Al V-lea Congres internaţional al matematicienilor români

Piteşti, 22 - 28 iunie, 2003

Incepând cu anul 1929, s-au organizat, până în prezent, cinci congrese internaţional ale matematicienilor români.

Primul Congres a avut loc în anul 1929 la Cluj având ca promotor pe **Petre Sergescu**, dar având concursul celor mai reputaţi matematicieni români din acea perioadă.

Al II-lea Congres a avut loc la Turnu Severin în 1932, bucurându-se ca şi primul de participarea unor mari matematicieni ai timpului, **Paul Montel**, **Arnaud Denjoy**, **Waclaw Sierpinski** şi alţii.

Al III-lea Congres s-a desfăşurat la Bucureşti în 1945, cu o participare modestă a matematicienilor străini, date fiind condiţiile dificile de la sfârşitul celui de-al doilea război mondial.

Cel de-**al IV-lea Congres** a fost organizat tot la Bucureşti, cu o pregătire specială, în anul 1956. Statul român a făcut un efort special ŝi prestigiul de care se bucurau matematicienii romani (toţi formaţi în marile şcoli din occident) au permis invitarea unui număr însemnat de matematicieni străini, de faimă internaţională. Din *Franţa* au participat **Jacques Hadamard** şi **Arnaud Denjoy**, din *Japonia* - **Masuo Hukuhara**, din *Germania* - **W. Blaschke**, din *Statele Unite* - **Einar Hille** şi **S. Eilenberg**, din *Uniunea Sovietică* - **I. Vekua**, din *Polonia* - **K. Kuratowski** şi **T. Wazewski**. A fost un prilej de reîntâlnire a matematicienilor români din generaţia lui **Grigore Moisil**, **Gheorghe Vrănceanu**, **Miron Nicolescu**, **Simion Stoilow**, **Nicolae Teodorescu**, **Tiberiu Popoviciu** cu foştii lor mentori sau colegi.

După o întrerupere de 47 de ani, s-a organizat cel de-**al V-lea Congres** la *Universitatea din Piteşti*, al cărei *Rector dr. Gheorghe Barbu* este el însuşi matematician (format la Iaşi şi Bucureşti). Domnia sa şi-a asumat sarcinile dificile ale organizării congresului, *eveniment organizat sub egida Academiei Române, a Universităţii Bucureşti şi a Institutului de Matematică "S. Stoilow" al Academiei Române.* Organizarea congresului a fost reuşită, datorită în primul rând comitetului local de organizare, autorităţilor locale şi sprijinului acordat de la Bucureşti. Ca o nouă caracteristică a acestui congres, subliniem prezenţa unui număr însemnat de matematicieni români care-şi desfăşoară acum activitatea în ţări străine (a se vedea *Libertas Mathematica*, vol. XXIII, în care se află numele şi adresele a peste 300 de matematicieni români ce deţin catedre în universităţi din străinătate, pe toate continentele Terrei). *"Ziarul de Azi"* din Piteşti, în timpul desfăşurării congresului, a publicat numeroase relatări şi informaţii privind participarea unor reputaţi matematicieni străini, dar şi a multor matematicieni români care au activat sau activează în alte ţări. Printre cei din ultima categorie vom aminti academicienii **Nicolae Cristescu** şi **Nicolae Dinculeanu**, **Sergiu Klainerman** (Princeton), **Dan Burghelea** (Columbus - Ohio), **Daniel Tataru** (Berkeley, CA), **Henri Moscovici** (Columbus - Ohio), **M. Epstein** (Tel Aviv), **Radu Theodorescu** (Laval, Canada).

Spre deosebire de multe alte congrese sau conferinţe cu participare internaţională, congresele internaţionale ale matematicienilor români au fost întotdeauna caracterizate printr-o largă reprezentare a tuturor domeniilor de bază din cercetarea matematică. Astfel, cele peste 400 de comunicări anunţate pentru Congresul al V-lea, au fost distribuite în 15 secţii, începând cu *Logica*, *Algebra* şi *Teoria numerelor*, mergând până la *Istoria şi Filozofia matematicii* şi *Pedagogia matematicii.* Au fost reprezentate *Geometria*, *Analiza clasică şi modernă*, *Ecuaţiile diferenţiale*, *Teoria controlului optimal*, *Teoria probabilităţilor şi Statistica matematică*, *Cercetarea operaţională*, *Mecanica* şi *Astronomia*, *Fizica matematică.* Lucrările s-au desfăşurat atât în plenul congresului (începând cu şedinţa de deschidere la care *Ambasadorul Franţei* la Bucureşti, E. S. **Philippe Étienne**, el însuşi matematician şi admirabil vorbitor, a captivat audienţa), precum şi în numeroase secţii pe specialităţi.

Pe lângă matematicienii străini care au participat la Congres, venind din *Statele Unite*, *Canada*, *Franţa*, *Germania*, *Rusia*, *Ungaria*, *Italia* şi alte ţări, trebuie să remarcăm prezenţa destul de însemnată a matematicienilor din *Republica Moldova.*

Este destul de dificil să prezentăm o vedere de ansamblu asupra desfăşurării Congresului al V-lea al matematicienilor români, dată fiind varietatea domeniilor abordate de către participanţi. Vom sublinia totuşi faptul că *programul şi desfăşurarea lucrărilor congresului s-au încadrat în standardele internaţionale.* O critică ce s-a adus organizatorilor a fost aceea că data congresului a coincis cu multiple activităţi academice, cum ar fi: examenele studenţeşti, examenul de licenţă şi altele. În felul acesta, mulţi doritori din ţară de a participa au fost absenţi.

Vom încheia subliniind faptul că acest al V-lea Congres a ilustrat *vitalitatea matematicii româneşti*, *încadrarea ei reuşită în comunitatea matematică internaţională.* Să sperăm că următorul congres va avea loc după o perioadă nu atât de îndelungată ca până acum.

Constantin CORDUNEANU
University of Texas at Arlington

Observatorul din Iaşi – 90 de ani de la înfiinţare

Înfiinţarea observatoarelor astronomice din Bucureşti (în 1908) şi apoi din Iaşi (în 1913) face parte dintr-un proces mai amplu de modernizare a învăţământului universitar şi a cercetării ştiinţifice, proces impulsionat de **Legea Haret** din 1898 şi care se va maturiza în condiţiile social-politice şi culturale din **România Întregită**.

Încă din momentul înfiinţării în 1860 a **Universităţii din Iaşi**, în programa "secţiei ştiinţelor pozitive din facultatea de filozofie" sunt prevăzute şi cursuri de mecanică şi astronomie, dar catedrele aferente vor căpăta fiinţă mai târziu. Prin legea învăţământului din 1864, care se pune în aplicare începând cu data de 25 febr. 1865, se creează **Facultatea de ştiinţe**, desprinsă din Facultatea de filozofie şi având trei secţii distincte: fizică, matematică şi ştiinţe naturale; una din cele 12 catedre ale noii facultăţi este cea de *geodezie teoretică şi astronomie.* La 15 febr. 1865 este numit profesor titular al acestei catedre **Neculai Culianu**, care o va ocupa până în 1906, anul pensionării sale. N. Culianu trece licenţa în ştiinţe matematice la Sorbona, este atras de astronomie şi de Observatorul din Paris, cunoaşte aici şi rămâne prieten pentru toată viaţa cu astronomul francez *Camille Flammarion.* N. Culianu este autor al unui *Curs de cosmografie* pentru liceu (două ediţii, 1893 şi 1902). Universitatea din Iaşi a primit, chiar din momentul înfiinţării, de la *Societatea de Medici şi Naturalişti din Iaşi* un bun instrument de observaţii astronomice, care aparţinuse poetului moldovean *Costache Conachi* şi pe care moştenitorii îl donaseră acesteia.

După înfiinţarea Catedrei de astronomie (în 1864) au fost achiziţionate şi alte instrumente; ele au fost depozitate într-o cămăruţă a vechiului local al universităţii încât nici nu puteau fi arătate studenţilor. Cu toate insistenţele nu s-a reuşit timp îndelungat obţinerea fondurilor pentru construirea unui observator astronomic.

Constantin Popovici este licenţiat al Facultăţii de ştiinţe din Iaşi (1900). Pleacă la Paris cu o bursă "Adamachi" unde obţine din nou licenţa în matematici (1905) şi apoi doctoratul la Sorbona (1908) în domeniul ecuaţiilor diferenţiale. În 1909 este numit la Catedra de geometrie analitică a universităţii ieşene, iar în 1910 este trimis în Franţa pentru specializare în astronomie şi documentare în privinţa construirii viitorului observator din Iaşi. Se reîntoarce şi este numit în 1911 la Catedra de astronomie, geodezie şi mecanică cerească, Universitatea din Iaşi.

C. Popovici este fondatorul Observatorului astronomic din Iaşi, amplasat pe dealul Copou; piatra de temelie a clădirii a fost pusă la 12 sept. 1912, iar recepţia s-a făcut la mijlocul lui decembrie 1913.

C. Popovici este primul director al Observatorului (în perioada 1913-1937). Primele instrumente intrate în dotarea acestuia au fost cele provenite de la cabinetul de astronomie înfiinţat de N. Culianu. Prin strădaniile lui C. Popovici şi ale elevului şi colaboratorului său, **Vintilă Şiadbei**, au fost achiziţionate noi instrumente: o *lunetă meridiană,* un *ecuatorial Ressel*, două *cronometre* (pentru timpul mediu şi cel sideral), un *fotometru Graff* şi altele necesare procesului didactic.

În anul 1938 Catedra de astronomie este transformată într-o conferinţă iar C. Popovici se transferă la Bucureşti. În perioada 1938-1944, **Vintilă Şiadbei** a suplinit conferinţa de astronomie.

Ca urmare a evacuării Observatorului, prilejuită de cel de-al doilea război mondial, o bună parte a aparaturii din dotarea acestuia s-a deteriorat sau a fost sustrasă.

În 1948 **Victor Nadolschi** ocupă prin concurs conferinţa de astronomie şi devine directorul Observatorului din Iaşi, funcţie deţinută până în anul 1966. V. Nadolschi este un eminent continuator al lui C. Popovici şi al lui V. Şiadbei. Acesta reorganizează şi relansează activitatea şi pune bazele *astronomiei fotografice* la Iaşi. V. Nadolschi achiziţionează un *astrograf Zeiss* (1956), un *fotometru fotoelectric* (1959), un *ecuatorial Zeiss cotit* (1960), un *aparat pentru măsurat clişee* (1963), un *teodolit zenital Meopta* (1963) etc.

Începând cu anul 1966 activitatea didactică şi de cercetare este coordonată de **Iulian Breahnă**, absolvent al Universităţii din Bucureşti, secţia de astronomie.

Din 1966 funcţionează în cadrul Observatorului din Iaşi un *atelier de mecanică fină* şi un *laborator electronic* necesare întreţinerii şi cercetării. A fost achiziţionat un *orologiu cu cuarţ* care, completat ulterior cu alte anexe, constituie şi în prezent un cronograf digital de precizie.

În anul 1980 a fost achiziţionat un *planetariu Zeiss* destinat învăţământului astronomiei, care a fost instalat în incinta Universităţii din Iaşi. Studenţii au astfel posibilitatea de a-şi însuşi mai uşor o multitudine de fenomene privind cinematica şi dinamica sistemului planetar al Soarelui. Planetariul a atras până în prezent câteva mii de vizitatori.

Cu prilejul *eclipsei totale de Soare din 11 august 1999* s-a achiziţionat un *astrograf CCD* (dispozitiv cu cuplaj de sarcină) de performanţă şi o *cameră Astrovid* pentru înregistrări continue de imagini.

În perioada 1951-1999, pe lângă Observator şi prin grija personalului acestuia a funcţionat o *staţie seismică*. Observaţiile efectuate de aceasta au pus în evidenţă două focare seismice: unul la circa 25 km dincolo de Prut şi al doilea în zona Bârlad-Zorleni.

Activitatea de cercetare desfăşurată pe lângă Observatorul din Iaşi s-a concretizat în peste 140 lucrări. **C. Popovici** a generalizat legea Newton-Coulomb prin considerarea unei forţe neconservative, rezultată dintr-o combinaţie a gravitaţiei newtoniene cu presiunea luminii. **V. Şiadbei** obţine rezultate noi privind traiectoriile meteorilor şi cometelor şi face observaţii asupra eclipselor de Lună şi Soare, stabilind relaţii mai simple pentru calculul acestora. **V. Nadolschi** s-a preocupat de teoria statisticii grupurilor de pete solare, continuă tradiţia observării eclipselor şi are meritul de a fi pus bazele astronomiei fotografice la Iaşi. Abordarea unor teme din domeniul radioastronomiei s-a dovedit deosebit de dificilă, deşi s-au depus eforturi susţinute pentru crearea bazei materiale necesare unei astfel de cercetări.

Cu toate că de-a lungul timpului au fost de înlăturat multe dificultăţi şi obstacole, la Observatorul din Iaşi s-a reuşit să se desfăşoare o activitate care l-a făcut cunoscut în ţară şi în străinătate. Aceste afirmaţii sunt dovedite şi de acordarea titlului de membru al *Uniunii Astronomice Internaţionale* următorilor astronomi ieşeni: *Constantin Popovici, Vintilă Şiadbei, Victor Nadolschi* şi *Iulian Breahnă.*

Redacţia revistei

Marea teoremă a lui Fermat pentru polinoame

Temistocle BÎRSAN[1]

1. Odată cu căderea Constantinopolului (1453), mulţi învăţaţi bizantini s-au îndreptat spre Europa de Vest aducând cu ei manuscrise preţioase - manuscrisele care supravieţuiseră devastării Bibliotecii din Alexandria se adunaseră de-a lungul timpului în această capitală a lumii.

Prin hazardul împrejurărilor, şase din cele 13 volume ale *Aritmeticii* lui **Diofant** au ajuns în Franţa. Învăţatul şi amatorul de matematică francez **Claude Gaspar Bachet de Méziriac** îşi dă seama de importanţa cărţii lui Diofant şi publică în 1621 o versiune în limba latină a *Aritmeticii*, care cuprinde peste o sută de probleme şi rezolvările detaliate ale lui Diofant.

Pentru **Pierre Fermat** (1601-1665) *Aritmetica* lui *Diofant* a fost cartea care l-a pus în contact cu bogatele cunoştinţe ale popoarelor antice în direcţia teoriei numerelor şi sursa de inspiraţie pentru noi şi subtile probleme pe care singur şi le formula. Fermat obişnuia să noteze pe marginile cărţii lui Diofant comentarii, calcule şi schiţe de demonstraţii. Nu s-a preocupat să-şi publice rezultatele şi demonstraţiile, dar se amuza comunicându-şi rezultatele altor matematicieni ai timpului şi provocându-i la rezolvarea acestora.

În Cartea a II-a a *Aritmeticii*, Fermat găseşte informaţii bogate relativ la tripletele pitagoreice, adică trei numere naturale ce verifică ecuaţia lui Pitagora

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Ştia că Euclid demonstrase că există o infinitate de astfel de triplete. Ce se întâmplă, însă, dacă în loc de (1) se consideră ecuaţia

$$x^n + y^n = z^n, \tag{2}$$

unde $n \geq 3$? Răspunsul lui Fermat, notat ca observaţie pe marginea cărţii lui Diofant, este cu totul surprinzător: *nu există nici o soluţie a ecuaţiei* (2) *cu numere x, y, z nenule, dacă $n = 3, 4, \ldots$* . Urmează notat următorul comentariu:

Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detex hanc marginis exiguitas non caperet [**4**]. (Mă aflu în posesia unei demonstraţii minunate a acestei afirmaţii, dar marginea paginii este prea strâmtă pentru a o cuprinde.)

Această extraordinară descoperire, care astăzi poartă numele de **Marea teoremă a lui Fermat**, cât şi alte rezultate, ar fi putut să rămână necunoscute lumii matematicienilor şi să se piardă, dacă, după moartea lui Fermat, fiul său cel mai mare n-ar fi examinat însemnările scrise de tatăl său pe margini şi n-ar fi publicat *Aritmetica lui Diofant conţinând şi observaţiile lui Pierre de Fermat* (Toulouse, 1670).

