ca $p(b) = a_j$, obţinem că $(b-a_j)(1+kq_j(b)) = 0$, deci $1 + kq_j(b) = 0$, ceea ce conduce la contradicţia $0 = 1 + k \cdot q_j(b) \geq 1 + km_j > 0$.

Fie acum n par şi să presupunem că $a_1, \dots, a_n$ sunt singurele puncte fixe ale funcţiei polinomiale p. Trebuie să avem $p(x) - x = f(x)(x-a_1)\dots(x-a_n)$, cu f funcţie polinomială de grad par (întrucât nu are zerouri reale); atunci şi p va avea gradul par, deci limitele sale spre $+\infty$ şi $-\infty$ vor fi ambele $+\infty$ sau ambele $-\infty$. Tratăm doar primul caz, al doilea fiind analog. Să zicem că $a_1 < a_2 < \dots < a_n$; atunci ecuaţia $p(x) = a_n$ va avea sigur o soluţie în intervalul $(-\infty, a_1)$, deoarece $\lim_{n\to-\infty}(p(x) - a_n) = +\infty$ şi $p(a_1) - a_n = a_1 - a_n < 0$. Această soluţie este clar diferită de a_n, astfel că p nu îndeplineşte toate condiţiile enunţului în acest caz.

Clasa a XII-a

XII.86. *Fie $c \in \mathbb{R}^*$, iar $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ funcţii continue astfel încât $f(a+b-x) = g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Să se determine $y \in [a,b]$ pentru care*

$$\int_a^b \frac{[f(x)]^{g(x)}}{[f(x)]^{g(x)} + [g(x)]^{f(x)}} dx = c \int_y^{a+b-y} \frac{[g(x)]^{f(x)}}{[f(x)]^{g(x)} + [g(x)]^{f(x)}} dx.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $a + b - x = t$, obţinem că

$$I = \int_a^b \frac{[f(x)]^{g(x)}}{[f(x)]^{g(x)} + [g(x)]^{f(x)}} dx = \int_a^b \frac{[g(x)]^{f(x)}}{[f(x)]^{g(x)} + [g(x)]^{f(x)}} dx.$$

Adunând cele două integrale, deducem că $2I = \int_a^b dx = b - a$, deci $I = \dfrac{b-a}{2}$. Analog, notând cu J integrala din membrul drept al relaţiei din enunţ, vom găsi că $J = \dfrac{a+b}{2} - y$. Din egalarea lui I cu J aflăm $y = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2c}$.

XII.87. *a) Fie $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, astfel încât $f(a) = 0$. Să se arate că $\left(\int_0^a f(t)\,dt\right)^2 \leq \dfrac{a^3}{3} \int_0^a [f'(t)]^2\,dt$. Pentru ce funcţii se realizează egalitatea?*

b) Fie $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, astfel încât $f(a) = f'(a) = 0$. Să se arate că $\left(\int_0^a f(t)\,dt\right)^2 \leq \dfrac{a^5}{20} \int_0^a (f''(t))^2\,dt$. Pentru ce funcţii se realizează egalitatea?

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. a) Folosim formula de integrare prin părţi şi inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \int_0^a tf'(t)dt &= tf(t)\Big|_0^a - \int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt \\ &\Rightarrow \left(\int_0^a f(t)dt\right)^2 = \left(\int_0^a tf'(t)dt\right)^2 \leq \int_0^a t^2 dt \cdot \int_0^a [f'(t)]^2 dt, \end{aligned}$$

de unde inegalitatea dorită. Egalitatea se atinge dacă $f'(t) = \lambda t$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$, deci pentru $f(t) = \dfrac{\lambda}{2}t^2 + C$. Cum $f(a) = 0$, obţinem că $f(t) = \dfrac{\lambda}{2}(t^2 - a^2)$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$ constantă arbitrară.

b) Procedăm întru totul analog: vom avea că $\displaystyle\int_0^a t^2 f''(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$ (două integrări prin părţi), apoi aplicăm Cauchy-Schwarz şi rezultă inegalitatea dorită. Vom avea egalitate când $f''(t) = \lambda t^2$ şi $f(a) = f'(a) = 0$, deci pentru $f(t) = \dfrac{\lambda}{12}(t^4 - 4a^3t + 3a^4)$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$ constantă arbitrară.

XII.88. *Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se afle limita sa, unde* $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - n^2}{n^2} \ln \frac{k+n}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Laurenţiu Modan, Bucureşti

Soluţie. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este şirul sumelor Riemann asociat funcţiei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, diviziunii cu puncte echidistante $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n} < \ldots < \dfrac{n}{n}$ şi sistemului de puncte intermediare $\dfrac{k}{n}$, $k = \overline{1, n}$. Evident, avem de-a face cu o integrală improprie, despre care vom arăta însă că este convergentă şi îi vom calcula valoarea:

$$\int_0^1 (x^2 - 1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\cdot\frac{-1}{x(x+1)}dx$$
$$= -\frac{2}{3}\ln 2 - A + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^2 - 3}{x + 1}dx = -\frac{2}{3}\ln 2 - A + \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - x - 2\ln(x + 1)\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{6} - A - \frac{4}{3}\ln 2,$$

unde

$$A = \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\searrow 0}\frac{3[\ln(x+1) - \ln x]}{\dfrac{1}{x^3 - 3x^2}} = \lim_{x\searrow 0}\frac{3\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{-3x^2 + 6x}{x^4(x-3)^2}}$$
$$= \lim_{x\searrow 0}\frac{x^2(x-3)^2}{(x+1)(x-2)} = 0.$$

În concluzie, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent spre $-\dfrac{1}{6} - \dfrac{4}{3}\ln 2$.

XII.89. *Să se arate că polinomul $f = 200X^5 + 196X^4 - 49X^3 + 35X^2 + 14X + 63$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Vom folosi criteriul de ireductibilitate al lui Eisenstein şi teorema lui Gauss. Într-adevăr, numărul prim 7 divide $63, 14, 35, -49$ şi 196; 7 nu divide 200, iar 7^2 nu divide 63. Deducem (Eisenstein) că f este ireductibil peste $\mathbb{Z}$, de unde (Gauss) f va fi ireductibil şi peste $\mathbb{Q}$.

XII.90. *Fie $\mathbb{H}$ corpul cuaternionilor, iar $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ unităţile cuaternionice ($\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$). Definim*

$$\mathbb{K} = \left\{ a + \frac{b + c\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{b\sqrt{3} - c + 2d\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{j} + \frac{3b - c\sqrt{3} - 2d}{4}\boldsymbol{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

pe care considerăm operaţiile uzuale între cuaternioni. Să se arate că în acest mod obţinem un corp necomutativ, izomorf cu corpul cuaternionilor.

Dumitru Mihalache, Bârlad

Soluţie. Notăm $\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{j} + \frac{3}{4}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}\boldsymbol{j} - \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$. Se verifică prin calcul că $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{w}^2 = -1$, $\boldsymbol{uv} = -\boldsymbol{vu} = \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{vw} = -\boldsymbol{wv} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{wu} = -\boldsymbol{uw} = \boldsymbol{v}$, iar orice element al lui $\mathbb{K}$ se scrie sub forma $a + b\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$. Funcţia $f : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$, $f(a + b\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}) = a + b\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$ este bijectivă şi realizează un transport de structură între $\mathbb{H}$ şi $\mathbb{K}$, de unde concluzia.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2008

A. Nivel gimnazial

G136. *Determinaţi numerele reale x, y, z, pentru care*

$$2^{-x} + 3 \cdot 2^{-y} + 2^{-z} = 2^x + 3 \cdot 2^{y+2} + 2^{z+2} = 9.$$

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţia 1 (a autorului). Este binecunoscută inegalitatea $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\forall x, y, z \in (0, \infty)$, cu egalitate când $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$. Atunci:

$$9 = 2^{-x} + 3 \cdot 3^{-y} + 2^{-z} = \frac{1^2}{2^x} + \frac{6^2}{3 \cdot 2^{y+2}} + \frac{2^2}{2^{z+2}} \geq \frac{9^2}{2^x + 3 \cdot 2^{y+2} + 2^{z+2}} = 9$$

şi deducem că $\dfrac{1}{2^x} = \dfrac{1}{2^{y+1}} = \dfrac{1}{2^{z+1}} = t$. Obţinem că $t + 6t + 2t = 9$, prin urmare $t = 1$ şi astfel $x = 0$, $y = -1, z = -1$.

Soluţia 2 (Paul Georgescu). Egalităţile din enunţ se pot rescrie sub forma $2^{-x} + 6 \cdot 2^{-(y+1)} + 2 \cdot 2^{-(z+1)} = 2^x + 6 \cdot 2^{y+1} + 2 \cdot 2^{z+1} = 9$. Din inegalitatea CBS urmează că

$9 \cdot 9 = (2^{-x} + 6 \cdot 2^{-(y+1)} + 2 \cdot 2^{-(z+1)})(2^x + 6 \cdot 2^{y+1} + 2 \cdot 2^{z+1}) \geq$

$\geq (\sqrt{2^{-x}} \cdot \sqrt{2^x} + \sqrt{6 \cdot 2^{-(y+1)}} \cdot \sqrt{6 \cdot 2^{y+1}} + \sqrt{2 \cdot 2^{-(z+1)}} \cdot \sqrt{2 \cdot 2^{z+1}})^2 = 9^2.$

Cum se atinge efectiv egalitatea, obţinem că $2^x = 2^{y+1} = 2^{z+1}$ şi, după înlocuire, deducem că $x = 0$, $y = -1$, $z = -1$.

G137. *Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $\lambda = \dfrac{2\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$. Să se exprime în funcţie de a, b, c şi λ numărul real $\mu = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$.*

I. V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Amplificăm succesiv fracţia ce defineşte λ cu $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$; notând $x = \sqrt{ab}$, $y = \sqrt{bc}$, $z = \sqrt{ca}$, obţinem:

$$\begin{aligned}
&2a + x - z = \lambda(a + x + z); 2x + b - y = \lambda(x + b + y); 2z + y - c = \lambda(z + y + c) \Leftrightarrow \\
&(1 - \lambda)x - (1 + \lambda)z = a(\lambda - 2); (2 - \lambda)x - (1 + \lambda)y = b(\lambda - 1); \\
&(1 - \lambda)y + (2 - \lambda)z = c(\lambda + 1).
\end{aligned}$$

Din acest sistem putem afla x, y, z în funcţie de a, b, c şi λ. Cum $\mu \cdot \sqrt{a} = \dfrac{a - x - z}{2a + x + z}$, deducem că $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot \dfrac{a \cdot A \cdot C - B \cdot C + A \cdot D}{2a \cdot A \cdot C + B \cdot C + A \cdot D}$, unde $A = 2(2 - 3\lambda + \lambda^2)$, $B = c(1+\lambda)^2 - b(1-\lambda)^2 - a(2-\lambda)^2$, $C = 2(2+\lambda-\lambda^2)$, $D = c(1+\lambda)^2 - b(1-\lambda)^2 + a(2-\lambda)^2$.