Pe parcursul câtorva secole, cele mai sclipitoare minţi de matematicieni au încercat şi şi-au adus contribuţia la rezolvarea acestei enigme (şi, totodată, provocări) lăsată de Fermat: **Euler**, **Sophie Germain**, **Dirichlet**, **Legendre**, **Lamé**, **Cauchy**, **Kummer** ş. a. Drumul ce duce la demonstrarea *Marii teoreme a lui Fermat* este

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

presărat cu reuşite parţiale, ambiţii, înfrângeri, decepţii, orgolii, intrigi, tentative de sinucidere etc. [**4**].

În anul 1995, după opt ani de muncă neîntreruptă, în completă izolare faţă de colegii săi şi păstrând o discreţie totală asupra cercetărilor sale, englezul **Andrew Wiles** pune capăt enigmei de peste 350 de ani: *Marea teoremă a lui Fermat este demonstrată!* Demonstraţia dată de Wiles este, însă, accesibilă unui număr restrâns de specialişti; în fapt, Wiles pentru a atinge scopul a dovedit justeţea *Conjecturii Taniyama - Shimura* utilizând o aparatură matematică modernă şi sofisticată: curbe eliptice, forme modulare, reprezentări Galois ş. a. [**5**].

2. Este cunoscut faptul că inelul $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi şi inelul $\mathbb{C}[X]$ al polinoamelor cu coeficienţi numere complexe au proprietăţi asemănătoare. De aceea apare ca firească problema rezolvării ecuaţiilor (1) şi (2) în $\mathbb{C}[X]$.

În privinţa ecuaţiei (1) constatăm uşor, ca şi în cazul numeric, că are o infinitate de soluţii: $\forall p, q \in \mathbb{C}[X]$, luăm

$$x(X) = [p(X)]^2 - [q(X)]^2, \quad y(X) = 2p(X)q(X), \quad z(X) = [p(X)]^2 + [q(X)]^2$$

şi verificăm direct că tripleta $(x(X), y(X), z(X))$ este o soluţie a ecuaţiei (1) în $\mathbb{C}[X]$.

Similar cu Marea teoremă a lui Fermat se formulează

Teorema lui Fermat pentru polinoame ([3], [5]). *Dacă n este un întreg, $n \geq 3$, atunci ecuaţia* (2) *nu are soluţii în* $\mathbb{C}[X]$ *cu polinoame neconstante şi relativ prime.*

Surprinzător, spre deosebire de Marea teoremă a lui Fermat, pentru acest rezultat se cunoaşte o demonstraţie elementară şi simplă, accesibilă unui elev de liceu. Rezultatul este cunoscut din sec. al XIX-lea şi a fost demonstrat utilizând cunoştinţe de geometrie algebrică. Demonstraţia elementară la care ne-am referit se sprijină pe o teoremă de dată recentă datorată matematicienilor **W. Stothers** (1981) şi, independent, **R. C. Mason** (1983), teoremă foarte importantă şi în sine. Sunt necesare câteva (puţine!) pregătiri.

Fie $p \in \mathbb{C}[X]$ un polinom neconstant având rădăcinile $a_1, a_2, \ldots, a_k$ cu ordinele de multiplicitate respective $m_1, m_2, \ldots, m_k$; deci p se scrie sub forma

$$p(X) = \alpha \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}, \quad \alpha \in \mathbb{C}^*. \tag{3}$$

Notăm gradul polinomului p şi numărul rădăcinilor sale distincte cu $\deg p$ şi respectiv $n_0(p)$, adică

$$\deg p = m_1 + m_2 + \cdots + m_k, \quad n_0(p) = k.$$

Menţionăm că, dacă $p, q \in \mathbb{C}$ sunt neconstante, avem

$$\deg(pq) = \deg p + \deg q, \quad n_0(pq) \leq n_0(p) + n_0(q),$$

cu egalitate dacă şi numai dacă p şi q sunt relativ prime.

Derivata formală a polinomului p dat de (3) este

$$p'(X) = \alpha[m_1 (X - a_1)^{m_1 - 1} (X - a_2)^{m_2} \cdots (X - a_k)^{m_k} + \cdots +$$
$$+ m_k (X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_{k-1})^{m_{k-1}} (X - a_k)^{m_k - 1}]$$

şi, ca urmare, cel mai mare divizor comun al polinoamelor p şi p' are forma

$$(p,p') = \beta (X - a_1)^{m_1-1} (X - a_2)^{m_2-1} \cdots (X - a_k)^{m_k-1}.$$

Atunci

$$\deg (p,p') = (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_k - 1) = \deg p - n_0 (p),$$

de unde obţinem relaţia

$$\deg p = \deg (p,p') + n_0 (p). \tag{4}$$

Teorema Mason - Stothers. *Fie $p,q,r \in \mathbb{C}[X]$ neconstante şi relativ prime. Dacă are loc egalitatea $p + q = r$, atunci*

$$\max \{\deg p, \deg q, \deg r\} \leq n_0 (pqr) - 1. \tag{5}$$

Demonstraţie (dată de **Noah Snyder** [**3**], p.30). Vom începe cu două observaţii utile. Mai întâi, în prezenţa condiţiei $p+q = r$, polinoamele p, q, r sunt relativ prime dacă şi numai dacă sunt prime două câte două. Apoi, întrucât enunţul teoremei este simetric în p, q, r (căci putem scrie egalitatea şi sub forma $p + q + r = 0$), nu restrângem generalitatea dacă vom presupune că polinomul r are gradul cel mai ridicat. Ca urmare, inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\deg r \leq n_0 (pqr) - 1. \tag{5'}$$

Avem

$$p'q - pq' = p' (p + q) - p (p' + q') = p'r - pr'.$$

Constatăm că (p,p') şi (q,q') divid membrul stâng, iar (r,r') divide membrul drept, deci şi pe cel stâng. Cum p, q, r sunt prime două câte două, urmează că produsul $(p,p') \cdot (q,q') \cdot (r,r')$ divide $p'q - pq'$. În consecinţă,

$$\deg (p,p') + \deg (q,q') + \deg (r,r') \leq \deg (p'q - pq') \leq \deg p + \deg q - 1$$

sau, datorită relaţiei (4) şi analoagelor ei,

$$\deg p - n_0 (p) + \deg q - n_0 (q) + \deg r - n_0 (r) \leq \deg p + \deg q - 1,$$

deci

$$\deg r \leq n_0 (p) + n_0 (q) + n_0 (r) - 1.$$

Cum p, q, r sunt prime două câte două, obţinem în final

$$\deg r \leq n_0 (pqr) - 1,$$

care este tocmai relaţia $(5')$ de demonstrat.

Demonstraţia Teoremei lui Fermat pentru polinoame. Presupunem că ecuaţia (2) pentru $n \geq 3$ ar avea o soluţie $(x(X), y(X), z(X))$ cu polinoame neconstante relativ prime. Aplicăm teorema Mason - Stothers polinoamelor $p(X) = [x(X)]^n$, $q(X) = [y(X)]^n$ şi $r(X) = [z(X)]^n$. Obţinem

$$\deg [x(X)]^n \leq n_0 ([x(X)]^n \cdot [y(X)]^n \cdot [z(X)]^n) - 1$$

sau

$$n \deg x(X) \leq n_0 (x(X) \cdot y(X) \cdot z(X)) - 1.$$

Ţinând seama că $x(X)$, $y(X)$ şi $z(X)$ sunt prime două câte două şi de faptul că $n_0(p) \le \deg p$, $\forall p \in \mathbb{C}[X]$, vom avea

$$\begin{aligned} n \deg x(X) &\le n_0(x(X)) + n_0(y(X)) + n_0(z(X)) - 1 \le \\ &\le \deg x(X) + \deg y(X) + \deg z(X) - 1. \end{aligned}$$

Obţinem astfel inegalitatea

$$n \deg x(X) \le \deg x(X) + \deg y(X) + \deg z(X) - 1,$$

precum şi inegalităţile analoage scrise pentru $y(X)$ şi $z(X)$, care adunate dau

$$n(\deg x(X) + \deg y(X) + \deg z(X)) \le 3(\deg x(X) + \deg y(X) + \deg z(X)) - 3,$$

adică

$$(n-3)(\deg x(X) + \deg y(X) + \deg z(X)) \le -3.$$

Evident, dacă $n \ge 3$, această relaţie ne conduce la o absurditate, ceea ce încheie demonstraţia.

3. Analogia care există între inelele $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{C}[X]$ pune în mod firesc problema "translării" teoremei Mason - Stothers de la polinoame la numerele întregi astfel încât Marea teoremă a lui Fermat să poată fi demonstrată elementar.

D. Masser şi **J. Oesterle** (1986) au ajuns la aşa - numita *conjectură abc* ca urmare a unor consideraţii de geometrie algebrică şi teoria funcţiilor modulare (şi nu în legătură cu teorema Mason - Stothers).

Dacă $m \in \mathbb{N}^*$ are descompunerea în factori primi $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i}$, atunci vom numi *radicalul lui* m numărul $N_0(m) = \prod_{i=1}^{k} p_i$.

Conjectura abc ([2], [3]). *Dat $\varepsilon > 0$, există o constantă $C(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice întregi a, b, c nenuli şi relativ primi cu $a + b = c$ avem inegalitatea*

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \le C(\varepsilon)(N_0(abc))^{1+\varepsilon}.$$

Această conjectură spune că, dacă în descompunerea numerelor a, b, c există factori primi cu exponenţi mari, aceşti factori sunt compensaţi prin factori primi mai mulţi, dar cu exponentul 1.

Să enunţăm acum aşa - numita

Teorema lui Fermat asimptotică. *Există un întreg pozitiv n_1 cu proprietatea că, dacă $n \ge n_1$, atunci ecuaţia (2) nu are soluţii cu x, y, z întregi şi $xyz \ne 0$.*

Cu aceleaşi argumente ca în cazul polinoamelor se poate dovedi următoarea

Teoremă ([2], [3]). *Conjectura abc implică Teorema lui Fermat asimptotică.*

Demonstraţie. Fie date x, y, z pozitive şi relativ prime astfel încât tripleta (x, y, z) să fie soluţie a ecuaţiei (2), adică $x^n + y^n = z^n$.

Notăm $a = x^n$, $b = y^n$ şi $c = z^n$ şi observăm că

$$N_0(abc) = N_0(x^n y^n z^n) = N_0(xyz) \le xyz.$$

Utilizând conjectura abc obţinem

$$x^n \le C(\varepsilon)(xyz)^{1+\varepsilon}, \quad y^n \le C(\varepsilon)(xyz)^{1+\varepsilon}, \quad z^n \le C(\varepsilon)(xyz)^{1+\varepsilon}.$$

Prin înmulţire, rezultă că

$$(xyz)^n \leq [C(\varepsilon)]^3 (xyz)^{3+3\varepsilon},$$

de unde

$$(n-3-3\varepsilon)\log(xyz) \leq 3\log C(\varepsilon)$$

şi cum $xyz > 2$, obţinem

$$n < \frac{3\log C(\varepsilon)}{\log 2} + 3 + 3\varepsilon.$$

Notăm

$$n_1 = \left[\frac{3\log C(\varepsilon)}{\log 2} + 3 + 3\varepsilon\right]. \tag{6}$$

Urmează că ecuaţia (2) nu are soluţii ce verifică condiţiile specificate dacă $n \geq n_1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţie. Această cale nu oferă o demonstraţie a Marii teoreme a lui Fermat. Într-adevăr, numărul n_1 definit de (6) depinde de $C(\varepsilon)$ (putem considera $\varepsilon = 1$ şi $C(1)$ pentru a fixa ideile). Determinarea efectivă a constantei $C(\varepsilon)$ nu este cunoscută. Dacă, de exemplu, $C(1)$ s-ar putea efectiv determina, atunci demonstraţia Marii Teoreme a lui Fermat s-ar reduce la un număr finit de cazuri, care ar putea fi abordate prin calcul direct.

4. Interesul pentru Marea teoremă a lui Fermat nu s-a stins nici după demonstrarea ei. Au rămas întrebări fără răspuns, sunt formulate altele noi. Dacă Fermat nu a dat decât o demonstraţie eronată, care ar putea fi natura greşelii făcute? Dacă această demonstraţie ar fi corectă, care este acel argument ingenios produs de geniul lui Fermat ce a scăpat atâtor matematicieni iluştri? Este posibilă o demonstraţie elementară, accesibilă şi unor persoane cu cunoştinţe obişnuite de matematică?

În 1966, **Andrew Beal** instituie un premiu pentru demonstrarea sau infirmarea aşa - numitei *Conjecturi Beal*, care este o generalizare a problemei lui Fermat:

Ecuaţia $x^p + y^q = z^r$*,* p*,* q*,* r *numere întregi mai mari ca* 2*, nu are nici o soluţie cu* x*,* y*,* z *întregi pozitivi şi relativ primi* ([**6**], [**1**]).

Bibliografie

1. **A. Corduneanu** - *Despre Marea teoremă a lui Fermat*, Recreaţii Matematice, 1 (1999), nr.1, 37-39.
2. **S. Lang** - *Old and new conjectured diophantine inequalities*, Bull. AMS, 23 (1990), 37-75.
3. **S. Lang** - *Math Talks for Undergraduates*, Springer, 1999.
4. **S. Singh** - *Marea teoremă a lui Fermat*, Humanitas, Bucureşti, 1998.
5. **A. Wiles** - *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Math., 142 (1995), 443-551.
6. *** - *Beal's Conjecture*, The New Zealand Math. Mag., 35 (1998), no.2, 38.

De la o problemă cu matrice la transformări elementare

Marian TETIVA[1]

1. Introducere. Problema la care ne referim în titlu este următoarea:

Să se arate că nu există matrice pătratice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $XY – YX = I_n$, I_n *fiind matricea unitate de ordinul* n.

Este o problemă cunoscută, care poate fi întâlnită în mai multe manuale sau culegeri, care s-a dat la concursuri etc. şi nu este tocmai simplă: un elev mediu este întotdeauna descurajat de enunţuri de tipul *"să se arate că există /nu există. . . "*. Mai mult, în această situaţie nu prea avem altă cale de abordare în afara celei care utilizează noţiunea de urmă a unei matrice şi proprietăţile sale. Istoria problemei este cam aşa: prin anii '70 ai secolului trecut ea era propusă la olimpiadă, prin anii '80 a pătruns în manuale pentru ca în anii '90 să ajungă a fi parte din diverse teste de bacalaureat sau admitere la facultate; aceasta spune ceva despre felul în care au evoluat programele învăţământului matematic elementar în România. Noi credem că elevul mediu din ziua de azi se află în acelaşi impas ca şi cel de acum douăzeci sau treizeci de ani (sau poate chiar mai rău) atunci când este confruntat cu asemenea probleme. De aceea această notă i se adresează, dar numai dacă este cu adevărat interesat de matematică.

Amintim că *urma* matricei $A = (a_{ij})_{1\le i,\, j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este, prin definiţie, numărul $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (suma elementelor situate pe "diagonala principală" a matricei). Sunt cunoscute următoarele proprietăţi ale urmei:

1° $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

2° $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{Tr}(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

3° $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Primele două egalităţi se mai pot scrie condensat în forma $\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{Tr}(A) + \beta\,\mathrm{Tr}(B)$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi exprimă *liniaritatea* urmei: $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ este *aplicaţie liniară* (sau *morfism* de $\mathbb{C}$ - spaţii vectoriale). De aici deducem $\mathrm{Tr}(XY - YX) = \mathrm{Tr}(XY) - \mathrm{Tr}(YX) = 0$ pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi aceasta explică de ce egalitatea din enunţ nu poate avea loc pentru nici o pereche de matrice X, Y: matricea $XY - YX$ are urma nulă, deci nu poate fi egală cu I_n, a cărei urmă este n.

Remarcăm că matricea I_n din enunţ poate fi înlocuită cu orice matrice de ordinul n având urma nenulă, enunţul şi rezolvarea rămânând valabile; problema poate fi uşor reformulată astfel:

Dacă pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *există* $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $A = XY - YX$, *atunci* $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Atunci se naşte în mod natural întrebarea dacă reciproca acestei afirmaţii este adevărată, adică se pune problema valabilităţii următorului enunţ:

Fie A *o matrice pătratică de ordin* n *cu elemente numere complexe. Dacă urma matricei* A *este nulă, atunci există* $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $A = XY - YX$.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

În cele ce urmează ne propunem să rezolvăm această problemă; mai precis, să arătăm că răspunsul la întrebare este afirmativ.