G138. *a) Numerele reale pozitive a, b, c sunt astfel încât* $4abc = a+b+c+1$. *Să se arate că* $\dfrac{b^2+c^2}{a} + \dfrac{c^2+a^2}{b} + \dfrac{b^2+a^2}{c} \geq 2\,(ab+bc+ca)$.

b) Numerele reale pozitive a, b, c sunt astfel încât $\dfrac{b^2+c^2}{a} + \dfrac{c^2+a^2}{b} + \dfrac{b^2+a^2}{c} \leq 2\,(ab+bc+ca)$. *Să se arate că* $a+b+c+1 \leq 4abc$.

Andrei Laurenţiu Ciupan, elev, Bucureşti

Soluţie. a) Conform inegalităţii CBS, avem că $\left(\dfrac{b^2}{a} + \dfrac{c^2}{a} + a^2\right)(a+a+1) \geq (a+b+c)^2$ şi încă două relaţii similare; prin adunare, obţinem că

$$\sum \frac{b^2+c^2}{a} + \sum a^2 \geq (a+b+c)^2 \cdot \left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1}\right). \tag{1}$$

Din condiţia $4abc = a+b+c+1$ rezultă imediat că $\dfrac{1}{2a+1} + \dfrac{1}{2b+1} + \dfrac{1}{2c+1} = 1$ şi, folosind (1), urmează că

$$\sum \frac{b^2+c^2}{a} + (a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow \sum \frac{b^2+c^2}{a} \geq 2(ab+bc+ca).$$

b) Folosind (1) şi ipoteza, găsim că

$$(a+b+c)^2 \geq \sum \frac{b^2+c^2}{a} + \sum a^2 \geq (a+b+c)^2 \cdot \sum \frac{1}{2a+1} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} \leq 1 \Rightarrow \sum (2a+1)(2b+1) \leq (2a+1)(2b+1)(2c+1)$$
$$\Rightarrow 4\sum ab + 4\sum a + 3 \leq 4\sum ab + 2\sum a + 8abc + 1 \Rightarrow a+b+c+1 \leq 4abc.$$

G139. *Denisa scrie pe tablă numerele* 1, 2, 3, …, 2008. *Ea alege două numere, le şterge de pe tablă şi scrie în loc modulul diferenţei lor, repetând această operaţie până când pe tablă rămâne un singur număr. Poate proceda Denisa în aşa fel încât numărul rămas să fie* 2007*? Dar* 2008*?*

Iulieta Grigoraş, Iaşi

Soluţie. Se constată uşor că paritarea numărului de numere impare de pe tablă este un invariant. Cum iniţial sunt 1004 numere impare, în final trebuie să avem un număr par de numere impare şi acest număr va fi zero, prin urmare pe tablă nu poate rămâne 2007.

La a doua întrebare, răspunsul este afirmativ. Un procedeu de a obţine 2008 ar putea fi următorul: Denisa înlocuieşte numerele 2 şi 3 cu 1, 4 şi 5 cu $1, \ldots, 2006$ şi 2007 cu 1 şi rămâne astfel cu 1004 de 1 şi un 2008. Alegând perechi $(1,1)$ şi înlocuindu-le cu 0, rămâne cu 502 de 0 şi un 2008. Indiferent ce va face în continuare, în final rămâne pe tablă numărul 2008.

G140. *Un poligon cu n laturi este împărţit în* $n-2$ *triunghiuri cu ajutorul a* $n-3$ *diagonale ale sale care nu se intersectează în puncte interioare (o astfel de împărţire se numeşte triangulaţie a poligonului). Notăm cu* T_0 *numărul triunghiurilor ale căror* *laturi sunt toate diagonale ale poligonului şi cu T_2 numărul triunghiurilor care au câte două laturi care sunt laturi şi pentru poligon, iar a treia latură diagonală a poligonului. Să se arate că $T_2 = T_0 + 2$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Mai considerăm şi triunghiurile care au exact o latură care este şi latură a poligonului şi notăm cu T_1 numărul lor. Avem că $n = 2T_2 + T_1$ (numărând în două feluri laturile poligonului) şi că $n - 2 = T_2 + T_1 + T_0$ (numărând în două moduri triunghiurile). Egalând cele două expresii ale lui n, obţinem că $2T_2 + T_1 = T_2 + T_1 + T_0 + 2$, de unde $T_2 = T_0 + 2$.

G141. *Se consideră o reţea de drepte care formează prin intersecţii pătrate congruente. Marcăm $2n + 1$ vârfuri ale unor astfel de pătrate, $n \geq 2$, astfel încât orice dreaptă din reţea să conţină cel mult un punct marcat. Să se arate că există măcar două puncte marcate care sunt separate atât pe orizontală, cât şi pe verticală, de câte un număr impar de drepte ale reţelei.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Asociem nodurilor reţelei coordonate întregi. Fie $N_1(a_1, b_1)$, $N_2(a_2, b_2)$, $\ldots, N_j(a_j, b_j)$, $j \geq n + 1$, numărul maxim de puncte marcate pentru care abscisele $a_1, a_2, \ldots, a_j$ au aceeaşi paritate; sumele $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \ldots, a_{j-1} + a_j$ vor fi toate pare. Dintre numerele $b_1, b_2, \ldots, b_j$, cel puţin $\frac{j}{2}$ sau $\left[\frac{j}{2}\right] + 1$, funcţie de paritatea lui j, au aceeaşi paritate. Cum $\min\{\frac{j}{2}, \left[\frac{j}{2}\right] + 1\} \geq 2$, înseamnă că cel puţin o sumă dintre $b_1 + b_2, b_1 + b_3, \ldots, b_{j-1} + b_j$ este pară; fie aceasta $b_p + b_q$. Vom arăta că punctele $N_p(a_p, b_p)$ şi $N_q(a_q, b_q)$ îndeplinesc cerinţa din enunţ.

Avem că $\frac{a_p + a_q}{2}, \frac{b_p + b_q}{2} \in \mathbb{Z}$, deci mijlocul O al segmentului N_pN_q este nod al reţelei. Fie d_0, d_p, d_q dreptele orizontale ale reţelei care trec prin O, N_p, respectiv N_q. Numărul dreptelor din reţea cuprinse între d_0 şi d_p este acelaşi cu cel al dreptelor cuprinse între d_0 şi d_q; fie k acest număr. Atunci N_p şi N_q sunt separate pe orizontală de $2k + 1$ drepte (incluzând şi pe d_0). Analog se judecă pe verticală.

G142. *Spunem că vârful A al triunghiului ABC are proprietatea (P) dacă $AX < BC$, $\forall X \in (BC)$. Să se arate că dacă fiecare vârf al $\triangle ABC$ are proprietatea (P), atunci triunghiul este echilateral.*

Doru Buzac, Iaşi

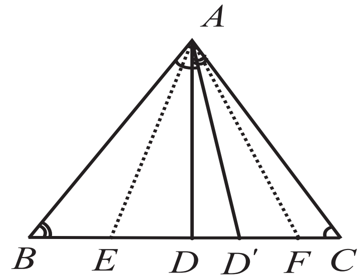
Soluţie. Arătăm întâi că dacă $\triangle ABC$ este echilateral, fiecare vârf are proprietatea (P). Fie $X \in (BC)$; atunci $m(\widehat{AXB}) > m(\widehat{ACX})$ (proprietate a unghiului exterior), deci $m(\widehat{AXB}) > m(\widehat{ABX})$ şi atunci $AB > AX$, prin urmare $AX < BC$ şi astfel vârful are proprietatea (P). Analog se procedează pentru celelalte vârfuri.

În continuare, demonstrăm că dacă $\triangle ABC$ nu este echilateral, vârful care se opune laturii mai scurte nu are proprietatea (P). Să zicem că c este latura cea mai scurtă; raţionamentul funcţionează şi dacă sunt două laturi de lungime c. Notăm $\{M\} = (BC) \cap \mathcal{C}(C, c)$, $\{N\} = (AC) \cap \mathcal{C}(C, c)$ şi fie Y un punct oarecare al arcului $\widehat{MN}$, interior triunghiului (evident că există astfel de puncte). Dacă $\{X\} = CY \cap (AB)$, atunci $CX > CY = c = AB$, prin urmare vârful C nu are proprietatea (P).

G143. *Considerăm triunghiul ABC, iar D, D' sunt puncte pe dreapta BC astfel încât $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, iar $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{BAD}$ şi $\widehat{CAD'}$ taie dreapta BC în E, respectiv F. Să se arate că cercul circumscris $\triangle AEF$ şi cercul înscris în $\triangle ABC$ sunt concentrice.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Sunt de considerat mai multe cazuri, după cum unul sau ambele puncte D şi D' se află pe segmentul $[BC]$; vom face justificarea în situaţia din figură, în rest judecându-se analog.

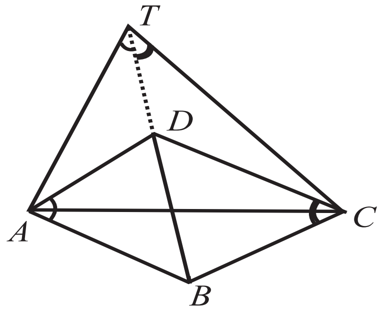


Deoarece $m(\widehat{AFB}) = m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{CAF}) = m(\widehat{BAD'}) + m(\widehat{D'AF}) = m(\widehat{BAF})$, înseamnă că $\triangle ABF$ este isoscel şi analog $\triangle ACE$ va fi tot isoscel. Mediatoarele segmentelor $[AF]$ şi $[AE]$ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$, respectiv $\widehat{C}$ şi de aici urmează concluzia dorită.