Ideea rezolvării este să căutăm nişte matrice $Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât A să poată fi scrisă în forma $A = Z - YZY^{-1}$ (Y fiind inversabilă, desigur); atunci problema va fi rezolvată: e suficient să alegem $X = ZY^{-1}$ şi avem $A = \left(ZY^{-1}\right)Y - Y\left(ZY^{-1}\right) = XY - YX$.

Aici cititorul poate avea o nemulţumire: de unde şi până unde aceste matrice Y, Z în locul lui Xşi Y din enunţ? Să remarcăm că din proprietatea 3° rezultă că avem şi 4° $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}\left(CAC^{-1}\right)$, $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, C inversabilă (se dovedeşte imediat, căci $A = \left(AC^{-1}\right)C$). Matricele de forma A şi CAC^{-1} sunt asemenea, iar proprietetea 4° spune că acestea au aceeaşi urmă.

Desigur, problemele abia încep. Sunt necesare câteva pregătiri.

2. Matrice asemenea şi transformări elementare. Fie K un corp comutativ; cititorul mai puţin familiarizat cu această noţiune abstractă poate considera K o notaţie pentru unul dintre corpurile numerice uzuale $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$ se numesc *matrice asemenea (*sau *similare*) dacă există $U \in \mathcal{M}_n(K)$ cu $\det U \neq 0$ astfel încât $Y = UXU^{-1}$ (vom nota $X \sim Y$). Cititorul poate verifica uşor faptul că relaţia de asemănare (similaritate) este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $\mathcal{M}_n(K)$.

Transformările elementare care se fac asupra unei matrice sunt, în principiu, cele mai simple modificări care nu îi afectează rangul, adică interschimbarea a două linii (sau coloane), adunarea unei linii (coloane) înmulţite cu un număr (în general: element al corpului K) la altă linie (respectiv coloană), sau chiar înmulţirea unei linii (coloane) cu un număr nenul. Una din cele mai simple aplicaţii ale lor este calculul rangului unei matrice; de asemenea, se pot folosi aceste transformări pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare.

Să începem prezentarea transformărilor elementare cu aşa numitele matrice elementare; legătura va apărea curând. Vom nota cu E_{ij} matricea pătratică de ordin n peste corpul K ale cărei elemente sunt toate nule, cu excepţia elementului de pe linia i şi coloana j care este egal cu 1. Se verifică uşor că matricele E_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ formează o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{M}_n(K)$ peste K, precum şi relaţiile $E_{ij}E_{kl} = 0_n$, $j \neq k$ şi $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$.

Se numesc *matrice elementare* următoarele tipuri de matrice pătratice de ordinul n, cu elemente din K:

1) Matricele $T_{ij}(a) = I_n + aE_{ij}$; aici $a \in K$ şi $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$ sunt indici *diferiţi*. Matricea $T_{ij}(a)$ se obţine din matricea unitate făcându-i o singură modificare: elementul de pe linia i şi coloana j devine a. Se constată imediat că (vezi proprietăţile matricelor E_{ij})

$$T_{ij}(0) = I_n,\ T_{ij}(a)\,T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b)\,,$$

$$T_{ij}(a) \in GL_n(K)\,,\ T_{ij}(a)^{-1} = T_{ij}(-a)\,,\ \forall a, b \in K,$$

unde $GL_n(K) = \{U \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det U \neq 0\}$ - *grupul general liniar de ordin n peste corpul K*. Deci $\{T_{ij}(a) \mid a \in K\}$ formează, pentru $i \neq j$ fixate, un grup izomorf cu grupul $(K, +)$. Să vedem ce efect are înmulţirea unei matrice oarecare cu o matrice

$T_{ij}(a)$. Fie $A = (a_{kl})_{1\leq k,l\leq n}$ o matrice din $\mathcal{M}_n(K)$, care mai poate fi scrisă şi $A = \sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}$. Atunci

$$T_{ij}(a)\,A = (I_n + aE_{ij})\left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} + \sum_{k,l=1}^{n} aa_{kl}E_{ij}E_{kl} =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} + \sum_{l=1}^{n} aa_{jl}E_{il}.$$

Ce înseamnă asta? Înseamnă că elementele matricei $T_{ij}(a)\,A$ rămân aceleaşi ca ale matricei A, cu excepţia celor de pe linia i: aici, în locul elementului a_{il} apare acum $a_{il} + aa_{jl}$, adică matricea $T_{ij}(a)\,A$ se obţine din A prin adunarea la linia i a liniei j înmulţite cu a, cu alte cuvinte înmulţirea la stânga cu o matrice $T_{ij}(a)$ realizează o transformare elementară a matricei A. De asemenea, se poate verifica în acelaşi fel că matricea $AT_{ij}(a)$ se obţine din A prin adunare la coloana j a coloanei i înmulţite cu a.

2) Matricele $Q_{ij} = T_{ij}(-1)\,T_{ji}(1)\,T_{ij}(-1)$ $(i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j)$ intră şi ele în categoria matricelor elementare. Avem

$$\begin{aligned}
Q_{ij} &= T_{ij}(-1)\,T_{ji}(1)\,T_{ij}(-1) = (I_n - E_{ij})(I_n + E_{ji})(I_n - E_{ij}) = \\
&= (I_n + E_{ji} - E_{ij} - E_{ii})(I_n - E_{ij}) = I_n + E_{ji} - E_{ij} - E_{ii} - E_{ij} - E_{jj} + E_{ij} = \\
&= I_n - E_{ii} - E_{jj} - E_{ij} + E_{ji},
\end{aligned}$$

deci Q_{ij} este matricea care se obţine din matricea unitate prin schimbarea a patru elemente: elementele de pe diagonala principală, de pe linia i, coloana i şi de pe linia j, coloana j se înlocuiesc cu zerouri; în locul elementului de pe linia i şi coloana j avem -1, iar în locul celui de pe linia j şi coloana i se găseşte 1. La fel ca mai sus, să calculăm

$$Q_{ij}A = (I_n - E_{ii} - E_{jj} - E_{ij} + E_{ji})\left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}\right) =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{ii}E_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{jj}E_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{ij}E_{kl} + \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{ji}E_{kl} =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl} - \sum_{l=1}^{n} a_{il}E_{il} - \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{jl} - \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il} + \sum_{l=1}^{n} a_{il}E_{il};$$

aşadar, matricea $Q_{ij}A$ se obţine din A prin înlocuirea liniei i, respectiv j, cu linia j înmulţită cu -1, respectiv cu linia i. Asemănător, se poate observa că schimbările pe care le produc asupra lui A înmulţirea cu matricea Q_{ij} la dreapta sunt următoarele: coloana i se înlocuieşte cu coloana j, iar coloana j se înlocuieşte cu coloana i înmulţită cu -1. Să mai spunem că, fiind produs de matrice inversabile, Q_{ij} este, de asemenea, matrice inversabilă; avem

$$Q_{ij}^{-1} = T_{ij}(-1)^{-1}\,T_{ji}(1)^{-1}\,T_{ij}(-1)^{-1} = T_{ij}(1)\,T_{ji}(-1)\,T_{ij}(1)$$

şi, deci, $Q_{ij}^{-1} = Q_{ij}$.

3) Un alt tip de matrice elementare sunt matricele $D_i(d) = I_n + (d-1)E_{ii}$, $1 \le i \le n$, $d \in K$ fiind nenul; o astfel de matrice se obţine din matricea unitate modificându-i un singur element: în locul lui 1 de pe linia i şi coloana i punem d. Nu e greu de văzut că înmulţirea unei matrice A oarecare cu $D_i(d)$ la stânga (respectiv la dreapta) îi modifică doar linia (respectiv coloana) i, anume o înlocuieşte pe aceasta cu linia (respectiv coloana) i înmulţită cu d. De asemenea, $D_i(d)$ este inversabilă şi are inversa $D_i(d)^{-1} = D_i\left(d^{-1}\right)$.

4) Vom folosi matricele P_{ij} pe care le definim prin

$$P_{ij} = D_i(-1)\,Q_{ij} = Q_{ij}D_j(-1) = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

Verificaţi aceste egalităţi! Observaţi forma matricei P_{ij} şi efectul său la înmulţire: matricea AP_{ij} (respectiv $P_{ij}A$) se obţine din A prin interschimbarea liniilor (respectiv coloanelor) i şi j. Şi nu în ultimul rând, arătaţi că P_{ij} este inversabilă şi $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

3. Rezolvarea problemei. Să demonstrăm aşadar următoarea

Propoziţie. *Fie K un corp comutativ infinit şi $A \in \mathcal{M}_n(K)$ o matrice a cărei urmă este zero. Atunci există matricele $X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $A = XY - YX$.*

Demonstraţie. Pentru început vom presupune că nu există nici o submulţime a mulţimii $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ a elementelor de pe diagonala principală a matricei A pentru care suma elementelor să fie nulă, desigur, cu excepţia întregii mulţimi (vom vedea imediat la ce ne foloseşte această presupunere, iar la sfârşit ne vom da seama că nu este prea restrictivă). Deoarece, conform ipotezei, avem $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0$, se pot determina elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ astfel încât

$$a_{11} = a_1 - a_2,\ a_{22} = a_2 - a_3,\ \ldots\ ,\ a_{n-1,n-1} = a_{n-1} - a_n\ ,\ a_{nn} = a_n - a_1.$$

E clar că, datorită ipotezei suplimentare pe care am făcut-o, oricare două dintre elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt distincte; vom folosi acest lucru mai departe.

Putem scrie pe A în forma $A = B - C$, unde

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,n-1} & a_n \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a_2 & -a_{12} & \ldots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ 0 & a_3 & \ldots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Aşa cum am arătat la început, pentru rezolvarea problemei ar fi suficient să arătăm că matricele B şi C sunt asemenea. În acest scop, vom arăta că $B \sim B'$, $C \sim C'$, unde

$$B' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix},\ C' = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$$

şi $B' \sim C'$. Folosind faptul că asemănarea matricelor este o relaţie de echivalenţă, obţinem că $B \sim C$.

Să le luăm pe rând. Ne amintim că înmulţirea unei matrice cu matricea P_{ij} la stânga (respectiv la dreapta) schimbă între ele liniile (respectiv coloanele) i şi j ale acelei matrice. De aceea, pentru $M \in \mathcal{M}_n(K)$, matricea $P_{ij}MP_{ij}^{-1} = P_{ij}MP_{ij}$

are schimbate între ele elementele de pe diagonala principală situate pe liniile (şi coloanele) i şi j; de asemenea, mai sunt afectate şi celelalte elemente de pe liniile şi coloanele i şi j. Aceasta nu are însă importanţă în cazul unor matrice precum B' sau C', la care toate elementele din afara diagonalei principale sunt zerouri; astfel $P_{ij}B'P_{ij}^{-1} = P_{ij}B'P_{ij}$ este o matrice care diferă de B' doar prin aceea că şi-au schimbat între ele locurile două elemente de pe diagonala principală, anume a_i şi a_j. Cum orice permutare e produs de transpoziţii, e clar că după un număr finit de asemenea transformări o putem aduce pe B' la orice formă în care pe diagonala principală apar elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ permutate cumva (şi în rest, zerouri). În particular, B' este asemenea cu C'.

Să arătăm acum că $B \sim B'$ (şi nu vom mai face demonstraţia pentru $C \sim C'$, ea fiind întru totul asemănătoare). Începem prin a observa următorul calcul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a(\alpha-\gamma)+\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

dacă a este ales convenabil, adică dacă $a = \beta/(\gamma-\alpha)$; desigur, asta se poate face numai în cazul în care $\alpha \neq \gamma$.

Un calcul asemănător se poate face şi pentru matrice de ordin n. Dacă vom considera $T_{ij}(a)BT_{ij}(a)^{-1} = T_{ij}(a)BT_{ij}(-a)$, unde $i > j$, elementul a_{ij} din poziţia (i, j) se înlocuieşte cu $a(a_j - a_i) + a_{ij}$ şi a poate fi ales astfel încât acest element să devină nul (căci am presupus că $a_i \neq a_j$). Mai sunt afectate şi celelalte elemente ale liniei i (la care se adună linia j înmulţită cu a) şi ale coloanei j (la care se adună coloana i înmulţită cu $-a$). Remarcăm că aceste transformări oricum nu pot modifica zerourile de deasupra diagonalei principale, care rămân intacte, şi nici elementele de pe diagonala principală.

Acum e clar ce avem de făcut: mai întâi calculăm $T_{21}(a)BT_{21}(a)^{-1}$ care, pentru un a bine ales reprezintă o matrice B_1 asemenea cu B care are în poziţia $(2, 1)$ pe zero (asta dacă nu era dinainte; de altfel se poate vedea uşor că, dacă $a_{21} = 0$, atunci a care ne trebuie este $a = 0$ deci $T_{21}(a) = T_{21}(0)$ este, de fapt, matricea identică). Apoi, pentru această matrice calculăm $T_{31}(a)B_1T_{31}(a)^{-1}$, care pentru un anumit a este o matrice asemenea cu B_1 (deci şi cu B) şi are 0 în poziţia $(3, 1)$; se poate vedea că elementul 0 obţinut la pasul anterior nu va fi afectat. Continuăm astfel, lucrând cu matrice de forma $T_{i1}(a)$ până când toate elementele de pe prima coloană "de sub" a_1 devin zerouri, apoi trecem şi facem zerouri pe coloana a doua, "sub" a_2, folosind transformări de tip $T_{32}(a), \ldots, T_{n2}(a)$ (adică înmulţim cu acestea la stânga şi cu inversele lor la dreapta; la fiecare pas similaritatea matricelor se păstrează), în ordine, alegând, desigur, de fiecare dată valoare care trebuie pentru a. Elementele nule obţinute pe prima coloană nu vor fi afectate, la fel cele de pe sau de deasupra diagonalei principale, Tot aşa vom proceda până când, la urmă, ajungem la o matrice care are partea de deasupra diagonalei principale neschimbată, la fel diagonala principală, iar sub diagonala principală are numai zerouri, adică ajungem la B' şi la concluzia dorită că aceasta este asemenea cu B.

În concluzie, am arătat că matricele B şi C sunt asemenea, deci am ajuns acolo unde ne-am propus: există $V \in GL_n(K)$ astfel încât $C = VBV^{-1}$; atunci $A = B - C = B - VBV^{-1}$ şi notând $X = BV^{-1}$, $Y = V$ avem $A = XY - YX$.

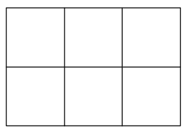
Demonstraţia ar fi încheiată, dacă n-ar mai fi un mic amănunt de lămurit: ce facem cu ipoteza suplimentară pe care am impus-o (şi de care, s-a dovedit pe parcurs, avem mare nevoie, căci dacă elementele de pe diagonală nu sunt distincte, nu-l putem alege pe a astfel încât $T_{ij}(a)$ să producă un zero în locul lui a_{ij})? Răspunsul nu e atât de greu şi arată, cum spuneam, că restricţia dată de această ipoteză nu este chiar atât de ... restrictivă. E suficient să împărţim mulţimea elementelor de pe diagonală în submulţimi disjuncte două câte două, fiecare dintre acestea având suma elementelor 0 şi fiecare nemaiavând altă submulţime (strictă) pentru care suma elementelor este 0. Să numim $b_1, \ldots, b_k$ elementele unei asemenea submulţimi (a căror sumă este, aşadar, zero); pentru acestea putem determina $c_1, c_2, \ldots, c_k$ astfel încât $b_1 = c_1 - c_2$, $b_2 = c_2 - c_3, \ldots, b_{k-1} = c_{k-1} - c_k$, $b_k = c_k - c_1$. Mai mult, oricare două dintre $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sunt distincte două câte două şi proprietăţile lor se păstrează dacă le înlocuim cu $c_1 + t$, $c_2 + t, \ldots, c_k + t$, $t \in K$. Găsim câte o grupare de asemenea c-uri distincte două câte două pentru fiecare submulţime de b-uri a mulţimii elementelor de pe diagonala principală, iar apoi alegem câte un t pentru fiecare astfel de grupare încât toate c-urile să fie distincte două câte două (ceea ce sigur se poate face în cazul în care corpul K este infinit; gândiţi-vă de ce!). Mai departe totul decurge la fel, deoarece putem scrie matricea noastră ca diferenţa a două matrice, una inferior, alta superior triunghiulară, fiecare dintre aceste elemente sunt distincte două câte două. Propoziţia este complet demonstrată.