G144. *Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB = BC$. Să se arate că $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = 90^\circ$ dacă şi numai dacă $AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 = AC^2 \cdot BD^2$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie $T, S \in (BD$ astfel încât $\widehat{ATB} \equiv \widehat{BAD}$, iar $\widehat{CSB} \equiv \widehat{BCD}$. Din asemănarea $\triangle ABT \sim \triangle DBA$ (U.U.), obţinem că $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BT}{AB} = \dfrac{AT}{DA}$, prin urmare $BT = \dfrac{AB^2}{BD}$, iar $AT = \dfrac{AB \cdot AD}{BD}$. Analog, din $\triangle DBC \sim \triangle CBS$ obţinem că $BS = \dfrac{BC^2}{BD}$, iar $CS = \dfrac{BC \cdot CD}{BD}$. Cum $AB = BC$, rezultă că $BT = BS$, deci $T = S$. Atunci:



$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 90^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{ATC}) = 90^\circ \Leftrightarrow AT^2 + TC^2 = AC^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{AB^2 \cdot AD^2}{BD^2} + \frac{BC^2 \cdot CD^2}{BD^2} = AC^2 \Leftrightarrow BC^2 \cdot AD^2 + AB^2 \cdot CD^2 = AC^2 \cdot BD^2.$$

G145. *Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$, iar pe arcul deschis $\overset{\frown}{BC}$ care nu-l conţine pe A al cercului circumscris triunghiului se ia un punct M. Să se arate că*
$$\sqrt{MB \cdot MC} < MA < \sqrt{MB \cdot MC} + \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{MB \cdot MC}}.$$

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Fie $2\alpha = m(\widehat{BAC})$; evident că $BC = 2AB \cdot \sin\alpha$. Aplicând prima teoremă a lui Ptolemeu patrulaterului inscriptibil $ABMC$, obţinem:

$$AM \cdot BC = AB \cdot MC + AC \cdot MB \Leftrightarrow 2AM \cdot AB \cdot \sin\alpha = AB(MB + MC) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow MA = \frac{MB + MC}{2} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \geq \sqrt{MB \cdot MC} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} > \sqrt{MB \cdot MC},$$

cu inegalitate strictă deoarece $\alpha < 90°$. Aplicând acum a doua teoremă a lui Ptolemeu, avem:

$$\frac{MA}{BC} = \frac{AB \cdot AC + MB \cdot MC}{AB \cdot MB + AC \cdot MC} \Rightarrow \frac{MA}{2AB \cdot \sin\alpha} = \frac{AB^2 + MB \cdot MC}{AB(MB + MC)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA = \frac{AB^2 + MB \cdot MC}{\frac{MB + MC}{2}} \cdot \sin\alpha < \frac{AB^2 + MB \cdot MC}{\sqrt{MB \cdot MC}} \cdot 1,$$

de unde concluzia problemei.

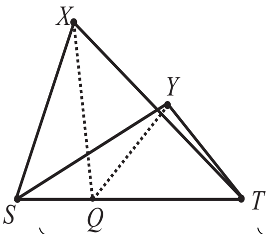
B. Nivel liceal

L136. *Fie A, B, C trei puncte pe sfera $\mathcal{S}$ de centru O, iar M_1 şi M_2 două puncte exterioare sferei astfel încât OM_1 şi OM_2 să intersecteze planul (ABC) în două puncte interioare $\triangle ABC$. Dacă $M_1A \geq M_2A$, $M_1B \geq M_2B$ şi $M_1C \geq M_2C$, să se arate că $M_1O \geq M_2O$.*

Cătălin Ţigăeru, Suceava

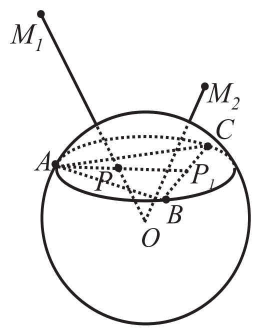
Soluţie. Vom demonstra întâi un rezultat ajutător:

Lemă. Se consideră segmentul ST, iar X, Y sunt puncte în spaţiu astfel încât $XS \geq YS, XT \geq YT$. Dacă $Q \in [ST]$, atunci $XQ \geq YQ$.



Vom nota $\overrightarrow{a}_1 = \overrightarrow{XS}, \overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{XT}$, $\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{YS}$, $\overrightarrow{b}_2 = \overrightarrow{YT}$, $\lambda = \dfrac{SQ}{ST} \in [0,1]$; avem că $\overrightarrow{XQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{a}_1 + \lambda\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{YQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{b}_1 + \lambda\overrightarrow{b}_2$, iar $\overrightarrow{a}_2 - \overrightarrow{a}_1 = \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b}_1$. Considerăm funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(\lambda) = |(1-\lambda)\overrightarrow{a}_1 + \lambda\overrightarrow{a}_2|^2 - |(1-\lambda)\overrightarrow{b}_1 + \lambda\overrightarrow{b}_2|^2 = 2\lambda \cdot [\overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_2 - \overrightarrow{b}_1 \cdot \overrightarrow{b}_2 - |\overrightarrow{a}_1|^2 + |\overrightarrow{b}_1|^2] + |\overrightarrow{a}_1|^2 - |\overrightarrow{b}_1|^2$. Avem de-a face cu o funcţie liniară, cu $f(0) = |\overrightarrow{a}_1|^2 - |\overrightarrow{b}_1|^2 \geq 0$ şi $f(1) = |\overrightarrow{a}_2|^2 - |\overrightarrow{b}_2|^2 \geq 0$; deducem că $f(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \in [0,1]$ şi astfel lema este demonstrată.

Revenim la problemă: fie $\{P\} = M_1O \cap (ABC)$, $\{P_1\} = AP \cap BC$, unde $P_1 \in [BC]$ şi $P \in [AP_1]$, conform ipotezei. Aplicând de două ori lema precedentă, obţinem că $M_1P_1 \geq M_2P_1$, apoi că $M_1P \geq M_2P$. Atunci $M_2O \leq M_2P + PO \leq M_1P + PO = M_1O$, ceea ce încheie soluţia.

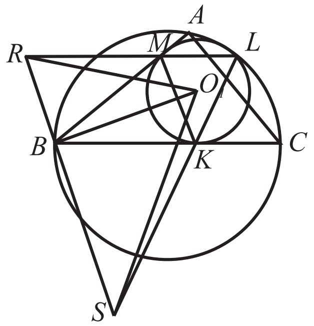


L137. *Considerăm $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi fie $\mathcal{C}_1$ cercul de centru O_1, tangent la AB, BC şi la cercul $\mathcal{C}$ în M, K, respectiv L. Paralela prin B la MK intersectează dreptele LM şi LK în R, respectiv S. Să se arate că unghiul $\widehat{RO_1S}$ este ascuţit.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Fie Q punctul de pe semidreapta $[BO_1$ pentru care unghiul $\widehat{RQS}$

este drept. Cum $O_1B \perp MK$ şi $MK \parallel RS$, rezultă că $O_1B \perp RS$. Conform teoremei înălţimii, avem că $QB^2 = RB \cdot BS$ şi atunci concluzia problemei revine la a demonstra că $O_1B^2 > RB \cdot RS(*)$.

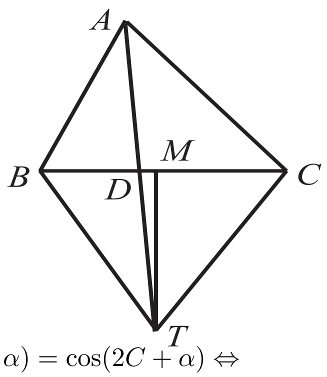


Avem că $\widehat{BKS} \equiv \widehat{LKC} \equiv \widehat{LMK} \equiv \widehat{MRB}$, iar $m(\widehat{MBR}) = m(\widehat{KBS}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B})$ ($[BO_1$ fiind bisectoare pentru $\widehat{ABC}$). Rezultă că $\triangle MRB \sim \triangle SKB$, de unde $\frac{MB}{SB} = \frac{RB}{KB} \Leftrightarrow MB^2 = RB \cdot SB$. Însă $O_1B > MB$ şi astfel deducem că $(*)$ este adevărată, ceea ce încheie rezolvarea.

L138. *Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$, $m(\widehat{A}) < 90^\circ$, unghiul $\widehat{A}$ fiind cel mai mare al triunghiului. Notăm cu M mijlocul lui $[BC]$ şi T punctul de intersecţie al simedianei din A cu mediatoarea lui $[BC]$. Să se arate că $2AM < AT$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Cristian Pravăţ, Iaşi

Soluţie. Fie $\{D\} = AT \cap BC$ şi $\alpha = m(\widehat{CBT}) = m(\widehat{BCT})$. Cum AD este simediană, avem:



$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{BD}{CD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{S_{BTD}}{S_{CTD}} = \frac{S_{ABD} + S_{BTD}}{S_{ACD} + S_{CTD}} =$$
$$= \frac{S_{ABT}}{S_{ACT}} = \frac{AB \cdot BT \cdot \sin(B+\alpha)}{AC \cdot CT \cdot \sin(C+\alpha)}$$
$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin(B+\alpha)}{\sin(C+\alpha)}.$$

Folosind teorema sinusurilor şi faptul că $B \neq d$, deducem că

$$\sin B \sin(B+\alpha) = \sin C \sin(C+\alpha) \Leftrightarrow \cos(2B+\alpha) = \cos(2C+\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2B + \alpha = 360^\circ - 2C - \alpha \Leftrightarrow A = \alpha.$$

Ţinând cont că $BT = \frac{a}{2\cos A}$ şi $AM^2 = \frac{1}{2}(b^2+c^2) - \frac{1}{4}a^2$, cu teorema cosinusului în $\triangle ABT$ obţinem:

$$AT^2 = c^2 + \frac{a^2}{4\cos^2 A} - 2c\frac{a}{2\cos A} \cdot \cos(A+B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2T\cos A)^2 = c^2(2\cos A)^2 + a^2 + ac \cdot (2\cos A)(2\cos C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2AT\cos A)^2 = \frac{c^2(b^2+c^2-a^2)}{b^2c^2} + a^2 + ac \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{bc} \cdot \frac{b^2-c^2+a^2}{ab} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2AT\cos A)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \Leftrightarrow (2AT\cos A)^2 = 4AM^2 \Leftrightarrow AM = AT\cos A.$$

Însă $\widehat{A}$ este cel mai mare unghi, deci $m(\widehat{A}) > 60^\circ$ şi astfel $\cos A < \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, de unde concluzia problemei.

L139. *Fie $A_1A_2\cdots A_n$ un poligon regulat, iar M un punct variabil în interiorul sau pe laturile poligonului. Să se determine maximul produsului $f(M) = MA_1\cdot MA_2\cdot \cdots \cdot MA_n$, precum şi punctele M care realizează acest maxim, în fiecare din cazurile: a) $n=3$; b) $n=6$.*

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. a) Raportăm planul la un reper cartezian astfel încât vârfurile triunghiului echilateral să aibă afixele $A_1(O), A_2(1), A_3(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Dacă z este afixul lui M, atunci $g(z) = z(z-1)(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$ este o funcţie olomorfă pentru z în domeniul plan delimitat de triunghi. Conform principiului maximului modulului, maximul lui $f(M) = |g(z)|$ se realizează pe frontiera domeniului, iar datorită simetriei triunghiului echilateral este suficient să căutăm acest maxim pentru $M\in[A_1A_2]$. Aceasta înseamnă că trebuie să găsim maximul lui $|g(z)|$ pentru $z = x\in[0,1]$, unde

$$|g(x)|^2 = x^2(1-x)^2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] = x^2(1-x)^2(x^2-x+1)\leq\frac{3}{64}.$$

Într-adevăr, după calcule, inegalitatea anunţată se dovedeşte a fi echivalentă cu $(2x-1)^2[4x(x-1)(4x^2-4x+3)-3]\leq 0$, iar aceasta este clară pentru $x\in[0,1]$. Egalitatea se atinge doar pentru $x=\frac{1}{2}$. În concluzie, maximul produsului $f(M)$ este $\frac{\sqrt{3}}{8}$ şi este atins când M este unul dintre mijloacele laturilor triunghiului.