Noi ne-am propus să rezolvăm problema în cazul corpurilor uzuale de numere: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, de aceea ipoteza pe care am făcut-o asupra infinităţii corpului K nu ne deranjează foarte mult; totuşi, se prea poate ca această presupunere să fie strict legată de rezolvarea pe care am dat-o aici şi să nu fie esenţială. Aşadar, *rămâne întrebarea dacă este valabil enunţul propoziţiei demonstrate şi în cazul unui corp finit.*

În încheiere, să mai spunem că nu există nici o pretenţie de originalitate în elaborarea acestei note; este foarte posibil ca această soluţie să fie cunoscută, atâta doar că autorul nu are nici un fel de referinţă pentru problema discutată, pe care o cunoaşte doar din folclor (în urmă cu câţiva ani această problemă mi-a fost comunicată "prin viu grai" de către un elev, actualmente student strălucit al Facultăţii de Matematică din Bucureşti; aşa că îi mulţumesc pe această cale lui **Dragoş Deliu**, care m-a făcut să caut să rezolv această problemă, căutări din care s-a născut şi această notă).

Recreații ... matematice

1. Să se îndepărteze patru segmente din figura alăturată (alcătuită din şase pătrate) astfel încât noua figură să fie formată din trei pătrate.



Notă. Soluţia problemei se poate găsi la pagina 39.

Trei perle ale olimpiadelor de matematică

Gabriel DOSPINESCU[1]

Problemele propuse la testele de selecţie pentru OIM sau la fazele naţionale din diverse ţări se remarcă prin profunzimea (şi uneori simplitatea) ideilor care le rezolvă. În cele ce urmează, vom rezolva trei probleme propuse la astfel de teste de selecţie în anii 2002 şi 2003, demonstrând dificultatea rezolvării problemelor de "matematică elementară", precum şi tendinţa accentuată de a îmbina algebra, teoria numerelor şi analiza matematică în actul de concepere şi rezolvare a unor asemenea perle matematice.

1. Un prim exemplu este următoarea problemă propusă la unul din testele de selecţie pentru OIM în anul 2002, in Vietnam. În rezolvare vom folosi doar câteva rezultate legate de ecuaţia de gradul al doilea. După cum se ştie, multe probleme dificile se rezolvă relativ uşor folosind trinomul de gradul al doilea (metoda coborârii). Vom da doar două exemple, fără a insista prea mult.

1) *Arătaţi că dacă numărul* $d = \dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab}$ *este întreg, iar* a, b, c *sunt numere naturale, atunci* d *este* 1 *sau* 3.

2) *Arătaţi că, dacă numerele naturale distincte şi nenule* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *verifică* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = na_1a_2\cdots a_n$, *atunci ele sunt prime între ele două câte două.*

Încercaţi să rezolvaţi aceste două probleme înainte de abordarea problemei 1.

PROBLEMA 1. *Să se demonstreze că există un număr* $m \geq 2002$ *şi* m *numere naturale nenule* $a_1, a_2, \ldots, a_m$, *distincte, astfel încât* $\prod_{i=1}^{m} a_i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ *să fie pătrat perfect.*

Soluţie. Vom folosi trinomul pentru a crea soluţii pentru anumite ecuaţii diofantice, deci în mod constructiv.

Ar fi bine să dispară $\prod_{i=1}^{m} a_i^2$. Deci, să scriem expresia sub forma

$$\prod_{i=1}^{m} a_i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i - k\right)^2.$$

Pentru a "scăpa" şi de 4, luăm $k = 2$. Aşadar am adus problema la o formă mai "acceptabilă" (dar nu mai puţin dificilă):

Arătaţi că există $m \geq 2002$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{N}^*$ *distincte astfel încât*

$$1 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 = a_1a_2\cdots a_m\ . \tag{1}$$

Să căutăm m astfel încât $m-3$ dintre necunoscutele ecuaţiei (1) să fie 1. Aceasta revine la ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 + m - 2 = xyz. \tag{2}$$

Privind această ecuaţie ca una de gradul al doilea în z, vom încerca să luăm discriminantul nul. Deci $x^2y^2 = 4\left(x^2 + y^2 + m - 2\right)$. Luăm $x = 2a$, $y = 2b$ şi obţinem

[1] Student, Facultatea de Matematică-Informatică, Bucureşti

$m = 4\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)-2$. Să concluzionăm: putem alege $b > a > 2002$ diferite şi putem lua $m = 4\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)-2 > 2002$. Atunci ecuaţia (2) va avea soluţiile $(x, y, z) = (2a, 2b, 2ab)$. Rezultă că ecuaţia (1) are soluţia $(2a, 2b, 2ab, 1, 1, \ldots, 1)$. Dar putem scrie (1) şi sub forma

$$1^2 - 1 \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2ab + (2a)^2 + (2b)^2 + (2ab)^2 + m - 3 = 0. \tag{3}$$

Din relaţiile lui Viète rezultă că şi $2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1$ este soluţie a ecuaţiei (3), în care în loc de 1 punem t. Aşadar am redus cu o unitate numărul celor $m-3$ de 1 şi am obţinut o nouă soluţie a ecuaţiei (1): $(2a, 2b, 2ab, 2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1, 1, 1, \ldots, 1)$.

Analog, scriem

$$1^2 - 1 \cdot 2a \cdot 2b \cdot 2ab\,(2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1) + (2a)^2 + (2b)^2 + (2ab)^2 + \\ + (2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1)^2 + m - 4 = 0.$$

Deci obţinem o altă soluţie a ecuaţiei (1), cu număr şi mai mic de 1:

$$(2a, 2b, 2ab, 2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1, 2a \cdot 2b \cdot 2ab \cdot (2a \cdot 2b \cdot 2ab - 1) - 1, 1, 1, \ldots, 1).$$

Astfel, rezultă că putem elimina pe rând fiecare 1 din m-upla $(2a, 2b, 2ab, 1, 1, \ldots, 1)$. Riguros, aceasta înseamnă că folosind succesiv relaţiile lui Viète, obţinem câte o m-uplă $(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1, 1, \ldots, 1)$ în care este clar că $2a = x_1 < 2b = x_2 < 2ab = x_3 < < \cdots < x_k$. La sfârşit (căci după cel mult m paşi am eliminat toţi de 1), obţinem o soluţie $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ a ecuaţiei (1), în care $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. Această m-uplă va satisface condiţiile enunţului.

2. Continuăm cu o frumoasă problemă propusă la ultima rundă a olimpiadei poloneze în anul 2003. Simplitatea soluţiei care urmează nu are însă nici o legătură cu dificultatea problemei, căci multe metode de atacare a problemei nu duc la nici un rezultat.

PROBLEMA 2. *Determinaţi polinoamele cu coeficienţi întregi f cu proprietatea că pentru orice n natural avem $f(n) \mid 2^n - 1$.*

Soluţie. Evident, problema ar fi banală dacă s-ar demonstra că există o infinitate de numere n pentru care $2^n - 1$ este număr prim. Dar, dupa cum vom vedea, problema acceptă şi soluţii mai "blânde".

Cum este clar că nu putem afla prea multe despre divizorii şi factorii primi ai lui $2^n - 1$, vom încerca să lucrăm cu divizori ai numerelor de forma $f(n)$. Primul lucru care ne vine în minte, ţinând seama că f are coeficienţi întregi, este să folosim rezultatul următor: $m - n \mid f(m) - f(n)$. Deci, va trebui să căutăm m şi n astfel încât $f(m) \mid f(n)$. După căutări mai mult sau mai puţin lungi, găsim că $f(n) = n + f(n) - n \mid f(n + f(n)) - f(n)$. Deci $f(n) \mid f(n + f(n))$.

În acest moment, jumătate din problemă este rezolvată. Într-adevăr, schimbând f cu $-f$, putem presupune că f are coeficientul dominant pozitiv. Atunci există M astfel încât pentru $n > M$ să avem $f(n) \in \mathbb{N}$. Fixăm un $n > M$. Avem $f(n) \mid 2^n - 1$ şi $f(n) \mid f(n + f(n)) \mid 2^{n+f(n)} - 1 = (2^n - 1)\, 2^{f(n)} + 2^{f(n)} - 1$ (evident, $n + f(n) \in \mathbb{N}$), deci $f(n) \mid 2^{f(n)} - 1$. Dacă am putea demonstra că singurul număr natural n pentru care $n \mid 2^n - 1$ este 1, atunci ar rezulta că pentru $n > M$ avem $f(n) = 1$, adică f ar fi constanta 1. Dar faptul că $n \mid 2^n - 1$ implică $n = 1$ este binecunoscut şi destul de simplu. Să presupunem că $n > 1$ şi să luăm p cel mai mic factor prim al lui n.

Atunci este clar că $(n, p-1) = 1$. Dar $p \mid n \mid 2^n - 1$ şi $p \mid 2^{p-1} - 1$ (teorema lui Fermat). Deci $p \mid \left(2^n - 1, 2^{p-1} - 1\right)$. Se ştie că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = 2^n - 1$ este şir Mersenne (adică $(x_m, x_n) = x_{(m,n)}$). Rezultă că $p \mid (x_n, x_{p-1}) = x_{(n,p-1)} = x_1 = 1$, contradicţie. Aşadar $n = 1$ şi f este constanta 1. Cum, dacă f este soluţie, atunci şi $-f$ este soluţie, deducem că polinoamele cerute sunt constantele -1 şi 1.

3. Încheiem scurta incursiune prin matematica elementară cu o problemă extrem de dificilă, propusă la un test de selecţie în Vietnam, 2002. Dificultatea problemei constă mai ales în faptul că admite multe soluţii (care nici nu se intrezăresc uşor), iar frumuseţea constă în îmbinarea algebrei cu analiza matematică şi teoria numerelor. Nu exagerăm dacă afirmăm că următoarea problemă este una dintre cele mai dificile şi frumoase probleme referitoare la polinoame, propuse la vreun concurs pentru elevi.

PROBLEMA 3. *Determinaţi toate polinoamele $p \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea că există un polinom $q \in \mathbb{Z}[X]$ pentru care $q^2(X) = \left(X^2 + 6X + 10\right) p^2(X) - 1$.*

Soluţie. Evident, orice rezolvitor "sârguincios" va scrie relaţia din enunţ sub forma $q^2(X-3) = \left(X^2+1\right) p^2(X-3) - 1$ şi va nota $f(X) = p(X-3)$, $g(X) = q(X-3)$. Deci

$$\left(X^2+1\right) f^2(X) = g^2(X) + 1. \tag{1}$$

Aici este însă punctul de oprire, căci orice încercare ulterioară de rezolvare eşuează. Ca de obicei, vom putea presupune că f şi g au coeficienţii dominanţi pozitivi (căci putem schimba f cu $-f$ sau g cu $-g$, fără a se modifica nimic). Deci există M astfel încât pentru orice $n > M$ să avem $f(n), g(n) \in \mathbb{N}$.

Apelăm acum la teoria numerelor. Este binecunoscut faptul că toate soluţiile în numere naturale ale ecuaţiei Pell $x^2 + 1 = 2y^2$ sunt date de

$$x_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2}, \quad y_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}.$$

Ce se întâmplă dacă substituim x_n în (1)? Obţinem $g^2(x_n) + 1 = 2\left(y_n f(x_n)\right)^2$. Da, şi perechea $(g(x_n), y_n f(x_n))$ este soluţie a ecuaţiei Pell şi aceasta se întâmplă pentru orice $n > M$. Deci există şirurile $(a_n)_{n>M}$, $(b_n)_{n>M}$ astfel încât $g(x_n) = x_{a_n}$, $y_n f(x_n) = y_{b_n}$.

Acum începe partea analizei matematice. Fie $\operatorname{grad} g = k$, $\operatorname{grad} f = m$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{2}\right)^{2a_n-1-k(2n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2x_{a_n}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{k(2n-1)}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{x_n^k}\left(\frac{x_n}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{(2n-1)}}\right)^k = \text{finit}.$$

Rezultă că şirul de numere întregi $\left(2a_n - 1 - k(2n-1)\right)_{n>M}$ este convergent, deci staţionar. Aşadar, există $n_0 > M$ astfel încât pentru $n > n_0$ să avem $2a_n - 1 - k(2n-1) = u$, pentru o constantă întreagă u. Ca urmare, pentru $n > n_0$ avem

$$g\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{2}\right) = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{k(2n-1)+u} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{k(2n-1)+u}}{2}.$$

Rezultă că

$$g\left(\frac{x-\dfrac{1}{x}}{2}\right)=\frac{x^k\left(1+\sqrt{2}\right)^u+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k\left(1-\sqrt{2}\right)^u}{2} \tag{2}$$

pentru orice x din mulţimea $\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} \mid n>n_0\right\}$. Aducând la acelaşi numitor în (2), obţinem o identitate polinomială adevărată pentru o infinitate de valori ale variabilei, deci (2) este adevărată pentru orice x nenul. După ce aducem la acelaşi numitor şi egalăm coeficienţii dominanţi în (2), deducem că $2^{k-1}\left(1+\sqrt{2}\right)^u=\alpha_k$, unde α_k este coeficientul dominant al lui g. Dar aceasta implică $u=0$. Aşadar, pentru orice x nenul, avem

$$g\left(\frac{x-\dfrac{1}{x}}{2}\right)=\frac{x^k+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k}{2}. \tag{3}$$

Dacă notăm $x=t+\sqrt{t^2+1}$, din (3) obţinem că pentru orice t avem

$$g(t)=\frac{\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^k+\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^k}{2}. \tag{4}$$

Luăm în (1) $x=i$ şi obţinem că $g^2(i)=-1$. Deci, folosind (4), obţinem $i^{2k}=-1$, adică k este impar. Din (4) şi (1) rezultă prin calcul că

$$f^2(X)=\left[\frac{\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)^k+\left(\sqrt{X^2+1}-X\right)^k}{2\sqrt{X^2+1}}\right]^2,\ k \text{ impar}. \tag{5}$$

Cum f este polinom şi are coeficientul dominant pozitiv, deducem din (5) că

$$f(X)=\frac{\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)^k+\left(\sqrt{X^2+1}-X\right)^k}{2\sqrt{X^2+1}}. \tag{6}$$

Dar, dacă f verifică (1), atunci şi $-f$ verifică aceeaşi relaţie. Mai mult, polinomul din membrul drept al relaţiei (6) are coeficienţi întregi. Rezultă că există două tipuri de polinoame care verifică relaţia (1)

$$\pm\frac{\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)^k+\left(\sqrt{X^2+1}-X\right)^k}{2\sqrt{X^2+1}},\ k \text{ impar}. \tag{7}$$

În sfârşit, obţinem că polinoamele p cerute se obţin din polinoamele (7) înlocuind X cu $X+3$.

Ce-ar mai fi de adăugat după prezentarea acestor trei nestemate din şiragul nesfârşit al problemelor elementare de matematică? Şlefuite cu răbdarea bijutierului, cele trei probleme adaugă o paletă de lumini începând cu actul creator al conceperii lor şi terminând cu soluţiile propuse. Fiecare dintre noi are nevoie de asemenea perle, iar această scurtă prezentare se înscrie pe această linie.

În legătură cu o problemă de concurs

Dan Ştefan MARINESCU[1]

La etapa finală a Olimpiadei de matematică din anul 1989 prof. univ. dr. *T. Precupanu* a propus următoarea problemă:

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie integrabilă, continuă pe* (a,b) *şi* $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$, *atunci pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}^*$ *există* n *numere distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ *astfel ca*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{n(b-a)}{\dfrac{1}{f(x_1)} + \dfrac{1}{f(x_2)} + \cdots + \dfrac{1}{f(x_n)}}. \qquad (1)$$

(enunţ parţial)

Enunţul şi o soluţie a problemei pot fi aflate în [**3**]. În cele ce urmează vom prezenta o generalizare a acestei frumoase probleme.

Pentru ceea ce ne-am propus, avem nevoie de

Propoziţia 1. *Fie* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *două funcţii cu următoarele proprietăţi:*

i) f, g *continue pe* $[0,1]$,

ii) f, g *derivabile pe* $(0,1)$,

iii) $f(1) \neq f(0)$ *şi* $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (0,1)$.

Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ *şi orice* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ *cu* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ *există* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1)$ *cu* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{g'(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{g(1) - g(0)}{f(1) - f(0)}\ . \qquad (2)$$

Demonstraţie. Fie $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{f(1) - f(0)}$; evident h este continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$ şi $h(0) = 0$, $h(1) = 1$.

Pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ considerăm funcţia continuă $h_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h_k(x) = h(x) - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i$. Cum $h_1(0) = -\alpha_1 < 0$, $h_1(1) = h(1) - \alpha_1 = 1 - \alpha_1 > 0$, conchidem, din continuitatea funcţiei h_1, că există $c_1 \in (0,1)$ cu $h_1(c_1) = 0 \Leftrightarrow h(c_1) = \alpha_1$. Analog, $h_2(c_1) = h(c_1) - \alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_2 < 0$, $h_2(1) = h(1) - \alpha_1 - \alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 > 0$, de unde acelaşi raţionament conduce la existenţa unui $c_2 \in (c_1, 1)$ astfel încât $h_2(c_2) = 0 \Leftrightarrow h(c_2) = \alpha_1 + \alpha_2$. Inductiv, găsim $0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < 1$ astfel încât

$$h(c_1) = \alpha_1, \quad h(c_2) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \ldots \quad , h(c_{n-1}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}. \qquad (3)$$

Fie $c_0 = 0$ şi $c_n = 1$, atunci pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ funcţiile h şi g verifică condiţiile din teorema lui Cauchy pe intervalul $[c_{k-1}, c_k]$; ca urmare, deducem că există $x_1 \in (c_0, c_1)$, $x_2 \in (c_1, c_2)$, $\ldots$, $x_n \in (c_{n-1}, c_n)$ astfel încât

$$\frac{h'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{h(c_1) - h(c_0)}{g(c_1) - g(c_0)},\ \frac{h'(x_2)}{g'(x_2)} = \frac{h(c_2) - h(c_1)}{g(c_2) - g(c_1)},\ \ldots,\ \frac{h'(x_n)}{g'(x_n)} = \frac{h(c_n) - h(c_{n-1})}{g(c_n) - g(c_{n-1})},$$

de unde, împreună cu (3), avem:

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

$$\frac{\alpha_1}{g(c_1)-g(c_0)}=\frac{h'(x_1)}{g'(x_1)},\ \frac{\alpha_2}{g(c_2)-g(c_1)}=\frac{h'(x_2)}{g'(x_2)},\ \ldots,\ \frac{\alpha_n}{g(c_n)-g(c_{n-1})}=\frac{h'(x_n)}{g'(x_n)}$$
ceea ce, ţinând seama de faptul că $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n>0$, conduce la relaţiile
$$\alpha_1\frac{g'(x_1)}{h'(x_1)}=g(c_1)-g(c_0),\ \alpha_2\frac{g'(x_2)}{h'(x_2)}=g(c_2)-g(c_1),\ \ldots,\ \alpha_n\frac{g'(x_n)}{h'(x_n)}=g(c_n)-g(c_{n-1}).$$
De aici, prin adunare, obţinem $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g'(x_i)}{h'(x_i)}=g(c_n)-g(c_0)=g(1)-g(0)$. Cum $h'(x)=\frac{f'(x)}{f(1)-f(0)}$, $\forall x\in(0,1)$, conchidem că are loc relaţia (2).

Corolarul 1 [1]. *Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, atunci pentru orice $n\in N^*$ şi orice $k_1,k_2,\ldots,k_n>0$ există $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,1)$ distincte două câte două astfel încât* $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i$ (vezi şi [**2**], [**4**]).

Demonstraţie. Considerăm în Propoziţia 1, $\alpha_i=k_i\Big/\sum_{i=1}^{n}k_i$, pentru orice $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ şi $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x$.

Corolarul 2. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii integrabile, continue pe (a,b), $\int_a^b f(x)\,dx\neq 0$ şi $g(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Atunci, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ şi $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n>0$ cu $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$, există n numere distincte $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a,b)$ astfel ca
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g(x_i)}{f(x_i)}=\int_a^b g(x)\,dx\Big/\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Demonstraţie. Fie $f_1,g_1:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=\int_0^x f((1-t)a+tb)\,dt$, $g_1(x)=\int_0^x g((1-t)a+tb)\,dt$. În mod evident, f_1 şi g_1 sunt bine definite, verifică condiţiile din Propoziţia 1 şi $g_1(1)-g_1(0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$, $f_1(1)-f_1(0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. De unde există $c_1<c_2<\cdots<c_n$ din $(0,1)$ astfel încât
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g_1'(c_i)}{f_1'(c_i)}=\frac{\int_a^b g(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{g((1-c_i)a+c_ib)}{f((1-c_i)a+c_ib)}=\frac{\int_a^b g(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$
Luând $x_i=(1-c_i)a+c_ib$, $\forall i=\overline{1,n}$, evident că $x_1<x_2<\cdots<x_n$ şi obţinem formula (4).

Observaţie. Egalitatea (1) se obţine luând în (4) $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=1/n$ şi $g(x)=1$, $\forall x\in[a,b]$.

Bibliografie

1. **G. G. Z. Giang -** *Problema 1125*, Math. Mag.
2. **P. Orno -** *Problema 1053*, Math. Mag.
3. **I. Tomescu (coordonator)** - *Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee (1950–1990)*, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1992.
4. ******* - *Problema C:1791*, G. M. 3/1996.

Asupra unei probleme propuse la O. I. M. - 1982

Neculai ROMAN[1]

La O. I. M. în anul 1982 a fost propusă problema B3 – GB:

Fie ABC un triunghi şi P un punct în interiorul lui astfel ca $\angle PAC \equiv \angle PBC$. Fie L, M picioarele perpendicularelor din P pe BC, CA respectiv. Fie D mijlocul lui $[AB]$. Să se demonstreze că $DL = DM$.

Enunţul şi o soluţie a acestei probleme se poate găsi în [**1**], pag. 322 şi 333. Problema are şi o soluţie mai simplă, accesibilă şi elevului de gimnaziu şi care merită a fi cunoscută. De asemenea, vom arăta că problema are loc pentru o mulţime mai variată de puncte din planul triunghiului. În acest scop, vom demonstra următoarea

Teoremă. *Fie ABC un triunghi, D mijlocul lui $[AB]$ şi punctele $A^{'}, B^{'}$ pe dreptele AC, respectiv BC astfel ca $C \in (AA^{'})$ şi $C \in (BB')$. Fie P un punct în planul triunghiului şi L, M picioarele perpendicularelor din P pe BC, respectiv AC. Să se demonstreze că dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle ACB) \cup \mathrm{Int}\,(\angle A'CB')$ astfel ca $\angle PAC \equiv \angle PBC$ sau dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle BCA') \cup \mathrm{Int}\,(\angle ACB')$ astfel ca $m\,(\angle PAC) + m\,(\angle PBC) = 180^\circ$ atunci $DM = DL$.*

Demonstraţie. Fie punctele D' şi D'' mijloacele segmentelor $[PA]$, respectiv $[PB]$ (fig. 1, 2 şi 3).

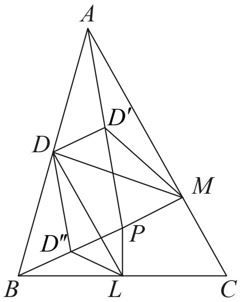


Fig. 1

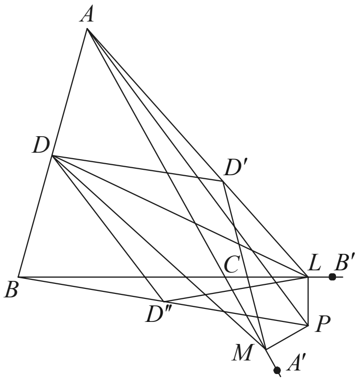


Fig. 2

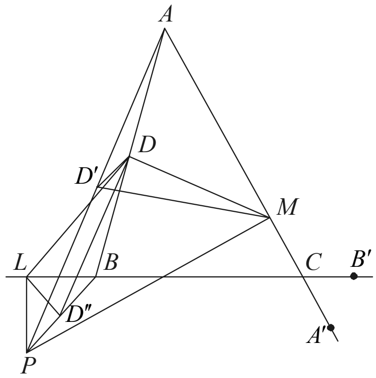


Fig. 3

Avem $MD' = \dfrac{PA}{2} = DD''$, ($[MD']$ mediana corespunzătoare ipotenuzei în $\triangle AMP$ şi $[DD'']$ linie mijlocie în $\triangle APB$).

Deci
$$[MD'] \equiv [DD'']\,. \tag{1}$$
Analog,
$$[LD''] \equiv [DD']\,. \tag{2}$$
Din $PD'DD''$ paralelogram, rezultă că
$$\angle PD'D \equiv \angle PD''D \tag{3}$$

[1] Profesor, Şcoala "V. Alecsandri", Mirceşti, Iaşi

Din $P \in \mathrm{Int}\,(\angle ACB) \cup \mathrm{Int}\,(\angle A'CB')$ astfel ca $\angle PAC \equiv \angle PBC$ (fig. 1 şi 2) deducem că $\angle PD'M \equiv \angle PD''L$ (teorema unghiului exterior).

Dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle BCA')$ astfel ca $m\,(\angle PAC) + m\,(\angle PBC) = 180^\circ$ (fig. 3), atunci $\angle PAC \equiv \angle PBL$ şi deci $\angle PD'M \equiv \angle PD''L$ (teorema unghiului exterior). Dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle ACB')$ astfel ca $m\,(\angle PAC)+m\,(\angle PBC) = 180^\circ$, atunci $\angle PBC \equiv \angle PAM$ şi deci $\angle PD'M \equiv \angle PD''L$.

În concluzie,

$$\angle PD'M \equiv \angle PD''L. \tag{4}$$

Din relaţiile (3) şi (4) rezultă că

$$\angle MD'D \equiv \angle LD''D. \tag{5}$$

Acum din relaţiile (1), (2) şi (5) rezultă că $\triangle MD'D \equiv \triangle DD''L$, de unde obţinem $[DM] \equiv [DL]$ şi deci $DM = DL$.

Teorema reciprocă. *Fie ABC un triunghi, D mijlocul lui $[AB]$ şi punctele A', B' pe dreptele AC respectiv BC astfel ca $C \in (AA')$ şi $C \in (BB')$. Fie punctele L, M pe dreptele BC respectiv AC astfel ca $DM = DL$. Perpendicularele în M şi L pe AC respectiv BC se întâlnesc în P. Să se demonstreze afirmaţiile:*

a) dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle ACB) \cup \mathrm{Int}\,(\angle A'CB')$, atunci $\angle PAC \equiv \angle PBC$;

b) dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle ACB') \cup \mathrm{Int}\,(\angle BCA')$, atunci $m\,(\angle PAC)+m\,(\angle PBC) = 180^\circ$.

Demonstraţie. *a*) Fie punctele D' şi D'' mijloacele segmentelor $[PA]$ respectiv $[PB]$.

Se arată uşor că $\triangle MD'D \equiv \triangle DD''L$, de unde rezultă că

$$\angle MD'D \equiv \angle DD''L. \tag{6}$$

Din $PD'DD''$ paralelogram, rezultă

$$\angle PD'D \equiv \angle PD''D. \tag{7}$$

Din relaţiile (6) şi (7) obţinem

$$\angle PD'M \equiv \angle PD''L. \tag{8}$$

a) Dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle ACB) \cup \mathrm{Int}\,(\angle A'CB')$, atunci din (8) rezultă $\angle PAC \equiv \angle PBC$ (fig.1 şi 2).

b) Dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle BCA')$ (fig. 3), atunci din relaţia (8) rezultă că $\angle PAC \equiv \angle PBL$ şi, deci, $m\,(\angle PAC) + m\,(\angle PBC) = 180^\circ$.

Dacă $P \in \mathrm{Int}\,(\angle ACB')$, atunci din relaţia (8) rezultă: $\angle PBC \equiv \angle PAM$. Deci $m\,(\angle PAC) + m\,(\angle PBC) = 180^\circ$.

Bibliografie

1. I. Cuculescu - *Olimpiadele internaţionale de matematică ale elevilor*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1984.

NOTA ELEVULUI

Asupra unei ecuaţii funcţionale

Loredana AGORE[1]

Scopul acestei note este rezolvarea ecuaţiei funcţionale

$$f(axy + x + y) = bf(x)\,f(y) + c\,[f(x) + f(y)] + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

în mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sau $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ sau $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

În ecuaţia (1) este cuprinsă *ecuaţia lui Cauchy*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{2}$$

ale cărei soluţii se numesc *funcţii aditive*, precum şi următoarele *ecuaţii clasice* ce sunt reductibile la ecuaţia lui Cauchy:

$$f(x + y) = f(x)\,f(y), \tag{3}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{4}$$

$$f(xy) = f(x)\,f(y). \tag{5}$$

Rezolvarea în detaliu a ecuaţiilor (2) – (5) se poate găsi în [**1**]. Tot în [**1**], p. 23, este studiată şi ecuaţia funcţională obţinută considerând în (1) $a \geq 0$, $c = 1$, $d = 0$.

Rezolvarea ecuaţiei funcţionale (1) constă în reducerea ei, potrivit cu parametrii a, b, c şi d, la una dintre ecuaţiile (2) – (5). Distingem câteva cazuri.

I $a \neq 0$, $b \neq 0$. Înmulţim ecuaţia (1) cu b şi apoi punem rezultatul obţinut sub forma

$$bf\left(\frac{(ax+1)(ay+1)-1}{a}\right) + c = \left[bf\left(\frac{(ax+1)-1}{a}\right) + c\right] \cdot \left[bf\left(\frac{(ay+1)-1}{a}\right) + c\right] + bd + c - c^2. \tag{6}$$

Cu notaţiile $\alpha = bd + c - c^2$, $u = ax + 1$, $v = ay + 1$ şi $\mathrm{g}(t) = bf\left(\dfrac{t-1}{a}\right) + c$, $t \in \mathbb{R}$, ecuaţia (6) se scrie

$$g(uv) = g(u)\,g(v) + \alpha. \tag{7}$$

Dacă $bd = c^2 - c$, adică $\alpha = 0$, atunci (7) este de tipul (5) şi se reduce la ecuaţia lui Cauchy [**1**]. Soluţiile se exprimă cu funcţiile aditive sau sunt funcţii constante.

Dacă $bd \neq c^2 - c$, deci $\alpha \neq 0$, luăm $u = v = 1$ în (7) şi obţinem $g(1) = [g(1)]^2 + \alpha$. De aici, $g(1) = \dfrac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}\right] = \dfrac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{(1-2c)^2 - 4bd}\right]$, cu condiţia ca $\alpha \leq \dfrac{1}{4}$ $\Leftrightarrow bd \leq c^2 - c + \dfrac{1}{4}$. Pe de altă parte, ecuaţia (7) cu $v = 1$ devine

$$g(u) = g(u)\,g(1) + \alpha \Leftrightarrow g(u) = \frac{\alpha}{1 - g(1)} \Leftrightarrow g(u) = g(1)$$

(evident, $g(1) \neq 1$). Ca urmare, ecuaţia (1) are, în cazul considerat, două soluţii date de $f(x) = \dfrac{1}{b}\left[g(1) - c\right] = \dfrac{1}{2b}\left[(1-2c) \pm \sqrt{(1-2c)^2 - 4bd}\right]$.

---

[1] Elevă, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "Mihai Viteazul", Bucureşti

II $a = 0$, $b \neq 0$. Ecuaţia (1) devine
$$f(x+y) = bf(x)f(y) + c[f(x) + f(y)] + d \tag{8}$$
şi se poate scrie în forma
$$bf(x+y) + c = [bf(x) + c][bf(y) + c] + bd + c - c^2 \tag{9}$$
sau, notând $\alpha = bd + c - c^2$ şi $g(t) = bf(t) + c$, $t \in \mathbb{R}$,
$$g(x+y) = g(x)g(y) + \alpha. \tag{10}$$
Dacă $bd = c^2 - c$, atunci (10) este de tipul (3) etc.