b) Procedăm ca mai înainte: alegem un reper cartezian în raport cu care $A_1(0,0)$, $A_2(1,0), A_3\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_4(1,\sqrt{3})$, $A_5(0,\sqrt{3})$; $A_6\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi folosind principiul maximului modulului şi considerentele de simetrie, vom considera că $M\in[A_1A_2]$, deci $M(x,0)$, cu $x\in[0,1]$. Atunci

$$[f(M)]^2 = x^2(1-x)^2(x^2-3x+3)(x^2-2x+4)(x^2+3)(x^2+x+1)$$

şi maximul acestei expresii poate fi determinat cu inegalitatea mediilor:

$$\begin{aligned}
&x^2(1-x)^2\cdot\frac{x^2-3x+3}{7}\cdot\frac{x^2-2x+4}{13}\cdot\frac{x^2+3}{13}\cdot\frac{x^2+x+1}{7}\leq\\
&\leq\left[\frac{1}{6}(2x(1-x)+\frac{x^2-3x+3}{6}+\frac{x^2-2x+4}{13}+\frac{x^2+3}{13}+\frac{x^2+x+1}{7})\right]^6=\\
&=\left[\frac{142x(1-x)+101}{6\cdot 91}\right]^6\leq\left(\frac{\frac{71}{2}+101}{6\cdot 91}\right)^6=\frac{1}{4^6}.
\end{aligned}$$

La urmă am folosit inegalitatea $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ (faptul că $x\in[0,1]$ asigură că produsul $x(1-x)$ este nenegativ). Egalitatea are loc pentru $x(1-x)=\frac{x^2-3x+3}{7}=$

$\dfrac{x^2-2x+4}{13}=\dfrac{x^2+3}{13}=\dfrac{x^2+x+1}{7}$ şi $x(1-x)=\dfrac{1}{4}$, deci dacă şi numai dacă $x=\dfrac{1}{2}$, caz în care M este mijlocul laturii $[A_1A_2]$. În concluzie, $f(M)\leq\dfrac{91}{64}$ şi maximul se atinge în mijloacele laturilor hexagonului.

L140. *Fie* $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ *astfel încât* $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)(b+c)(c+a)=4$. *Să se arate că* $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\geq\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}$.

Andrei Vrăjitoarea, elev, Craiova

Soluţia 1 (Marius Olteanu, Rm. Vâlcea). Din identitatea $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)[(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]+3abc$, rezultă că $(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^2)$. Ţinând seama de acest fapt, inegalitatea dată se scrie succesiv:

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3abc\\&\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2\geq(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}\tag{1}$$

Din inegalitatea lui Cebîşev, avem că $a^3+b^3+c^3\geq\dfrac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ şi atunci, pentru a demonstra (1), ar fi destul să arătăm că

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{2}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow a+b+c\leq\frac{3}{2},\end{aligned}\tag{2}$$

deoarece $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow a^2+b^2+c^2>0$.

Notăm $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{b+c}{2}$, $z=\dfrac{c+a}{2}$; condiţia din enunţ devine $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Conform problemei 19, pg. 10, din *Old and New Inequalities*, autori T. Andreescu, V. Cîrtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, apărută la Editura GIL, Zalău, 2002, rezultă că $x+y+z\leq\dfrac{3}{2}$ şi, de aici, urmează (2). Astfel, soluţia problemei este încheiată.

Soluţia 2 (a autorului). Vom demonstra că orice ecuaţie de forma $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta\gamma=4$ are soluţiile pozitive de forma $(2\cos A,2\cos B,2\cos C)$, unde A,B,C sunt unghiurile unui triunghi ascuţitunghic. Într-adevăr, se observă imediat că $\alpha,\beta,\gamma\in(0,2)$ şi atunci există $A,B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\alpha=2\cos A$, $\beta=2\cos B$. Ecuaţia $\gamma^2+4\cos A\cos B\cdot\gamma+4(\cos^2A+\cos^2B-1)=c$ are discriminantul $16(\cos^2A-1)(\cos^2B-1)=16\sin^2A\sin^2B$ şi singura soluţie cu şansa de a fi pozitivă este $\gamma=-2\cos(A+B)$, dacă $A+B>\dfrac{\pi}{2}$. Considerând $C=\pi-(A+B)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, avem că $\gamma=2\cos C$. Reciproc, un triplet de forma anunţată este soluţie a ecuaţiei, fapt care rezultă din identitatea $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z+2\cos x\cos y\cos z-1=4\cos\dfrac{x+y+z}{2}\cdot\cos\dfrac{-x+y+z}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y+z}{2}\cdot\cos\dfrac{x+y-z}{2}$. În concluzie, avem că $a+b=2\cos A$, $b+c=2\cos B$, $c+a=2\cos C$ şi, cu substituţiile $x=\sqrt{\dfrac{a}{bc}}$, $y=\sqrt{\dfrac{b}{ca}}$,

$z = \sqrt{\dfrac{c}{ab}}$, inegalitatea de demonstrat devine

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos A + 2yz\cos B + 2zx\cos C, \qquad (*)$$

unde $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, iar A, B, C sunt unghiurile unui triunghi ascuţitunghic.

Rămâne să justificăm $(*)$. Trecem totul în stânga şi gândim expresia ca fiind de gradul II în x. Astfel, ar fi suficient să demonstrăm că discriminantul este negativ; avem:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(y\cos A + z\cos C)^2 - 4(y^2 + z^2 - 2yz\cos B) = \\ &= 4y^2(\cos^2 A - 1) + 4z^2(\cos^2 C - 1) + 8yz(\cos A\cos C + \cos(A + C)) = \\ &= -4y^2\sin^2 A - 4z^2\sin^2 C + 8yz\sin A\sin C = -4(y\sin A - z\sin C)^2 \leq 0,\end{aligned}$$

$\forall y, z \in \mathbb{R}$, ceea ce încheie soluţia problemei.

L141. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, atunci*

$$\frac{x+2}{2x^2+1} + \frac{y+2}{2y^2+1} + \frac{z+2}{2z^2+1} \geq 3.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Nela Ciceu, Bacău

Soluţie. Pentru $x \geq 0$ avem că $\dfrac{x+2}{2x^2+1} \geq \dfrac{3}{x^3+2}$(1), deoarece

$$(1) \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 1)(x-1)^2 \geq 0,$$

iar ultima inegalitate este evident adevărată pentru x pozitiv. Folosind (1) şi analoagele sale, precum şi inegalitatea mediilor $MH \leq MA$, obţinem:

$$\begin{aligned}&\frac{x+2}{2x^2+1} + \frac{y+2}{2y^2+1} + \frac{z+2}{2z^2+1} \geq 3 \cdot \left(\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{y^3+1} + \frac{1}{z^3+2}\right) \\ &\geq 3 \cdot \frac{9}{x^3+2+y^3+2+z^3+2} = 3 \cdot \frac{9}{6+3} = 3. \qquad (1)\end{aligned}$$

Egalitatea se atinge pentru $x = y = z = 1$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea, care observă că inegalitatea are loc pentru x, y, z din $[\sqrt{3} - 2, +\infty)$ cu $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

L142. *Considerăm $n \in \mathbb{N}^*$, numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ şi A mulţimea tuturor sumelor $\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$, unde semnele se aleg în toate modurile posibile. Arătaţi că $|A| > \dfrac{n^2+n+2}{2}$ şi determinaţi numerele a_n pentru care se atinge egalitatea.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $S = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$, iar $b_i \in A$, atunci $b_i = S - 2(a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k})$, unde $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, k \leq n$, sunt termenii care apar cu minus în b_i. Pentru prima cerinţă a problemei, ar fi suficient să punem în evidenţă $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ termeni distincţi de forma $a_{i_1}+a_{i_2}+\ldots+a_{i_k}$, $k\in\overline{0,n}$ (pentru $k=0$, termenul este egal cu 0). Aceşti termeni sunt $0<a_1<a_2<\ldots<a_n<a_n+a_1<a_n+a_2<\ldots<a_n+a_{n-1}<a_b+a_{n-1}+a_1<\ldots<a_n+a_{n-1}+a_{n-2}<\ldots<a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1$, în număr de $1+n+(n-1)+\ldots+1=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Dacă A are exact $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ elementele, atunci orice sumă de forma $a_{i_1}+a_{i_2}+\ldots+a_{i_k}$, $0\le k\le n$, trebuie să se regăsească în lista de mai sus. Avem că $a_{n-1}<a_1+a_{n-1}<a_1+a_n$, deci $a_1+a_{n-1}=a_n$. Apoi, $a_{n-2}<a_1+a_{n-2}<a_1+a_{n-1}=a_n$, de unde $a_1+a_{n-2}=a_{n-1}$. Procedând analog, găsim că $a_1+a_{n-3}=a_{n-2},\ldots,a_1+a_3=a_4$, $a_1+a_2=a_3$, prin urmare $a_k=a_2+(k-2)a_1$, $k\in\overline{3,n}$. Totodată, $a_n=a_1+a_{n-1}<a_2+a_{n-2}<a_2+a_n$, deci $a_2+a_{n-2}=a_n+a_1$, adică $a_2=2a_1$ şi astfel $a_k=ka_1$, $k\in\overline{1,n}$. Se vede, uşor că mulţimea A a sumelor de forma $a_1(\pm1\pm2\pm\ldots\pm n)$, cu $a_1\in\mathbb{R}_+^*$ oarecare, are exact $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ elemente.

L143. *Să se arate că pentru p număr natural prim şi $m,n\in\{0,1,\ldots,p-1\}$, $m>n$, avem* $\dbinom{2p+m}{2p+n}\equiv2\dbinom{p+m}{p+n}-\dbinom{m}{n}\ (\operatorname{mod}p^2)$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Considerăm identitatea $(1+X)^{2p+m}=(1+X)^p\cdot(1+X)^p\cdot(1+X)^m$ şi egalăm coeficienţii lui X^{2p+n} din cei doi membri; obţinem că $\dbinom{2p+m}{2p+n}=\displaystyle\sum_{i+j+k=2p+n}\binom{p}{i}\binom{p}{j}\binom{m}{k}$. Deoarece $\dbinom{p}{q}\equiv0(\operatorname{mod}p)$ pentru $1\le q\le p-1$, rezultă că toţi termenii din suma precedentă care cprespund unor valori $i,j\in\{1,2,\ldots,p-1\}$ sunt $0(\operatorname{mod}p^2)$, prin urmare $\dbinom{2p+m}{2p+n}\equiv2\cdot\displaystyle\sum_{i+k=p+n}\binom{p}{i}\binom{m}{k}-\binom{m}{n}(\operatorname{mod}p^2)$. Dacă mai ţinem seama şi de binecunoscuta identitate $\displaystyle\sum_{i+k=p+n}\binom{p}{i}\binom{m}{k}=\binom{p+m}{p+n}$, găsim exact congruenţa din enunţ.