Dacă $bd \neq c^2 - c$, în (8) luăm $x = y = 0$ şi obţinem $f(0) = b[f(0)]^2 + 2cf(0) + d$ $(*)$, deci $f(0) = \dfrac{1}{2b}\left[(1-2c) \pm \sqrt{(1-2c)^2 - 4bd}\right]$ (în mod necesar, $(1-2c)^2 - 4bd \geq 0$ $\Leftrightarrow 1 - 4\alpha \geq 0$). Dar, dacă în (8) luăm $y = 0$ şi apoi grupăm convenabil, avem
$$[1 - bf(0) - c]f(x) = cf(0) + d \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow [1 - bf(0) - c]f(x) = [1 - bf(0) - c]f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0)$$
$(1 - bf(0) - c \neq 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} bd \neq c^2 - c)$. Avem două soluţii:
$$f(x) = f(0) = \frac{1}{2b}\left[(1-2c) \pm \sqrt{(1-2c)^2 - 4bd}\right].$$

III $a \neq 0$, $b = 0$. În acest caz, (1) se scrie
$$f(axy + x + y) = c[f(x) + f(y)] + d. \tag{11}$$
Dacă $c = 1$, punem (11) în forma
$$f\left(\frac{(ax+1)(ay+1)-1}{a}\right) + d = \left[f\left(\frac{(ax+1)-1}{a}\right) + d\right] + \left[f\left(\frac{(ay+1)-1}{a}\right) + d\right]$$
sau, notând $u = ax + 1$, $v = ay + 1$ şi $g(t) = f\left(\dfrac{t-1}{a}\right) + d$, $t \in \mathbb{R}$,
$$g(uv) = g(u) + g(v),$$
care este o ecuaţie de tipul (4).

Dacă $c \neq 1$, pentru $x = y = 0$ luat în (11) obţinem
$$f(0) = 2cf(0) + d \Leftrightarrow (1-2c)f(0) = d. \tag{12}$$
Cum, pentru $y = 0$ în (11), avem
$$f(x) = cf(x) + cf(0) + d \overset{(12)}{\Leftrightarrow} f(x) = cf(x) + f(0) - cf(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-c)f(x) = (1-c)f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0) \overset{(12)}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{d}{1-2c}$$
dacă mai presupunem în plus $c \neq \dfrac{1}{2}$. Este banală verificarea faptului că, în condiţiile impuse, $f(x) = \dfrac{d}{1-2c}$ este soluţie a ecuaţiei (11).

Dacă $c = \dfrac{1}{2}$, avem de rezolvat ecuaţia
$$f(axy + x + y) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] + d. \tag{13}$$

Pentru $x = y = 0$, obţinem $f(0) = \frac{1}{2}[f(0) + f(0)] + d$, deci $d = 0$. Luând acum $y = -\frac{1}{a}$ în (13) cu $d = 0$, vom avea $f(0) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left(\frac{-1}{a}\right)\right]$, de unde rezultă că $f(x) = k$ (constant), $\forall x \in \mathbb{R}$. Se verifică uşor că această funcţie este într-adevăr soluţie pentru orice $k \in \mathbb{R}$.

IV $a = 0$, $b = 0$. Este vorba de ecuaţia

$$f(x+y) = c[f(x) + f(y)] + d. \tag{14}$$

Dacă $c = 1$, (14) se poate scrie

$$f(x+y) + d = [f(x) + d] + [f(x) + d],$$

care este o ecuaţie Cauchy în $g(t) = f(t) + d$, $t \in \mathbb{R}$.

Dacă $c \neq 1$, luăm $x = y = 0$ în (14) şi obţinem, ca şi în cazul precedent, relaţiile echivalente (12). Se continuă tot ca în cazul amintit şi se obţine soluţia $f(x) = f(0) = \frac{d}{1-2c}$, $x \in \mathbb{R}$, dacă $c \neq \frac{1}{2}$.

Dacă $c = \frac{1}{2}$, (14) se scrie

$$f(x+y) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] + d. \tag{15}$$

Luând $x = y = 0$, constatăm că $d = 0$. Punând în (15) $d = 0$ şi fixând $y = 0$, obţinem $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(0)]$. Deci $f(x) = f(0) = \text{constant}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, funcţie ce este soluţie a ecuaţiei (15).

Bibliografie

1. **V. Pop** - *Ecuaţii funcţionale. Ecuaţii clasice şi probleme*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2002.

Recreaţii ... matematice

2. Un călător, care nu avea la el decît un lanţ cu şapte verigi de aur, poposeşte într-o zi la un han. El se înţelege cu hangiul să-l plătească pentru fiecare zi petrecută la han câte o verigă de aur. Dacă stă şapte zile şi plata trebuie făcută în fiecare zi, care este numărul minim de tăieturi care trebuie făcute în lanţ pentru a putea plăti preţul convenit? (Se acceptă ca, atunci când este cazul, hangiul să dea călătorului ca rest un număr de verigi (posibil toate!) pe care le-a primit deja.)

3. Care este eroarea în "demonstraţia" de mai jos a egalităţii $3 = 0$?

$x^2 - x + 1 = 0 \quad \vert \cdot x$	$x^3 - (-1) = 0$
$x^3 - x^2 + x = 0$	$x^3 = -1$
$x^3 - (x^2 - x) = 0$	$x = -1$

Punând $x = -1$ în $x^2 - x + 1 = 0$, obţinem $3 = 0$.

Notă. Soluţiile problemelor 2 şi 3 se pot găsi la pagina 39.

Asupra unei inegalităţi condiţionate

Cezar LUPU[1]

La OBM - 2001 a fost dată problema următoare:

Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel încât $a+b+c \geq abc$. Să se arate că $a^2+b^2+c^2 \geq abc\sqrt{3}$. **Cristinel Mortici, România**

Soluţia autorului utilizează metoda reducerii la absurd. Presupunem că are loc inegalitatea contrară, adică $a^2+b^2+c^2 < abc\sqrt{3}$. Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz, obţinem $abc\sqrt{3} > a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq \frac{1}{3}(abc)^2$, de unde $abc < 3\sqrt{3}$. Pe de altă parte, aplicând inegalitatea mediilor, avem $abc\sqrt{3} > a^2+b^2+c^2 \geq$ $\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ şi, deci, $abc > 3\sqrt{3}$. Se obţine astfel o contradicţie.

Alte soluţii ale acestei probleme sunt prezentate în [**1**] şi [**2**].

1. Problema de mai sus poate fi întărită astfel:

Problema 1. *Să se arate că, dacă $a, b, c > 0$ şi $a+b+c > abc$, atunci $ab+bc+ca \geq abc\sqrt{3}$.*

Soluţia I. Ipoteza şi concluzia se pot scrie în felul următor: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac} \geq 1$ şi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$. Utilizăm binecunoscuta inegalitate $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (1) pentru a obţine $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$, din care rezultă că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$.

Soluţia II. Inegalitatea cerută rezultă direct din inegalitatea $ab+bc+ca \geq$ $\geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$ (2) (aceasta se reduce la (1), dacă notăm $x = ab$, $y = bc$ şi $z = ca$).

Problema 2. *Se consideră $a, b, c > 0$ astfel încât $a+b+c \geq abc$. Să se arate că $\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.* **Cezar Lupu**

Soluţie. Pentru prescurtarea scrierii folosim însumarea ciclică $\sum$. Avem

$$\sum \frac{bc}{a^2(b+c)} = \frac{1}{abc}\sum \frac{(bc)^2}{a(b+c)} \geq \frac{1}{abc}\cdot\frac{(bc+ca+ab)^2}{2(bc+ca+ab)} = \frac{ab+bc+ca}{2abc} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(s-a folosit $(bc+ca+ab)^2 \leq 2(bc+ca+ab)\sum \frac{(bc)^2}{a(b+c)}$, adevărată conform inegalităţii Cauchy-Schwarz).

2. Având ca punct de plecare inegalitatea condiţionată dată la OBM, se pot obţine inegalităţi geometrice într-un triunghi. Să observăm mai întâi că avem:

Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare înscris într-un cerc de rază egală cu unitatea, atunci $a+b+c \geq abc$.

În [**2**] sunt date patru demonstraţii. Reproducem una dintre ele. Formulele $4RS = abc$ şi $S = pr$ conduc la relaţia $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$. Utilizând inegalitatea lui Euler şi faptul că $R = 1$, obţinem inegalitatea dorită.

---

[1] Elev, cl. a X-a, Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân", Constanţa

Ca urmare, în condiţia impusă triunghiului, are loc şi inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq abc\sqrt{3}$. De altfel, aceasta din urmă rezultă direct din cunoscuta inegalitate $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ (*Weitzenböck*, 1919) pentru $R=1$.

O întărire a acestor inegalităţi este dată de

Problema 3. *În orice triunghi este satisfăcută inegalitatea* $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq 4S\sqrt{3}$. *În particular, dacă* $R=1$, *avem* $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq abc\sqrt{3}$.

Soluţie. Prima parte a dublei inegalităţi se dovedeşte astfel: $\sum ab \geq \sum a\sqrt{bc} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}} \Leftrightarrow A^2+B^2+C^2 \geq AB+BC+CA$ (s-a notat $A=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $B=\frac{1}{\sqrt{b}}$ şi $C=\frac{1}{\sqrt{c}}$), care este adevărată.

Demonstrăm acum partea a doua, adică $\sum a\sqrt{bc} \geq 4S\sqrt{3}$ sau $\sum \frac{1}{\sqrt{bc}} \geq \frac{\sqrt{3}}{R}$. Cu inegalitatea Cauchy-Schwarz sau utilizând inegalitatea (2) de mai sus, obţinem $\sum \frac{1}{\sqrt{bc}} \geq \frac{9}{\sum \sqrt{bc}} \geq \frac{9}{\sqrt{3\,(ab+bc+ca)}}$. Este suficient ca $\frac{9}{\sqrt{3\,(ab+bc+ca)}} \geq \frac{\sqrt{3}}{R}$ sau, echivalent, $ab+bc+ca \leq 9R^2$. Aceasta decurge din $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ şi faptul cunoscut că într-un triunghi are loc $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$.

Problema 4. *Să se arate că în orice triunghi înscris într-un cerc de rază egală cu 1 are loc inegalitatea* $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\sqrt{3} \leq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. **Cezar Lupu**

Soluţie. Este binecunoscută inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+ +(b-c)^2+(c-a)^2$ (*Finsler* şi *Hadwiger*, 1938). Este echivalentă cu $2\,(ab+bc+ca)- -\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 4S\sqrt{3}$ şi ţinând seama că $R=1$, conduce la inegalitatea cerută.

Problema 5. *În orice triunghi înscris într-un cerc de rază* 1 *are loc următoarea inegalitate:* $\frac{a}{bc\,(b+c)}+\frac{b}{ca\,(c+a)}+\frac{c}{ab\,(a+b)} \geq \frac{3}{2\,(a+b+c)}$. **Cezar Lupu**

Soluţie. Utilizând rezultatul din Problema 3 şi inegalitatea Cauchy-Schwarz, putem scrie: $\frac{3a^2b^2c^2}{2\,(a+b+c)} \leq \frac{(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab})^2}{2\,(a+b+c)} \leq \sum \frac{(a\sqrt{bc})^2}{b+c}$, de unde, prin împărţire cu $a^2b^2c^2$, obţinem inegalitatea dorită.

3. Propunem spre rezolvare următoarele probleme:

1. Se consideră a,b,c trei numere reale strict pozitive astfel încât $a+b+c \geq abc$. Arătaţi că $\frac{a^2}{bc\,(b+c)}+\frac{b^2}{ca\,(c+a)}+\frac{c^2}{ab\,(a+b)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **Cezar Lupu, G.M.**

2. Fie ABC un triunghi oarecare înscris într-un cerc de rază egală cu 1. Arătaţi că $PA+PB+PC \geq \frac{\sqrt{3}}{3}AB\cdot BC\cdot CA, \forall P \in \text{Int}\,(ABC)$. **Cezar Lupu**

Bibliografie

1. M. Bălună şi M. Becheanu (prezentare de) - *A 18-a OBM, 3-9 mai 2001, Belgrad*, GM - 5-6/2001, 229-236.

2. Cezar Lupu - *Asupra unei probleme de concurs*, Rev. Mate(matică), 2003, 17-20.

O metodă de demonstrare a concurenţei unor drepte

Gabriel POPA, Paul GEORGESCU[1]

Vom exemplifica în cele ce urmează aplicabilitatea unei metode de demonstrare a concurenţei unor drepte, prea puţin utilizată în contextul introducerii noii programe şcolare de geometrie.

Date două puncte A, B având vectorii de poziţie $\vec{r}_A$ şi respectiv $\vec{r}_B$, vectorul de poziţie al unui punct al dreptei AB este de forma

$$\vec{r}_M = \lambda \vec{r}_A + (1-\lambda)\,\vec{r}_B,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

(*ecuaţia vectorială* a dreptei AB). Având o dreaptă ataşată unui triunghi, vectorul de poziţie al unui punct curent M al său poate fi exprimat funcţie de vectorii de poziţie ai vârfurilor şi de un parametru real λ. Considerând încă o dreaptă (cu parametrul notat μ), pentru a afla punctul comun celor două drepte vom avea de rezolvat un sistem liniar în λ şi μ.

Dacă dorim să probăm concurenţa a trei drepte, le vom intersecta două câte două şi vom urmări dacă vectorii de poziţie ai punctelor obţinute coincid. Metoda presupune, în general, un important volum de calcule, însă este "sigură" şi permite, în plus faţă de alte metode, poziţionarea punctului de concurenţă.

Problema 1. *Fie ABC un triunghi şi $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (AC)$, $R, S \in (AB)$ puncte astfel încât $BM = CN = CP = AQ = AR = BS = x$, unde $0 < 2x < \min\{AB, BC, CA\}$. Dacă A_1, B_1, C_1 sunt respectiv mijloacele segmentelor (SP), (RN), (MQ), arătaţi că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.*

Constantin Cocea

Soluţie. Punctul S împarte segmentul orientat $\overline{BA}$ în raportul $\dfrac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = -\dfrac{x}{c-x}$; atunci

$$\vec{r}_S = \frac{c-x}{c}\left[\vec{r}_B + \frac{x}{c-x}\vec{r}_A\right] = \frac{c-x}{c}\vec{r}_B + \frac{x}{c}\vec{r}_A\ .$$

Analog, $\vec{r}_P = \dfrac{b-x}{b}\vec{r}_C + \dfrac{x}{b}\vec{r}_A$ şi atunci

$$\vec{r}_{A_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_S + \vec{r}_P\right) = \frac{x\,(b+c)}{2bc}\vec{r}_A + \frac{c-x}{2c}\vec{r}_B + \frac{b-x}{2b}\vec{r}_C\ .$$

Vectorul de poziţie al unui punct curent X al dreptei AA_1 va fi

$$\vec{r}_X = \lambda\vec{r}_{A_1} + (1-\lambda)\,\vec{r}_A = \left[\frac{\lambda x\,(b+c)}{2bc} + (1-\lambda)\right]\vec{r}_A + \frac{\lambda\,(c-x)}{2c}\vec{r}_B + \frac{\lambda\,(b-x)}{2b}\vec{r}_C\ ,$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$. Cu totul analog, vectorul de poziţie al unui punct curent Y al dreptei BB_1 va fi

$$\vec{r}_Y = \frac{\mu\,(c-x)}{2c}\vec{r}_A + \left[\frac{\mu x\,(a+c)}{2ac} + (1-\mu)\right]\vec{r}_B + \frac{\mu\,(a-x)}{2a}\vec{r}_C\ .$$

[1] Profesori, Colegiul Naţional şi Liceul de Informatică "Gr. Moisil", Iaşi

Intersecţia celor două drepte se obţine rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda x\,(b+c)}{2bc} + (1-\lambda) = \dfrac{\mu\,(c-x)}{2c} \\ \dfrac{\lambda\,(c-x)}{2c} = \dfrac{\mu x\,(a+c)}{2ac} + (1-\mu) \\ \dfrac{\lambda\,(b-x)}{2b} = \dfrac{\mu\,(a-x)}{2a}\ . \end{cases}$$

Sistemul este compatibil determinat, cu soluţia

$$\lambda = \frac{2bc\,(a-x)}{x^2\,(a+b+c) - 2x\,(ab+bc+ac) + 3abc}\,;$$

$$\mu = \frac{2ac\,(b-x)}{x^2\,(a+b+c) - 2x\,(ab+bc+ac) + 3abc}\,.$$

Punctul comun al dreptelor AA_1 şi BB_1 este T, unde

$$\vec{r}_T = \frac{1}{x^2\,(a+b+c) - 2x\,(ab+bc+ac) + 3abc}[a\,(b-x)\,(c-x)\,\vec{r}_A +$$
$$+\, b\,(a-x)\,(c-x)\,\vec{r}_B + c\,(a-x)\,(b-x)\,\vec{r}_C]\ .$$

Scriind acum ecuaţia vectorială a dreptei CC_1 şi aflând intersecţia acesteia cu AA_1, obţinem acelaşi punct T. Urmează că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Observaţii.