L144. *Fie $p\in\mathbb{N}$, $p\ge2$; definim şirurile $(x_n)_{n\ge1}$ şi $(y_n)_{n\ge1}$ prin: $x_1=\sqrt{p\,(p-1)}$, $x_{n+1}=\sqrt{p\,(p-1)+x_n}$, $y_n=\left\{2^np^{n-1}x_n\right\}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, unde $\{\cdot\}$ desemnează partea fracţionară. Să se arate că şirul (y_n) este strict monoton.*

Sorin Puşpană, Craiova

Soluţie. Se justifică uşor prin inducţie inegalităţile

$$2^np^{n-1}x_n<(2p)^n-1,\forall n\in\mathbb{N}^*;\tag{1}$$

$$2^np^{n-1}x_n>(2p)^n-2+\frac{8}{(2p)^{n+1}},\forall n\in\mathbb{N}^*.\tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $[2^np^{n-1}x_n]=(2p)^n-2$, prin urmare $y_n=2-2^np^{n-1}(p-x_n)$.

Obţinem că

$$y_{n+1} - y_n = 2^n p^{n-1}(-2p^2 + p + 2px_{n+1} - x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (3)$$

Din recurenţa care-l defineşte pe x_n, avem că $p^2 - x_{n+1}^2 = p - x_n$, iar din (1) deducem că $x_n \leq p, \forall n \in \mathbb{N}^*$. În acest fel,

$$\frac{p - x_{n+1}}{p - x_n} = \frac{1}{p + x_{n+1}} > \frac{1}{2p} \Rightarrow -2p^2 + p + 2px_{n+1} - x_n < 0$$

şi, ţinând seama de (3), urmează că (y_n) este strict descrescător.

L145. *Fie* $0 < \alpha < \beta$*; definim şirurile* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ *prin* $x_0 = \alpha$, $y_0 = 0$, $x_{n+1} = \int_{x_n}^{y_n} e^{-\frac{\alpha^2}{t^2}} dt$, $y_{n+1} = \int_{y_n}^{x_n} e^{-\frac{\beta^2}{t^2}} dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Arătaţi că cele două şiruri sunt convergente şi aflaţi limitele lor.*

Marius Apetrii, Iaşi

Soluţie. Folosim teorema de medie:

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \int_{x_n}^{y_n} (e^{-\frac{\alpha^2}{t^2}} + e^{-\frac{\beta^2}{t^2}}) dt = (e^{-\frac{\alpha^2}{c_n^2}} + e^{-\frac{\beta^2}{c_n^2}})(y_n - x_n),$$

unde c_n este un număr între x_n şi y_n. Rezultă că termenii şirului $(x_n - y_n)$ au semne alternante şi, folosind faptul că $x_0 - y_0 > 0$, deducem că $x_{2n} \geq y_{2n}$, $x_{2n+1} \leq y_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Din modul de definire al şirurilor, vom avea că $x_{2n} \geq 0$, $x_{2n+1} \leq 0$, $y_{2n} \leq 0$ şi $y_{2n+1} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demonstrăm prin inducţie că $|x_n - y_n| \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Afirmaţia este adevărată pentru $n = 0$. Dacă presupunem că $|x_n - y_n| \leq \alpha$, cum $x_n y_n \leq 0$, deducem că $|x_n| \leq \alpha, |y_n| \leq \alpha$, deci $|c_n| \leq \alpha$, obţinem că

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = |e^{-\frac{\alpha^2}{c_n^2}} + e^{-\frac{\beta^2}{c_n^2}}| \cdot |x_n - y_n| \leq \frac{2}{e} \cdot |x_n - y_n| < |x_n - y_n| < \alpha.$$

Din relaţia $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \frac{2}{e}|x_n - y_n|$ mai rezultă că $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n \cdot |x_0 - y_0|$, deci şirul $(x_n - y_n)$ converge la zero. Cum $|x_{n+1}| \leq |x_n - y_n|$ şi $|y_{n+1}| \leq |x_n - y_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obţinem că şirurile din enunţ sunt ambele convergente spre zero.

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.164. Scrie vecinii vecinului comun al numerelor 16 şi 18.
(*Clasa I*) **Diana Tănăsoaie, elevă, Iaşi**

P.165. După ce dau celor doi fraţi mai mari câte două banane, mănânc şi eu trei banane. În coş îmi rămâne un număr de banane ce poate fi scris cu două cifre diferite şi care este cel mai mic număr de acest fel. Câte banane am avut în coş?
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.166. Din cei 8 căţeluşi albi sau negri, cel mult 3 sunt albi. Care este numărul maxim de căţeluşi negri? Dar cel minim?
(*Clasa a II-a*) **Ioana Bărăgan, elevă, Iaşi**

P.167. Într-o cameră se joacă un pisoi cu doi pisici, un căţeluş care ţine în gură o păpuşă şi un băieţel care stă călare pe un căluţ de lemn. Câte picioare participă la joc?
(*Clasa a II-a*) **Alexandru Dumitru Chiriac, elev, Iaşi**

P.168. Există numerele naturale a, b, c, d astfel încât $a + b + c + d = 123$ şi $a : b = b : c = c : d = 1$?
(*Clasa a III-a*) **Amalia Cantemir, elevă, Iaşi**

P.169. Calculează diferenţa următoare, fără a efectua parantezele: $(2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 1000) - (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 999) =$
(*Clasa a III-a*) **Mădălina Bucşă, elevă, Iaşi**

P.170. Doi fraţi au cumpărat un teren în formă de pătrat pe care l-au împărţit în două dreptunghiuri egale. Fiecare doreşte să împrejmuiască propriul teren cu gard. Cât mai are de lucru fiecare, dacă primul a realizat 430 m, al doilea 470 m, iar perimetrul pătratului este de 1000 m?
(*Clasa a III-a*) **Dragoş Iacob, elev, Iaşi**

P.171. Dacă $a+b+c = 175$ şi $a+2c = 200$, calculaţi produsul $(2a+b+3c)\cdot(c-b)$.
(*Clasa a IV-a*) **Inst. Marian Ciuperceanu, Craiova**

P.172. Câte numere $\overline{abc}$ au suma cifrelor 7 şi pot fi rotunjite cu numărul $\overline{ab0}$?
(*Clasa a IV-a*) **Maria Nastasiu, elevă, Iaşi**

P.173. Se formează şirul de numere: 34, 334, 344, 3334, 3444, ... Câte cifre de 3 are numărul de pe locul 2008?
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.102. Un întreprinzător doreşte să cumpere un număr de frigidere de la un angrosist, pe care urmează să le transporte către firma sa cu ajutorul unui camion de mare tonaj, care consumă 10 l de motorină la 100 km (1l de motorină costă 3 lei). Întreprinzătorul poate opta între doi furnizori: A vinde frigiderul cu 1000 lei/buc.,

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2009.

iar B vinde acelaşi produs cu 990 lei/buc., însă are depozitul mai departe decât A, la o distanţă pe şosea $AB = 150\,km$.

a) Dacă întreprinzătorul doreşte să cumpere 20 de frigidere, ce furnizor va alege?

b) La ce număr de frigidere, costurile de achiziţie nu depind de furnizor?

Marian Ciuperceanu, Craiova

V.103. Se consideră numerele naturale $m = \dfrac{3x+5}{2x+2}$, $a = \dfrac{2y+5}{3}$, $b = \dfrac{5z+2}{5}$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că m nu poate fi divizor al lui a, dar poate fi divizor al lui b.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

V.104. Scrieţi numărul 2008 ca sumă de trei cuburi perfecte. (Găsiţi toate posibilităţile!)

Veronica Plăeşu şi Dan Plăeşu, Iaşi

V.105. Se consideră numărul $a = 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2009}$.

a) Demonstraţi că a nu poate fi pătrat perfect.

b) Aflaţi restul împărţirii lui a la 400.

Damian Marinescu, Târgovişte

V.106. Să se determine numărul natural a şi cifra b, dacă $(a+3)\cdot\overline{200b} = a \cdot 2009$.

Enache Pătraşcu, Focşani

V.107. Dacă $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ este dat, determinaţi $x, y \in \mathbb{N}^*$ pentru care $x(x+2y+1) = 2^n \cdot 135$.

Petru Asaftei, Iaşi

V.108. Pe tablă sunt scrise numerele $2, 0, 0, 9$. Putem şterge de pe tablă oricare două numere, scriind în loc succesorii acestora. Este posibil ca, în urma mai multor operaţii de acest fel, să obţinem patru numere egale?

Cătălin Budeanu, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.102. O asociaţie de locatari este formată din trei familii care au consumat într-o lună $27m^3, 16m^3$, respectiv $4m^3$ de apă potabilă. Din consumul total, pentru $38m^3$ de apă trebuie plătită o taxă de canalizare, care se împarte proporţional cu consumul fiecărei familii. Dacă preţul apei este de 1,6 lei/m^3, taxa de canalizare este de 0,56 lei/m^3 şi fiecărei sume i se aplică T.V.A. de 19 %, aflaţi ce sumă trebuie să plătească fiecare familie (efectuaţi calculele cu două zecimale exacte).

Petru Asaftei, Iaşi

VI.103. Să se determine numărul prim p şi numerele întregi a şi x pentru care $(x-a)(x-1)(a-1) = p$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.104. Determinaţi numerele prime p şi q, ştiind că există $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^2 + y^2 = p$, iar $x + y + 1 = q$.

Andrei Cozma, elev, Bucureşti

VI.105. Să se arate că numărul $N = 3^{3^{2009}} - 3^{3^{2008}}$ se poate scrie ca produs a trei numere naturale consecutive.

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

VI.106. Se consideră unghiul $\widehat{xOy}$ şi punctele $A, B \in (Ox, C, D \in (Oy$ astfel încât $A \in (OB)$, iar $C \in (OD)$. Mediatoarele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ se intersectează în S, iar $\widehat{SAB} \equiv \widehat{SCD}$.

a) Demonstraţi că $BC = AD$.

b) Dacă, în plus, punctele B, D şi S sunt coliniare, iar $m(\widehat{SAB}) = 60°$, arătaţi că $AC \perp SC \Leftrightarrow BS = 2 \cdot SD$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

VI.107. Se consideră A, B, C, D, E, F şase puncte în plan astfel încât $AB = CD = CF = DF = 3cm$, $BC = BE = CE = 5cm$, iar $AD = 11cm$. Stabiliţi câte drepte determină cele şase puncte.

Gabriel Popa, Iaşi

VI.108. Un ogar situat în vârful A al unei curţi dreptunghiulare $ABCD$ ($AB = 80m$, $BC = 160m$), porneşte în urmărirea a trei iepuri aflaţi în B, C şi D, alergând de-a lungul gardurilor. Dacă viteza ogarului este $4m/s$, iar vitezele iepurilor sunt $3m/s$, aflaţi după cât timp reuşeşte ogarul să prindă fiecare iepure.

Marian Ciuperceanu, Craiova

Clasa a VII-a

VII.102. În urma unui război dus între două triburi de canibali, în mâinile învingătorilor rămân zece prizonieri, printre care şi căpetenia învinşilor. Şeful de trib al învingătorilor alege, pentru prepararea cinei, câţiva prizonieri (măcar unul), la întâmplare. Care este probabilitatea ca şeful tribului învins să rămână în viaţă?