1) Calcule foarte asemănătoare rezolvă problema *L*.25.*a*) din R. M. T. 2/1990, autor **Constantin Cocea**. Legat de punctul *b*) al acestei probleme, comparând notele apărute în R. M. T. numerele 2/1991 şi 1/1996, putem observa cum uneori calculul vectorial ajută la simplificarea soluţiilor (a se vedea şi [**4**]).

2) În [**6**] se demonstrează concurenţa înălţimilor şi bisectoarelor unui triunghi folosind această metodă; aceste demonstraţii au constituit punctul de plecare al articolului de faţă.

3) Calculele pot fi simplificate atunci când, din considerente geometrice, intuim anumite simetrii verificate de punctul de concurenţă.

Problema 2. *Fie H ortocentrul $\triangle ABC$, M, N şi P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$, iar $A_1 \in (AH)$, $B_1 \in (BH)$, $C_1 \in (CH)$ astfel încât $\dfrac{AA_1}{A_1H} = \dfrac{BB_1}{B_1H} = \dfrac{CC_1}{C_1H}$. Să se arate că dreptele A_1M, B_1N şi C_1P sunt concurente.*

Gabriel Popa, Paul Georgescu

Soluţie. Raportăm planul la un reper cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului şi fie $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ vectorii de poziţie ai vârfurilor. Dacă $\dfrac{A_1H}{AA_1} = k$, atunci

$$\vec{r}_H = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\,, \quad \vec{r}_M = \frac{1}{2}\,(\vec{r}_B + \vec{r}_C)\,,$$

$$\vec{r}_{A_1} = \frac{1}{1+k}\vec{r}_H + \frac{k}{1+k}\vec{r}_A = \vec{r}_A + \frac{1}{1+k}\vec{r}_B + \frac{1}{1+k}\vec{r}_C\,.$$

Căutăm un punct $Q \in (A_1M)$ astfel încât $\dfrac{A_1Q}{QM} = l$, iar $\vec{r}_Q$ să se exprime simetric funcţie de $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ şi $\vec{r}_C$:

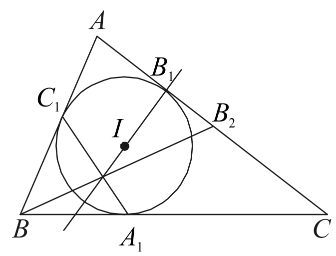
$$\vec{r}_Q = \frac{1}{1+l}\vec{r}_{A_1} + \frac{l}{1+l}\vec{r}_M = \frac{1}{1+l}\left[\vec{r}_A + \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{1+k}\right)\vec{r}_B + \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{1+k}\right)\vec{r}_C\right];$$

pentru $\frac{l}{2}+\frac{1}{1+k} = 1 \Leftrightarrow l = \frac{2k}{1+k}$, obţinem că $\vec{r}_Q = \frac{1+k}{1+3k}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right)$. Analog, căutăm $Q' \in (B_1N)$ şi $Q'' \in (C_1P)$ care să se exprime simetric funcţie de $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ şi $\vec{r}_C$; vom găsi că $Q' = Q'' = Q$, deci cele trei drepte sunt concurente.

Problema 3. *Laturile (AB), (BC), (AC) ale triunghiului ABC sunt tangente cercului înscris de centru I în punctele C_1, A_1 respectiv B_1. Dacă B_2 este mijlocul laturii (AC), demonstraţi că dreptele B_1I, A_1C_1 şi BB_2 sunt concurente.*

Olimpiadă Rep. Moldova

Soluţie. Funcţie de vectorii de poziţie ai vârfurilor $\triangle ABC$, vectorii de poziţie ai punctelor care apar în problemă sunt:



$$\vec{r}_{A_1} = \frac{a+b-c}{2a}\vec{r}_B + \frac{a+c-b}{2a}\vec{r}_C\ ;$$

$$\vec{r}_{B_1} = \frac{b+a-c}{2b}\vec{r}_A + \frac{b+c-a}{2b}\vec{r}_C\ ;$$

$$\vec{r}_{C_1} = \frac{c+a-b}{2c}\vec{r}_A + \frac{c+b-a}{2c}\vec{r}_B\ ;$$

$$\vec{r}_{B_2} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_C\right); \quad \vec{r}_I = \frac{a}{a+b+c}\vec{r}_A + \frac{b}{a+b+c}\vec{r}_B + \frac{c}{a+b+c}\vec{r}_C\ .$$

Fie X un punct pe IB_1; atunci

$$\vec{r}_X = \lambda\vec{r}_{B_1} + (1-\lambda)\,\vec{r}_I = \left[\frac{\lambda\,(b+a-c)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,a}{a+b+c}\right]\vec{r}_A +$$
$$+\frac{(1-\lambda)\,b}{a+b+c}\vec{r}_B + \left[\frac{\lambda\,(b+c-a)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,c}{a+b+c}\right]\vec{r}_C, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Căutăm o valoare a lui λ pentru care $\vec{r}_X$ să aibă o exprimare simetrică în $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_C$, deci

$$\frac{\lambda\,(b+a-c)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,a}{a+b+c} = \frac{\lambda\,(b+c-a)}{2b} + \frac{(1-\lambda)\,c}{a+b+c} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{b}{a+c};$$

pentru această valoare a lui λ,

$$\vec{r}_X = \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_A + \frac{b}{a+c}\vec{r}_B + \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_C.$$

Fie acum Y punct pe A_1C_1; atunci

$$\vec{r}_Y = \mu\vec{r}_{A_1} + (1-\mu)\,\vec{r}_{C_1} = (1-\mu)\,\frac{c+a-b}{2c}\vec{r}_A +$$
$$+\left[\frac{\mu\,(a+b-c)}{2a} + \frac{(1-\mu)\,(c+b-a)}{2c}\right]\vec{r}_B + \frac{\mu\,(a+c-b)}{2a}\vec{r}_C\ .$$

Căutând o valoare pentru μ astfel încât $\vec{r}_Y$ să aibă o exprimare simetrică în $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_C$, obţinem $\mu = \frac{a}{a+c}$ şi, pentru această valoare,

$$\vec{r}_Y = \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_A + \frac{b}{a+c}\vec{r}_B + \frac{a+c-b}{2\,(a+c)}\vec{r}_C\ ,$$

adică $Y = X$. Să observăm în final că, datorită simetriei în $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_C$, acest punct se află şi pe mediana BB_2.

Probleme propuse

1. Fie G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutete ale feţelor tetraedrului $ABCD$, iar M un punct interior tetraedrului. Dacă A', B', C', D' sunt situate respectiv pe semidreptele $(MG_A$, $(MG_B$, $(MG_C$, $(MG_D$, în exteriorul tetraedrului, astfel încât $\dfrac{MG_A}{G_AA'} = \dfrac{MG_B}{G_BB'} = \dfrac{MG_C}{G_CC'} = \dfrac{MG_D}{G_DD'}$, să se arate că dreptele AA', BB', CC', DD' sunt concurente.

Gabriel Popa, Paul Georgescu

2. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$, A_1, B_1, C_1 punctele de pe $\mathcal{C}$ diametral opuse vârfurilor, iar G_A, G_B, G_C centrele de greutate ale triunghiurilor A_1BC, B_1CA, respectiv C_1AB. Arătaţi că dreptele AG_A, BG_B, CG_C sunt concurente într-un punct situat pe dreapta lui Euler a $\triangle ABC$.

Gabriel Popa, Paul Georgescu

3. Fie M în interiorul $\triangle ABC$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{BMC}$, $\widehat{CMA}$, $\widehat{AMB}$ taie laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ în A_1, B_1, respectiv C_1. Să se arate că AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.

Gheorghe Neagu

4. Fie D, E, F punctele de tangenţă ale cercului înscris în $\triangle ABC$ cu laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Paralela prin E la AB taie FD în Q, iar paralela prin D la AB taie EF în T. Să se arate că dreptele CF, DE şi TQ sunt concurente.

Marcel Chiriţă

5. Fie tetraedrul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CD)$, $P \in (BC)$, $Q \in (AD)$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{DN}{NC}$, $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{AQ}{QD}$. Notăm $\{A_1\} = BN \cap DP$, $\{B_1\} = AN \cap CQ$, $\{C_1\} = BQ \cap DM$, $\{D_1\} = AP \cap CM$. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 şi DD_1 sunt concurente.

Bibliografie

1. **C. Cocea** - *Problema L.25*, R. M. T. - 2/1990.
2. **C. Cocea** - *Problema X.8*, R. M. T. - 1/1996.
3. **P. Georgescu, G. Popa** - *Structuri fundamentale în algebra liniară, geometria vectorială şi geometria analitică*, Ed. MatrixRom, Bucureşti, 2003.
4. **G. Popa** - *Aplicaţii ale dimensiunii dreptei vectoriale, planului vectorial şi a spaţiului vectorial*, Matematica pentru elevi, Galaţi, 17-18/2001.
5. **G. Popa, P. Georgescu** - *Dreapta lui Euler privită ca loc geometric*, Recreaţii Matematice - 2/2002.
6. **E. Murgulescu, N. Donciu** - *Culegere de probleme de geometrie analitică şi diferenţială* (vol. I), E. D. P., 1971.
7. ******* - *A 46-a Olimpiadă de Matematică a Rep. Moldova*, R. M. T - 3/2002.

Teorema ariciului şi câteva aplicaţii

Dumitru MIHALACHE[1]

În aceasta notă ne propunem să prezentăm un rezultat mai puţin vehiculat în literatura matematică românească din ultimii ani, precum şi o aplicaţie oarecum neaşteptată a sa; credem că cititorii interesaţi vor găsi destule alte probleme care să-l folosească. Vom prezenta **teorema ariciului** în mod gradat (denumirea este justificată de aspectul configuraţiilor ce vor apărea); în plan mai întâi pentru triunghi şi apoi pentru poligon oarecare, iar în spaţiu pentru tetraedru şi pe urmă pentru un poliedru arbitrar, cu demonstraţii între care există analogii.

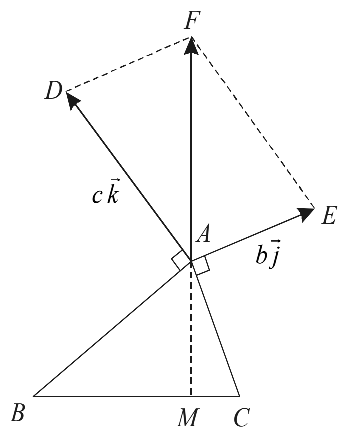
Propoziţia 1. *Fie ABC un triunghi şi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ versori perpendiculari pe dreptele BC, CA, respectiv AB, îndreptaţi spre exteriorul triunghiului. Cu notaţiile uzuale, are loc egalitatea $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\vec{0}$.*

Demonstaţia I. Notăm $\vec{S}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$; avem că $\vec{S}\cdot a\vec{i}=a^2+ab\,\vec{i}\cdot\vec{j}+ac\,\vec{i}\cdot\vec{k}$. Deoarece unghiul dintre $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ are măsura $180^\circ-m(\widehat{C})$, obţinem că $\vec{i}\cdot\vec{j}=-\cos C$ şi, procedând la fel, analoagele. Folosind identitatea $b\cos C+c\cos B=a$, găsim că

$$\vec{S}\cdot a\vec{i}=a^2-ab\cos C-ac\cos B=a\,(a-b\cos C-c\cos B)=0.$$

Similar, $\vec{S}\cdot b\vec{j}=0$, prin urmare $\vec{S}$ este ortogonal pe doi vectori necoliniari, deci $\vec{S}=\vec{0}$.

Demonstraţia II. Construim, ca în figură, reprezentanţi cu originea în A ai vectorilor $b\vec{j}$ şi $c\vec{k}$, fie aceştia $\overrightarrow{AE}$, respectiv $\overrightarrow{AD}$; fie încă F al patrulea vârf al paralelogramului construit pe aceşti vectori. Se observă atunci că $\triangle ABC\equiv\triangle EFA$ (L.U.L.), deci $AF=BC=a$ şi $\widehat{FAE}\equiv\widehat{ACB}$. De aici, $m(\widehat{MAC})=$ $=180^\circ-m(\widehat{CAE})-m(\widehat{EAF})=90^\circ-m(\widehat{ACB})$, adică $m(\widehat{AMC})=90^\circ$, unde $\{M\}=AF\cap BC$. Urmează că $\overrightarrow{AF}$ este ortogonal pe BC, are lungimea a şi sens opus lui $\vec{i}$, deci $\overrightarrow{AF}=-a\vec{i}$. Pe de altă parte, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=b\vec{j}+c\vec{k}$, de unde concluzia.



Să observăm că putem considera că teorema ariciului a fost demonstrată cu prima metodă (sau cu alta, vom vedea că mai există); atunci relaţia $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\vec{0}$ conduce, având în vedere figura de mai sus, la $\overrightarrow{AF}=-a\vec{i}$, i.e. $AF\perp BC$, $AF=BC$, plus o condiţie privind sensul. Prin urmare, putem afirma că, din punct de vedere logic, teorema ariciului pentru triunghi este echivalentă cu următorul enunţ (pb. 45, pg. 49 din [**2**]):

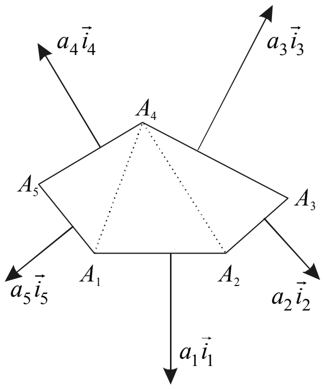
Problema 1. *Se consideră $\triangle ABC$ pe ale cărui laturi $[AB]$ şi $[AC]$ se construiesc în exterior pătratele $ABGD$ şi $ACKE$. Dacă O este mijlocul lui DE, atunci $AO=BC/2$ şi $AO\perp BC$.*

Altfel spus, mediana din A în $\triangle ADE$ este înălţime în $\triangle ABC$; atenţie că şi invers! Şi încă un amănunt: nu trebuie ignorat cazul în care unul din unghiurile $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ este drept sau obtuz.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

Propoziţia 2. *Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon cu laturile de lungimi $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $\ldots$, $A_nA_1 = a_n$. Pentru fiecare $k = \overline{1,n}$, pe latura de lungime a_k se construieşte un versor $\vec{i}_k$ orientat spre exteriorul poligonului; atunci $a_1\vec{i}_1 + a_2\vec{i}_2 + \cdots + a_n\vec{i}_n = \vec{0}$.*

Demonstraţie. Să remarcăm că, deşi poate să nu fie convex, se subînţelege că poligonul nu trebuie să aibă autointersecţii; vă convingeţi uşor că pentru o "fundiţă" formată cu două laturi opuse ale unui dreptunghi şi cu diagonalele sale, proprietatea nu are loc (asta dacă reuşiţi să stabiliţi care este interiorul şi care este exteriorul ei!).



Împărţim poligonul în triunghiuri cu interioarele disjuncte, prin diagonale care nu se intersectează. Aplicăm apoi Propoziţia 1 fiecărui triunghi, însumăm relaţiile obţinute şi concluzia urmează dacă ţinem seama de faptul că pe laturile comune pentru câte două triunghiuri (diagonale ale poligonului!) sunt construiţi câte doi vectori cu suma nulă.

Bineînţeles, demonstraţia poate căpăta şi o formă mai tehnică, utilizând metoda inducţiei matematice; lăsăm acest demers în seama cititorului. Să spunem că am dat aceste demonstraţii deoarece în cazul poliedrelor se va observa o temeinică analogie în argumentare. Cazul plan poate fi rezolvat mult mai simplu, chiar în următoarea formă mai generală:

Propoziţia 2′. *Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon şi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vectori în planul său, orientaţi către exteriorul poligonului, încât, pentru fiecare $k = \overline{1,n}$, $\vec{v}_k$ are lungimea cât $[A_kA_{k+1}]$ şi formează un acelaşi unghi α cu $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$. Atunci $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\cdots+\vec{v}_n = \vec{0}$.*

Demonstraţie (aflată de autor de la prof. **Marian Tetiva**, Bârlad). Să observăm că $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ se obţin din $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\ldots$, respectiv $\overrightarrow{A_nA_1}$ printr-o rotaţie de acelaşi unghi α. Cum $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$, la fel şi $\vec{v}_1+\vec{v}_2+ +\cdots+\vec{v}_n = \vec{0}$.