Gabriel Popa, Iaşi

VII.103. Aflaţi numerele întregi x şi y pentru care $y - 4x + 6 < 0$, $2y - x - 2 > 0$ şi $3y + 2x - 24 < 0$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VII.104. Spunem că un număr natural are proprietatea (P) dacă este prim, cel puţin egal cu 5 şi se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte. Dacă numerele $p_1, p_2, \ldots, p_n$ au proprietatea (P), arătaţi că numărul $A = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + n^2 - n + 2$ nu poate fi pătrat perfect.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

VII.105. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, definim $a(x, y) = \min(2x - y^2, 2y - x^2)$. Arătaţi că:

a) $a(x, y) \leq 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$; b) $\max\{a(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\} = 1$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

VII.106. Se consideră paralelogramul $ABCD, E$ şi F mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AD]$, $\{G\} = CE \cap BD$, $\{H\} = CF \cap BD$, $\{P\} = FG \cap BC$, $\{Q\} = EH \cap CD$. Arătaţi că $3EF = 2PQ$.

Mirela Marin, Iaşi

VII.107. Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{C}) = 60°$, L proiecţia lui A pe BC, M proiecţia lui B pe AC, iar D mijlocul lui $[AB]$. Demonstraţi că triunghiul DML este echilateral.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

VII.108. Considerăm în plan trei cercuri distincte, congruente, ale căror centre nu sunt coliniare. Construiţi cu rigla şi compasul un cerc la care cercurile date să fie tangente interior.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.102. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-\frac{26}{5}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$

Vasile Chiriac, Bacău

VIII.103. Arătaţi că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, există $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n^4\cdot m+1$ este număr compus.

Lucian Tuţescu şi Ion Vişan, Craiova

VIII.104. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=3x^2y^2z^2$. Demonstraţi că $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\leq 1.$

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

VIII.105. Determinaţi $x,y\in\mathbb{N}^*$ pentru care $x^3-y^3=3xy+17$.

Liviu Smarandache şi Ion Vişan, Craiova

VIII.106. În tetraedul $VABC$, avem $AB=4cm, BC=5cm, CA=6cm$, iar ariile feţelor VAB, VBC şi VCA sunt egale cu $\frac{15\sqrt{7}}{4}cm^2$. Calculaţi sinusurile unghiurilor $\widehat{AVB}, \widehat{BVC}$ şi $\widehat{CVA}$.

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

VIII.107. Fie $ABCD$ un tetraedru, iar m_1,m_2 şi m_3 lungimile bimedianelor sale. Demonstraţi că $3(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+CD^2+DB^2)\geq 4(m_1+m_2+m_3)^2$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

VIII.108. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A_{ij}(i,j)$, unde $1\leq i,j\leq 5$. Determinaţi numărul triunghiurilor care au ca vârfuri trei dintre punctele date.

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.96. Determinaţi triunghiurile în care tangentele unghiurilor se exprimă prin numere naturale. (*În legătură cu X.78 din RecMat 1/2007.*)

Titu Zvonaru, Comăneşti

IX.97. Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea $m_a^2h_bh_c+m_b^2h_ch_a+m_c^2h_ah_b\geq 4S^2\left(2+\frac{r}{2R}\right)$.

Cătălin Cristea, Craiova

IX.98. Aflaţi $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, pentru care $|ax^2+bx+c|\leq\left(x-\frac{1}{a}\right)^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Marian Ursărescu, Roman

IX.99. Fie $k \in [0,1), n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$, $\beta_i \in \mathbb{R}, \varepsilon_i \in \{-1,1\}, i = \overline{1,n}$, astfel încât $\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots + \varepsilon_n\alpha_n = 0$. Rezolvaţi ecuaţia

$$|\alpha_1 x + \beta_1| + |\alpha_2 x + \beta_2| + \ldots + |\alpha_n x + \beta_n| = k|\varepsilon_1\beta_1 + \varepsilon_2\beta_2 + \ldots + \varepsilon_n\beta_n|.$$

Dumitru Mihalache şi Gabi Ghidoveanu, Bârlad

IX.100. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale, cu $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$ şi $3 \cdot \sum_{k=1}^{n}(a_k b_k^2 - a_k^2 b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^3 - \sum_{k=1}^{n} a_k^3, \forall n \geq 1$. Demonstraţi că, pentru orice $n \geq 1$, există $\alpha_n \in \{0,1\}$ astfel încât $b_n = \alpha_n(a_1 + \ldots + a_n) - (1-\alpha_n)(a_1 + \ldots + a_{n-1})$.

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a X-a

X.96. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu suma 1, demonstraţi că $a^b \cdot b^c \cdot c^a + b^a \cdot c^b \cdot a^c \leq 2(ab + bc + ca)$.

Dorin Mărghidanu, Craiova

X.97. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ numere complexe distincte astfel încât $(a-b)^3 = (b-c)^3 = (c-a)^3$. Arătaţi că $|2a - b - c| = |2b - c - a| = |2c - a - b|$.

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

X.98. Fie $A_i(z_i), i = \overline{1,3}$ vârfurile unui triunghi din planul xOy şi $P(z)$ un punct din acest plan (z_i şi z sunt afixele punctelor A_i, respectiv P). Să se arate că P este situat în interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$ sau pe una din laturile sale dacă şi numai dacă există $\alpha_i \geq 0, i = \overline{1,3}$, astfel încât $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ şi $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

X.99. Considerăm triunghiurile echilaterale ABC şi $A_1B_1C_1$ şi construim triunghiurile echilaterale $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, AB_1A_3$, BC_1B_3, CA_1A_3, AC_1A_4, BA_1B_4 şi CB_1C_4; toate triunghiurile citate sunt orientate pozitiv. Fie punctele $M_2 \in A_2B$, $N_2 \in B_2C$, $P_2 \in C_2A$, $M_3 \in A_3B$, $N_3 \in B_3C$, $P_3 \in C_3A$, $M_4 \in A_4B$, $N_4 \in B_4C$ şi $P_4 \in C_4A$ astfel încât $\frac{M_2A_2}{M_2B} = \frac{N_2B_2}{N_2C} = \frac{P_2C_2}{P_2A} = \frac{M_3A_3}{M_3B} = \frac{N_3B_3}{N_3C} = \frac{P_3C_3}{P_3A} = \frac{M_4A_4}{M_4B} = \frac{N_4B_4}{N_4C} = \frac{P_4C_4}{P_4A}$. Demonstraţi că triunghiurile $M_2N_2P_2, M_3N_3P_3$ şi $M_4N_4P_4$ sunt echilaterale şi au acelaşi centru.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

X.100. Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\frac{1}{\sin^2 A(\sin B + \sin C)^2} + \frac{1}{\sin^2 B(\sin C + \sin A)^2} + \frac{1}{\sin^2 C(\sin A + \sin B)^2} \geq \frac{4}{3}.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Clasa a XI-a

XI.96. Fie ε rădăcina primitivă de ordin trei a unităţii, iar $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $\det(A + \varepsilon B) = 0$. Demonstraţi că $\det(A - B) = \det A - \det B$.

Dan Popescu, Suceava

XI.97. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Arătaţi că pentru orice $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, există $A \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ astfel încât $A^p \neq I_n$, $\forall p \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ şi $A^k = I_n$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.98. Demonstraţi că funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ este concavă şi, folosind eventual acest lucru, arătaţi că în orice triunghi ascuţitunghic ABC are loc inegalitatea $\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \cdot \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B} \cdot \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C} \leq \frac{1}{27}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

XI.99. Studiaţi convergenţa şirului $(v_n)_{n \geq 1}$ definit prin $v_{n+1} = \frac{(v_n^c + d)^{1/c}}{v_n}$, $\forall n \geq 1$, unde v_1, c şi d sunt numere reale pozitive date.

Gheorghe Costovici şi Adrian Corduneanu, Iaşi

XI.100. Demonstraţi că

$$(x + 1)\left(\sin \frac{\pi}{x + 1} - \cos \frac{\pi}{x + 1}\right) < x\left(\sin \frac{\pi}{x} - \cos \frac{\pi}{x}\right), \forall x \in [2, \infty).$$

Petru Răducanu, Iaşi

Clasa a XII-a

XII.96. Rezolvaţi în S_5 ecuaţia $x^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Liviu Smarandache şi Ionuţ Ivănescu, Craiova

XII.97. Fie $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n}$, iar $m \in (0, \infty)$ astfel încât $\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{m + k} = 0$. Să se arate că ecuaţia $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ admite soluţie în intervalul $(0, 1)$.

Mihail Bencze, Braşov

XII.98. Determinaţi primitivele funcţiei $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin^{3n-1} x \cdot \cos^{n-1} x}{\sin^{4n} x + \cos^{4n} x}$, $n \in \mathbb{N}$.

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

XII.99. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to (0, 1)$ continuă şi descrescătoare şi şirul strict crescător $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale pozitive, astfel încât şirul $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \geq 1}$ este strict descrescător. Definim $I_n = \frac{1}{a_n} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că $(I_n)_{n \geq 1}$ este un şir descrescător.

b) Dacă $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, calculaţi $\lim_{n \to \infty} I_n$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

XII.100. În raport cu un reper cartezian xOy, considerăm punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$ şi $T \in (AB)$, unde $a > 0, b > 0$. Determinaţi parabola $y = \lambda x^2 + \mu$ care este tangentă în T la AB, ştiind că aria suprafeţei determinată de parabolă şi axele de coordonate este maximă.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G156. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$, demonstraţi că $\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2-a+1}} + \frac{b^2+1}{\sqrt{b^2-b+1}} + \frac{c^2+1}{\sqrt{c^2-c+1}} \geq 6$.

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

G157. Spunem că un număr natural are proprietatea (P) dacă se poate scrie ca sumă a trei pătrate perfecte nenule şi că are proprietatea (Q) dacă se poate scrie ca sumă a patru pătrate perfecte nenule.

a) Daţi exemple de numere naturale care au: numai proprietatea (P); numai proprietatea (Q); atât proprietatea (P) cât şi proprietatea (Q).

b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ au suma pară şi oricare dintre ele este diferit de suma celorlaltor două, demonstraţi că numărul $a^2 + b^2 + c^2$ are proprietatea (Q).

Ovidiu Pop, Satu Mare

G158. Se consideră ecuaţia $x^2+y^2+z^2 = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$, $x, y, z \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că ecuaţia are o infinitate de soluţii.

b) Dacă (x, y, z) este soluţie a ecuaţiei, demonstraţi că fiecare dintre numerele xy, yz, zx şi $xy + yz + zx$ este pătrat perfect.

Liviu Smarandache, Craiova

G159. Aflaţi ultimele două cifre ale numerelor $(70n + 6) \cdot 6^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ion Săcăleanu, Hârlău

G160. Se consideră mulţimile $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$, $B = \left\{\frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d} \,\middle|\, a, b, c, d \in A,\ a, b, c, d \text{ distincte}\right\}$ şi $C = \left\{\frac{d}{a+d} + \frac{d}{b+d} + \frac{d}{c+d} \,\middle|\, a, b, c, d \in A,\ a, b, c, d \text{ distincte}\right\}$. Determinaţi $A \cap B \cap C$. (*În legătură cu E: 13650 din G.M. 5-6/2008.*)

Andrei Crăcană, elev, Iaşi

G161. Fie M mulţimea numerelor de forma $\overline{abc}$, cu $a \cdot b \cdot c \neq 0$. Determinaţi cardinalul maxim al unei submulţimi N a lui M astfel încât $x + y \neq 1109$, $\forall x, y \in N$.

Petru Asaftei şi Gabriel Popa, Iaşi

G162. Putem înlocui un triplet de numere întregi (a, b, c) cu unul dintre tripletele $(2b + 2c - a, b, c)$, $(a, 2a + 2c - b, c)$ sau $(a, b, 2a + 2b - c)$. Arătaţi că dacă pornim de la tripletul $(31329, 24025, 110224)$ şi efectuăm succesiv asemenea înlocuiri, se obţin mereu triplete formate numai din pătrate perfecte.

Marian Tetiva, Bârlad

G163. Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{A}) \neq 90°$ şi punctele $B_1 \in (AC)$ şi $C_1 \in (AB)$. Arătaţi că axa radicală a cercurilor de diametre $[BB_1]$ şi $[CC_1]$ trece prin punctul A dacă şi numai dacă $B_1C_1 \| BC$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

G164. Fie B, b numere reale date, cu $B > b > 0$. Dintre toate trapezele circumscriptibile care au lungimile bazelor B şi b, determinaţi-l pe cel de arie maximă.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

G165. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$), M mijlocul laturii $[BC]$, iar P un punct în interiorul triunghiului ABM. Notăm $\{D\} = BP \cap AC$, $\{E\} = CP \cap AB$. Demonstraţi că $BE < CD$ şi $PE < PD$.

Cristian Pravăţ, Iaşi şi Titu Zvonaru, Comăneşti

B. Nivel liceal

L156. Fie M un punct exterior cercului $\mathcal{C}$ de centru O şi rază R. Notăm cu T_1, T_2 punctele de contact cu cercul ale tangentelor duse din M la $\mathcal{C}$ şi cu A punctul de intersecţie a dreptei OM cu cercul $\mathcal{C}$, astfel încât $A \notin [OM]$. Determinaţi punctele M cu proprietatea că se poate construi un triunghi cu segmentele $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MO]$, dar nu se poate construi un triunghi cu $[MT_1], [MT_2]$ şi $[MA]$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L157. În planul $\triangle ABC$ definim transformarea $P \to P'$ astfel: 1. punctul P se proiectează pe dreptele BC, CA, AB în D, E şi respectiv F; 2. simetricele punctelor D, E, F în raport cu mijloacelor laturilor $[BC], [CA]$ şi respectiv $[AB]$ se notează D', E', F'; 3. P' este punctul de concurenţă a perpendicularelor în D', E', F' pe BC, CA şi respectiv AB. Arătaţi că transformarea $P \to P'$ coincide cu simetria în raport cu O, centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L158. În interiorul triunghiului ABC cu latura $[BC]$ fixă şi vârful A mobil, considerăm punctul T asfel încât $\widehat{ATB} \equiv \widehat{BTC} \equiv \widehat{CTA}$. Determinaţi poziţia punctului A în planul triunghiului pentru care $m(\widehat{BAC}) = \alpha < \dfrac{5\pi}{6}$, iar suma distanţelor de la T la vârfurile triunghiului este maximă.

Cătălin Calistru, Iaşi

L159. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, demonstraţi inegalitatea

$$a\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 + b\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + c\left(\frac{\sin x}{x}\right) + 3\sqrt[3]{abc}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) > 6 \cdot \sqrt[3]{abc}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

L160. Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$m_a + m_b + m_c \geq 6r\left(\frac{m_a}{m_b + m_c} + \frac{m_b}{m_a + m_c} + \frac{m_c}{m_a + m_b}\right) \geq 9r.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L161. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $a + b + c = 1$, demonstraţi inegalitatea

$$3 + \sum \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2}{1+a} \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)\left(\sum \frac{1}{1+a}\right).$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L162. Dacă $n \in \mathbb{Z}^*$ este fixat, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$.

Dumitru Mihalache şi Gabi Ghidoveanu, Bârlad

L163. Fie a un număr întreg impar, iar $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că polinomul $X^{2^n} + a^{2^n}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$ însă, pentru orice număr prim p, polinomul redus modulo p este reductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$.

Dorel Miheţ, Timişoara

L164. O secvenţă $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $2n$ numere reale are proprietatea (P) dacă $x_i^2 + y_i^2 = 1$, $\forall i = \overline{1,n}$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice secvenţă cu proprietatea (P), există $1 \leq i < j \leq n$ cu $x_i x_j + y_i y_j \geq 0,947$. Determinaţi cea mai bună constantă α aşa încât $x_i x_j + y_i y_j \geq \alpha$, pentru orice secvenţă cu proprietatea (P).

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

L165. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi cel mai mare număr natural m pentru care există submulţimile nevide şi distincte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ale lui $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, cu proprietatea că fiecare element al lui A este conţinut în cel mult k dintre ele, unde:

a) $k = 2$; b) $k = n$; c) $k = n + 1$.

Marian Tetiva, Bârlad

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G156. If $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$, prove that

$$\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2-a+1}} + \frac{b^2+1}{\sqrt{b^2-b+1}} + \frac{c^2+1}{\sqrt{c^2-c+1}} \geq 6.$$

I.V. Maftei, Bucureşti and Mihai Haivas, Iaşi

G157. We say that a natural number has the property (P) if it can be written as the sum of three nonzero perfect squares, and it has the property (Q) if it can be written as the sum of four nonzero perfect squares.

a) Give examples of natural numbers that have: property (P) only; property (Q) only; both property (P) and property (Q).

b) If the numbers $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ have an even sum and each of them differs from the sum of the other two numbers, show that $a^2 + b^2 + c^2$ has the property (Q).

Ovidiu Pop, Satu Mare

G158. The equation $x^2 + y^2 + z^2 = (x-y)^2 + (y-x)^2 + (z-x)^2$ with x, y, $z \in \mathbb{N}$ is considered.

a) Show that this equation has infinitely many solutions.

b) If (x, y, z) is a solution to the equation, show that each of the numbers $x\,y$, $y\,z$, $z\,x$ and $x\,y + y\,z + z\,x$ is a perfect square.

Liviu Smarandache, Craiova

G159. Find the last two digits of the number $(70n+6)\cdot 6^{n-1}$.

Ion Săcăleanu, Hârlău

G160. Three sets are considered, namely: $A=\{1,2,3,\ldots,2009\}$; $B=\left\{\frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+d}+\frac{c}{c+d}\middle| a,b,c,d\in A \text{ and mutually distinct}\right\}$; $C=\left\{\frac{d}{a+d}+\frac{d}{b+d}+\frac{d}{c+d}\middle| a, b,c,d\in A \text{ and mutually distinct}\right\}$. Determine $A\cap B\cap C$. (*The problem is connected with E: 13650 of Gazeta Matematică 5-6/2008*).

Andrei Crăcană, highschool student, Iaşi

G161. Let M be the set of numbers of the form $\overline{abc}$ with $a\cdot b\cdot c\neq 0$. Determine the maximal cardinal number of a subset N of M such that $x+y\neq 1109$, $\forall x,\, y\in N$.

Petru Asaftei and Gabriel Popa, Iaşi

G162. We may replace the triple of integer numbers (a,b,c) by one of the triples $(2b+2c-a,b,c)$, $(a,2a+2c-b,c)$, $(a,b,2a+2b-c)$. Show that if we start from the triple $(31329,24025,110224)$ and successively aply such replacings only triples consisting of perfect squares are obtained.

Marian Tetiva, Bârlad

G163. Let ABC be a triangle with $m(A)\neq 90^0$ and take the points $B_1\in(AC)$ and $C_1\in(AB)$. Prove that the radical axis of the circles of diameters $[BB_1]$ and $[CC_1]$ passes through the point A if and only if $B_1C_1\parallel BC$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

G164. Let B,b be given real numbers with $B>b>0$. Among all the circumscriptible trapesiums with the lengths of their bases (respectively) equal to B and b select the one of maximum area.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

G165. Let ABC be an isosceles triangle $(AB=AC)$, M the mid-point of the side $[BC]$, and P a point in the interior of triangle ABM. We denote $\{D\}=BP\cap AC$, $\{E\}=CP\cap AB$. Prove that $BE<CD$ and $PE<PD$.

Cristian Pravăţ, Iaşi and Titu Zvoranu, Comăneşti

B. Highschool level

L156. Let M be a point that is exterior to the circle $\mathcal{C}$ of center O and radius R. We denote by T_1,T_2 the contact points, with this circle, of the tangents from M to $\mathcal{C}$, and let A be the intersection point of the straight line OM with circle $\mathcal{C}$ such that $A\notin[OM]$. Determine the points M with the property that a triangle can be built with the line segments $[MT_1]$, $[MT_2]$ and $[MO]$ as its sides, while a triangle with $[MT_1]$, $[MT_2]$ and $[MA]$ as its sides cannot be built.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L157. In the plane of $\triangle ABC$, we define the transformation $P\to P'$ as follows: 1^0 the point P is projected onto the lines BC, CA, AB at the points D, E and respectively F; 2^0 the symmetric points of D, E, F with respect to the mid-points of the sides $[BC]$, $[CA]$, and respectively $[AB]$ are denoted as D', E', F'; 3^0 P' is the common (or meeting) point of the perpendicular lines at D', E', F' on BC, CA and respectively AB. Show that the transformation $P \to P'$ coincides with the symmetry with respect to O − the center of the circumscribed circle to $\triangle ABC$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L158. We consider the point T in the interior of triangle ABC with its side $[BC]$ fixed and its vertex A mobile such that $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA}$. Determine the position of the point A in the plane of the triangle such that $m(\widehat{BAC}) = \alpha < \frac{5\pi}{6}$, and the sum of the distances from T to the vertices of the triangle is maximum.

Cătălin Calistru, Iaşi

L159. If $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ and $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, prove the inequality

$$a\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 + b\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + c\left(\frac{\sin x}{x}\right) + 3\sqrt[3]{abc}\left(\frac{\tan x}{x}\right) \geq 6 \cdot \sqrt[3]{abc}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

L160. Prove that the following inequality holds in any triangle:

$$m_a + m_b + m_c \geq 6\,r\left(\frac{m_a}{m_b + m_c} + \frac{m_b}{m_a + m_c} + \frac{m_c}{m_a + m_b}\right) \geq 9\,r.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L161. If $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ and $a + b + c = 1$, prove the inequality

$$3 + \sum \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2}{1+a} \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)\left(\sum \frac{1}{1+a}\right).$$

Titu Zvoranu, Comăneşti

L162. If $n \in \mathbb{Z}^*$ is fixed, solve in $\mathbb{R}$ the equation $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$.

Dumitru Mihalache and Gabi Ghidoveanu, Bârlad

L163. Let a be an odd number and let n be a nonzero number. Prove that the polynomial $X^{2^n} + a^{2^n}$ is irreducible in $\mathbb{Z}[X]$, while it factors modulo f for all prime p.

Dorel Miheţ, Timişoara

L164. A sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y_1, $y_2, \ldots, y_n$ of $2n$ real numbers is said to have the property (P) if $x_i^2 + y_i^2 = 1$, $\forall i = \overline{1, n}$. Let $n \in \mathbb{N}^*$ such that for any sequence with property (P) there are subscripts i, j with $1 \leq i < j \leq n$ such that $x_i\, x_j + y_i\, y_j \geq 0.947$. Determine the best constant α such that $x_i\, x_j + y_i\, y_j \geq \alpha$, for any sequence with property (P).

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

L165. Let $n \geq 2$ be a natural number. Determine the largest natural number m such that m nonempty and distinct subsets $A_1, A_2, \ldots, A_m$ of $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ exist with the property that each element of A belongs to at most k such subsets, where:

a) $k = 2$; *b*) $k = n$; *c*) $k = n + 1$.

Marian Tetiva, Bârlad

Pagina rezolvitorilor

CRAIOVA

Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti". **Clasa a VI-a** (prof. TUŢESCU Lucian). ENE Cristina-Elena: V(95-99); **Clasa a VIII-a** (prof. TUŢESCU Lucian). STĂNICIOIU Nicu: VIII(95,96), IX.94, X(91,93); **Clasa a IX-a** (prof. TUŢESCU Lucian). DOBRESCU Lorena Roberta: VIII (95,96), IX.94, X(91,93,95), G146; RADU Noela: VIII(95,96,100), IX(93,94), X.95, G146; **Clasa a X-a** (prof. TUŢESCU Lucian). BORUZ Ana-Maria: VIII.96, IX.94, X(91,93,95), XI.91, G146; DOBRESCU Cristian Bogdan: VIII.96, X(91,93,95), G146; VRĂJITOAREA Marius-Andrei: X(91,93,95), XI(91,92).

GALAŢI

Colegiul Naţional "V. Alecsandri". **Clasa a IX-a**. STAN Georgiana: VII(95,98), VIII(95,96,100).

HÂRLĂU

Liceul Teoretic "Ştefan cel Mare". **Clasa a V-a** (prof. SĂCĂLEANU Ioan). BOBÎRNĂ Petru Costin: P(151-153), V(88,89), VI.90; RUGINĂ Rareş Teodor: P(151-153), V.88, VI.90; SĂCĂLEANU Emilian Gabriel: P(151-153), V.88, V.89; **Clasa a VI-a** (prof. SĂCĂLEANU Ioan). NEICU Mara: P.151, V(88-90), VI.88; CĂLINESCU Ana Ioana: P(151,153), V(88,93), VI(88,90), VII.91; MITITELU Melissa Florina: P(151,153), V(88,93), VI.88; **Clasa a VII-a** (prof. SĂCĂLEANU Ioan). BARĂU Larisa Ionela: V(88,89), VI(88,93,94).

IAŞI

Şcoala nr. 14 "Gh. Mârzescu". **Clasa a IV-a** (inst. NUŢĂ Elena). BACIU Tudor: P(154-158,161); CHIRILUŢĂ George Ştefan: P(154-158,161); POSTUDOR Georgiana Mădălina: P(154-158,161); STOICA Adriana: P(154-158,161).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa a III-a** (înv. BUCATARIU RICA). CHIRIAC Alexandra: P(144-150); IVANOV Alexandra: P(144-146; 148-150); MÎNDRU Liana: P(144-150). **Clasa a IV-a** (inst. RACU Maria). APACHIŢEI Aura-Georgiana: P(154-160); BURA Emma-Andreea: P(154-160); CRĂCIUN Ioana-Daniela: P(154-160); FILIP Ingrid-Ştefania: P(154-160); HRISCU Ovidiu-Constatin: P(154-157,159, 160), HUZA Mădălina: P(154-158,160); LEŞOVSCHI Alexandra-Ioana: P(154-157, 159,160); LUPU Roxana-Elena P(154-158,161); MAXIM Alexandra-Camelia: P(154-160); TUDOSE Ema-Alina P(154-158); ŢUCĂ Cosmin: P(155-160); VASILE Bogdan-Andrei: P(154-158,160). **Clasa a IV-a** (înv. HRIMIUC Valeria). BRUMĂ Andrei-Alexandru: P(154-161); DUMBRAVĂ Bianca: P(154-161); HARAPCIUC Eduard-Gabriel: P(154-161); MANTALEA Alex-Adrian: P(154-161); OLARU Alexandra: P(154-161); VORNICU Sorin: P(154-161).

Colegiul Naţional Iaşi. **Clasa a VI-a** (prof. POPA Gabriel). STOLERU Georgiana Ingrid: V(95-99); ŞTREANGĂ Iulia: V(95-99).

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a VI-a** (prof. ILIE Gheorghe). SUFRAGIU Călin: V(95-101), VI(95-98), VII(98,101). **Clasa a VIII-a** (prof. SAVA Radu). IONIŢĂ Norbert-Traian: VI(89,94), VII(88-94), VIII(88-90,92), G(139,140,142).

Clasa a VIII-a (prof. IONESEI Silviana). PĂVĂLOI Alexandru: VII(96,98-100), VIII(95-97,100).

SFÂNTU GHEORGHE (Tulcea)

Şcoala generală Sfântu Gheorghe. **Clasa a IV-a** (înv. GAVRILĂ Elena). BĂLAN Silviu: P(144-147), P(150-153); CLADIADE Bogdan Robert: P(144,146,147,150-153); CUCU Delia: P(144-147,150-153); EFIMOV Cosmin: P(144-147,150-153). **Clasa a VI-a** (prof. SĂILEANU Sorin). SIDORENCU Andrei: V(89,90,93), VI(88-90,92,93), VII(88-94).

SUCEAVA

Şcoala cu clasele I-VIII nr. 3. **Clasa a IV-a** (înv. TABARCEA Silvestru). FECHET Ştefan: P(147-151). **Clasa a V-a** (prof. APOSTOL Geta). FECHET Mircea: P(151-153), V(88-90).

Elevi rezolvitori premiaţi

Şcoala nr. 14 "Gh. Mârzescu", **Iaşi**

POSTUDOR Georgiana-Mădălina (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(5pb), 1/2009(6pb).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc", **Iaşi**

APACHIŢEI Aura Georgiana (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(6pb), 1/2009(7pb);
BURA Emma-Andreea (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(6pb), 1/2009(7pb);
FILIP Ingrid-Ştefania (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(6pb), 1/2009(7pb);
HRISCU Ovidiu-Constantin (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(7pb), 1/2009(6pb);
HUZA Mădălina (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2009(7pb), 1/2009(6pb);
MAXIM Alexandra-Camelia (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(6pb), 1/2009(7pb);
TUDOSE Ema-Alina (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(7pb), 1/2009(5pb);
VASILE Bogdan-Andrei (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(6pb), 1/2009(6pb);
BRUMĂ Andrei-Alexandru (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(7pb), 1/2009(8pb);
DUMBRAVĂ Bianca (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(7pb), 1/2009(8pb);
HARAPCIUC Eduard-Gabriel (cl. a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(7pb), 1/2009(8pb);
MANTALEA Alex-Adrian (cl a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(7pb), 1/2009(8pb);
OLARU Alexandra (cl a IV-a): 1/2008(6pb), 2/2008(7pb), 1/2009(8pb).

Şcoala cu clasele I-VIII, nr. 3, **Suceava**

FECHET Ştefan (cl a IV-a): 1/2008(5pb), 2/2008(6pb), 1/2009(5pb),
FECHET Mircea (cl. a V-a): 1/2008(7pb), 2/2008(9pb), 1/2009(6pb).

Colegiul Naţional Iaşi, **Iaşi**

STOLERU Georgiana Ingrid (cl. a VI-a): 1/2008(7pb), 2/2008(5pb), 1/2009(5pb).

Colegiul Naţional "C. Negruzzi", **Iaşi**

IONIŢĂ Norbert-Traian (cl. a VIII-a): 1/2008(13pb), 2/2008(7pb), 1/2009(16pb).

Revista semestrială **RECREAȚII MATEMATICE** este editată de **ASOCIAȚIA "RECREAȚII MATEMATICE"**. Apare la datele de 1 martie şi 1 septembrie şi se adresează elevilor, profesorilor, studenților şi tuturor celor pasionați de matematica elementară.

În atenția tuturor colaboratorilor

Materialele trimise redacției spre publicare (note şi articole, chestiuni de metodică, probleme propuse etc.) trebuie prezentate îngrijit, clar şi concis; ele trebuie să prezinte interes pentru un cerc cât mai larg de cititori. Se recomandă ca textele să nu depăşească patru pagini. Evident, **ele trebuie să fie originale şi să nu fi apărut sau să fi fost trimise spre publicare altor reviste.** Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie însoțite de fişierele lor.

Problemele destinate rubricilor: **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregătirea concursurilor** vor fi redactate pe foi separate cu enunț şi demonstrație/rezolvare (câte una pe fiecare foaie) şi vor fi însoțite de numele autorului, şcoala şi localitatea unde lucrează/învață.

Redacția va decide asupra oportunității publicării materialelor primite.

În atenția elevilor

Numele elevilor ce vor trimite redacției soluții corecte la problemele din rubricile de **Probleme propuse** şi **Probleme pentru pregatirea concursurilor** vor fi menționate în **Pagina rezolvitorilor**. Elevii menționați de trei ori vor primi o **diplomă** şi un **premiu în cărți**. Elevii rezolvitori vor ține seama de regulile:

1. Pot trimite soluții la **minimum cinci probleme propuse în numărul prezent şi cel anterior al revistei** (pe o foaie va fi redactată o singură problemă).

2. Elevii din clasele **VI-XII** au dreptul să trimită soluții la problemele propuse pentru clasa lor, pentru orice clasă mai mare, din două clase mai mici şi imediat anterioare. Cei din clasa a **V**-a pot trimite soluții la problemele propuse pentru clasele a IV-a, a V-a şi orice clasă mai mare, iar elevii claselor **I-IV** pot trimite soluții la problemele propuse pentru oricare din clasele primare şi orice clasă mai mare. Orice elev poate trimite soluții la problemele de concurs (tip **G** şi **L**).

3. Vor fi menționate următoarele date personale: numele şi prenumele, clasa, şcoala şi localitatea, precum şi numele profesorului cu care învață.

4. Plicul cu probleme rezolvate se va trimite prin poştă (sau va fi adus direct) la adresa Redacției:

Prof. dr. Temistocle Bîrsan
Str. Aurora, nr. 3, sc. D, ap. 6,
700 474, Iaşi
Jud. IAŞI
E-mail: t_birsan@yahoo.com

CUPRINS

ISSN 1582 – 1765 **7 lei**