Pentru teorema ariciului în spaţiu avem nevoie de următoarea

Lemă. *Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru; notăm cu S_k aria feţei opuse vârfului A_k şi cu α_{hk} unghiul feţelor de arii S_h şi S_k, format spre interiorul tetraedrului. Atunci are loc egalitatea $S_1 = S_2\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{13} + S_4\cos\alpha_{14}$.*

Demonstraţie. Considerăm întâi că A_1 se proiectează pe planul $(A_2A_3A_4)$ în punctul H interior $\triangle A_2A_3A_4$. Atunci $S_{HA_3A_4} = S_2\cos\alpha_{12}$, $S_{HA_2A_4} = S_3\cos\alpha_{13}$, $S_{HA_2A_3} = S_4\cos\alpha_{14}$ şi $S_{HA_3A_4} + S_{HA_2A_4} + S_{HA_2A_3} = S_1$, de unde concluzia. Raţionamentul este analog în cazul în care $H \notin \operatorname{Int} A_2A_3A_4$.

Să observăm analogia cu egalitatea $b\cos C + c\cos B = a$ din cazul triunghiului.

Propoziţia 3. *Cu notaţiile din lemă, fie versorii $\vec{i}_k$, $k = \overline{1,4}$, ortogonali respectiv pe feţele de arii S_k şi orientaţi spre exteriorul tetraedrului. Atunci*

$$S_1\vec{i}_1 + S_2\vec{i}_2 + S_3\vec{i}_3 + S_4\vec{i}_4 = \vec{0}.$$

Demonstraţia pe care o dăm este după [**3**] şi decurge la fel cu aceea a Propoziţiei 1. Notăm aşadar $\vec{S} = S_1\vec{i}_1 + S_2\vec{i}_2 + S_3\vec{i}_3 + S_4\vec{i}_4$ şi, folosind Lema, obţinem

că
$$\vec{S} \cdot S_1\vec{i}_1 = S_1^2 - S_1S_2\cos\alpha_{12} - S_1S_3\cos\alpha_{13} - S_1S_4\cos\alpha_{14} = 0$$
şi încă trei relaţii analoage. Fiind ortogonal pe trei vectori necoplanari, vectorul $\vec{S}$ este în mod necesar $\vec{0}$.

Propoziţia 4. *Fie un poliedru convex cu ariile feţelor $S_1, S_2, \ldots, S_n$ $(n \geq 4)$. Pe planul feţei de arie S_k se construieşte versorul $\vec{i}_k$ perpendicular, orientat spre exteriorul poliedrului. Are loc relaţia $S_1\vec{i}_1 + S_2\vec{i}_2 + \cdots + S_n\vec{i}_n = \vec{0}$.*

Demonstraţie. Partiţionăm poliedrul în tetraedre cu interioarele disjuncte, oricare două tetraedre având în comun cel mult o faţă. Pentru fiecare tetraedru construim vectorii perpendiculari pe planele feţelor, spre exterior, de lungimi egale cu ariile feţelor respective. Aplicăm pentru fiecare tetraedru Propoziţia 3 şi ţinem seama că pe fiecare faţă a tetraedrelor care nu este faţă a poliedrului iniţial sunt construiţi doi vectori care se anulează reciproc.

O altă demonstraţie a teoremei ariciului pentru tetraedre poate fi găsită în [**3**] şi utilizează produsul vectorial, iar o frumoasă demonstraţie în cazul general apare în [**4**], bazată pe ideea că suma proiecţiilor vectorilor pe orice dreaptă este nulă (pb. *M119* din *Kvant*). În spaţiu, o demonstraţie analoagă cu cea a Propoziţiei 2′ nu se poate găsi.

Folosind Propoziţia 3, putem obţine valabilitatea următorului enunţ (de altfel, credem că ele sunt echivalente), care reprezintă extinderea în spaţiu a Problemei 1:

Problema 2. *Cu notaţiile din lemă, construim punctul B_2 de cealaltă parte a planului $(A_1A_2A_3)$ decât A_2 şi astfel încât $A_1B_2 \perp (A_1A_3A_4)$, iar A_1B_2 este numeric egal cu S_2. Analog construim B_3 şi B_4, apoi paralelipipedul $A_1B_2B_3'B_4B_3B_4'A_1'B_2'$ pe vectorii $\overrightarrow{A_1B_2}$, $\overrightarrow{A_1B_3}$, $\overrightarrow{A_1B_4}$. Atunci $A_1A_1' \perp (A_2A_3A_4)$ şi $A_1A_1' = S_1$.*

În încheiere, propunem rezolvarea următoarelor probleme:

1. Deduceţi, cu teorema ariciului, că fiecare latură a unui poligon este mai mică decât suma celorlaltor laturi; generalizare în spaţiu. Este reciproca adevărată?

2. Demonstraţi *teoremele cosinusurilor* pentru tetraedru:
$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\alpha_{23} - 2S_2S_4\cos\alpha_{24} - 2S_3S_4\cos\alpha_{34};$$
$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{12} = S_3^2 + S_4^2 - 2S_3S_4\cos\alpha_{34}.$$
Arătaţi că aceste egalităţi sunt valabile şi dacă S_1, S_2, S_3, S_4 sunt lungimile laturilor unui patrulater (redefinind α_{hk}).

3. Rezolvaţi Problema 2 sintetic (sau pe orice altă cale) şi obţineţi astfel echivalenţa logică dintre Problema 2 şi Propoziţia 3.

Bibliografie

1. **D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea** - *Planul şi spaţiul euclidian*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
2. **J. Hadamard** - *Lecţii de geometrie elementară. Geometrie plană*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1960.
3. **M. Miculiţa** - *Introducere în geometria tetraedrului*, Ed. Mined, Iaşi, 1994.
4. *Probleme din revista KVANT* (traduse şi selectate de **H. Banea**), E. D. P., Bucureşti, 1983.

Numărul polinoamelor ireductibile din $\mathbb{Z}_p[X]$

Elena ROGOJINĂ[1]***, Lucian-Georges LĂDUNCĂ***[2]

Problema 3 propusă la Berkeley Preliminary Exams, Fall 1985, cere *determinarea numărului polinoamelor ireductibile de grad 3 şi coeficientul dominant* $\widehat{1}$ *din* $\mathbb{Z}_5[X]$ ([**2**], p. 230). Mai general, *Problema 150* din G. M. (seria A), nr. 1/2003, cere *determinarea numărului polinoamelor ireductibile de grad 3 din* $\mathbb{Z}_p[X]$, *p prim* (**Gabriel Popa,** [**3**]).În nota de faţă vom urmări rezolvarea acestor probleme şi vom arăta cum poate fi aflat *numărul polinoamelor ireductibile de grad n din* $\mathbb{Z}_p[X]$, *p prim.*

Să observăm mai întâi că polinomul $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_p$ dacă şi numai dacă polinomul $X^k + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_n^{-1} a_k X^k$ este ireductibil (unde evident că $a_n \neq \widehat{0}$ este inversabil peste corpul $\mathbb{Z}_p$); este deci suficient să găsim numărul polinoamelor normate (monice) ireductibile, prin înmulţirea acestui număr cu $p-1$ aflând răspunsul la problemă.

Numărul polinoamelor de forma $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$, este p^3. Ca în [**2**], să vedem întâi câte dintre aceste polinoame sunt reductibile. Polinoamele reductibile din $\mathbb{Z}_p$ sunt fie de forma $f = (X-i)(X-j)(X-k)$, $i, j, k \in \mathbb{Z}_p$, fie de forma $f = (X-i)\left(X^2 + mX + n\right)$, $i, m, n \in \mathbb{Z}_p$ şi $X^2 + mX + n$ ireductibil peste $\mathbb{Z}_p$. Prima dificultate care trebuie depăşită în trecerea de la $p = 5$ la cazul general este numărarea polinoamelor de primul tip: observăm că numărul lor este egal cu numărul tipurilor de cuvinte de lungime 3 formate cu elementele mulţimii $\mathbb{Z}_p$, care este dat de numărul combinărilor cu repetiţie

$$\overline{C_p^3} = C_{p+2}^3 = \frac{p(p+1)(p+2)}{6}.$$

Aflăm acum câte polinoame normate ireductibile de grad 2 peste $\mathbb{Z}_p$ există. Dacă $p = 2$, în $\mathbb{Z}_2[X]$ există patru polinoame de grad 2, dintre care singurul ireductibil este $X^2 + X + \widehat{1}$. Fie $p \geq 3$ prim; în $\mathbb{Z}_p[X]$ există p^2 polinoame de forma $X^2 + mX + n$, dintre care sunt reductibile cele pentru care $\Delta = m^2 - \widehat{4}n$ este pătratul unui element $a \in \mathbb{Z}_p$. Numărul acestor "pătrate perfecte" este $\dfrac{p+1}{2}$. Într-adevăr (v., de exemplu, [**2**], *Problema 12*, Spring 1977), $Q(p) = \{\widehat{0}\} \cup \{x \in \mathbb{Z}_p^* \mid x = a^2,\ a \in \mathbb{Z}_p^*\} = \{\widehat{0}\} \cup \operatorname{Im} f$, unde $f : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^*$, $f(a) = a^2$ este morfism de grupuri. Deoarece $p \geq 3$, ecuaţia $a^2 = \widehat{1}$ are exact două soluţii, $\widehat{1}$ şi $\widehat{p-1}$, deci $\operatorname{Ker} f = \{\widehat{1}, \widehat{p-1}\}$ şi cum $\operatorname{Im} f \cong \mathbb{Z}_p^* / \operatorname{Ker} f$, atunci $\operatorname{Card}(\operatorname{Im} f) = \dfrac{p-1}{2}$, prin urmare $\operatorname{Card} Q(p) = \dfrac{p-1}{2} + 1 = \dfrac{p+1}{2}$. Numărul perechilor $(m, n) \in \mathbb{Z}_p^2$ pentru care Δ este "pătrat perfect" este $\dfrac{p(p+1)}{2}$ (pentru fiecare valoare dată lui m, n ia $\dfrac{p+1}{2}$ valori, dat fiind faptul că $\widehat{4}$ este inversabil în

[1] Studentă, Universitatea "Ovidius", Constanţa

[2] Profesor, Liceul de Informatică "Gr. C. Moisil", Iaşi

$\mathbb{Z}_p$, p fiind impar). Prin urmare, numărul polinoamelor normate ireductibile de grad 2 este $p^2 - \dfrac{p(p+1)}{2} = \dfrac{p(p-1)}{2}$, relaţie adevărată şi pentru $p = 2$.

În final, numărul polinoamelor normate ireductibile de grad 3 din $\mathbb{Z}_p[X]$ este $p^3 - \dfrac{p(p+1)(p+2)}{6} - p \cdot \dfrac{p(p-1)}{2} = \dfrac{p(p-1)(p+1)}{3}$.

Evident, această metodă de numărare este sortită eşecului în cazul general al polinoamelor ireductibile de grad n din $\mathbb{Z}_p[X]$, dat fiind faptul că există nu numai cele două tipuri de polinoame reductibile din cazul $n = 3$. Modalitatea de rezolvare a problemei poate fi urmărită detaliat în [**1**], pp. 188-191 şi foloseşte rezultate profunde de teoria corpurilor; vom prezenta mai jos numai desfăşurarea ideilor.

Pentru un polinom normat ireductibil de gradul d din $\mathbb{Z}_p[X]$, are loc echivalenţa

$$f \mid X^{p^n} - X \Leftrightarrow d \mid n.$$

Se arată că polinomul $X^{p^n} - X$ nu are rădăcini multiple, deci în descompunerea sa ca produs de polinoame normate ireductibile nu există factori care să se repete. Conform echivalenţei anunţate, această descompunere cuprinde ca factori toate polinoamele normate ireductibile din $\mathbb{Z}_p[X]$ al căror grad divide pe n, de unde $p^n = \sum_{d|n} d \cdot \rho(d,p)$; am notat cu $\rho(k,p)$ numărul polinoamelor normate ireductibile de grad k din $\mathbb{Z}_p[X]$.

Aplicaţia $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$, $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^r$ dacă n este produs de r numere prime distincte şi $\mu(n) = 0$ dacă $n > 1$ şi n nu este liber de pătrate se numeşte *funcţia lui Möbius*. Această funcţie aritmetică are proprietatea că pentru orice aplicaţie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, avem că

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot F(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot F\left(\frac{n}{d}\right),$$

unde $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$; relaţia de mai sus poartă numele de *formula de inversiune a lui Möbius*. Aplicând această formulă funcţiei $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, $f(n) = n \cdot \rho(n,p)$, avem că $F(n) = p^n$ şi atunci

$$\rho(n,p) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) p^d = \frac{1}{n} \sum_{n|d} \mu(d)\, p^{n/d}.$$

Aşadar, numărul polinoamelor normate ireductibile de grad n din $\mathbb{Z}_p[X]$ este $\dfrac{1}{n} \sum_{n|d} \mu(d)\, p^{n/d}$. În cazul particular $n = 3$, avem

$$\rho(3,p) = \frac{1}{3} \sum_{d|3} \mu(d)\, p^{3/d} = \left[\frac{1}{3} \mu(1) \cdot p^3 + \mu(3) \cdot p\right] = \frac{1}{3}\left(p^3 - p\right) = \frac{p(p-1)(p+1)}{3},$$

adică regăsim rezultatul problemei [**3**].

Bibliografie

1. **T. Albu, I. D. Ion** - *Itinerar elementar în algebra superioară*, Ed. ALL, Bucureşti, 1997.
2. **C. Costara, D. Popa** - *Berkeley Preliminary Exams*, Ed. Ex Ponto, Constanţa, 2000.
3. **G. Popa** - *Problema 150*, G. M. (seria A), nr. 1/2003.

Funcţiile lui Smarandache – proprieţăţi elementare

Prezenta Notă este rezultatul unei selecţii din materialul trimis Redacţiei de către Minh Perez, Rehoboth, NM, SUA.

Funcţia Smarandache apare în literatura matematică cu mult timp în urmă (date istorice pot fi găsite în **J. Sándor** - *The Smarandache function introduced more than 80 years ago!* Octogon Mathematical Magazine, 9 (2001), no. 2, 920–921). **F. Smarandache** redescoperă şi cercetează această funcţie şi are meritul de a fi generat un curent de preocupări în privinţa acesteia.

Definim *funcţia Smarandache* $S(n)$ pe mulţimea $\mathbb{N}^*$ prin: $S(1) = 1$, iar pentru $n \geq 2$, $S(n)$ este cel mai mic număr natural pentru care $S(n)!$ se divide cu n.

În cele ce urmează, sunt adunate o serie de proprietăţi ale funcţiei Smarandache şi ale unor generalizări ale ei.

1. *Dacă p este prim, atunci $S(p) = p$. Reciproca este adevărată?* (**Anthony Begay**)

Soluţie. Dacă p este prim, atunci $r!$ nu este divizibil cu p pentru $r < p$. Pe de altă parte, $p!$ se divide cu p şi, cum este cel mai mic număr cu această proprietate, rezultă că $S(p) = p$. Reciproca nu este adevărată: lăsând la o parte cazul $S(1) = 1$, cu 1 neprim, avem contraexemplul $S(4) = 4$. Pot fi găsite alte contraexemple?

2. *Dacă n este liber de pătrate, iar p este cel mai mare factor prim din descompunerea sa, atunci $S(n) = p$.* (**Leonardo Motta**)

Soluţie. Fie $n = a \cdot b \cdot \ldots \cdot p$ descompunerea în factori primi a lui n, unde $a < b < \cdots < p$. Atunci $p!$ conţine în scrierea sa toţi divizorii primi ai lui n, deci $S(n) \leq p$. Pentru $r < p$, observăm că $r!$ nu se divide cu p, deci $S(n) \geq p$. Rămâne că $S(n) = p$, ceea ce doream.

În particular, $S(n) = p = \dfrac{n}{q} \leq \dfrac{n}{2}$ (deoarece în scrierea $n = p \cdot q$, avem $q \geq 2$) (**T. Yau**)

3. *Dacă p este prim, atunci $S(p^p) = p^2$.* (**Alecu Stuparu**)

Soluţie. Deoarece $S(p^p)$ trebuie să se dividă cu p, iar p este prim, rezultă că $S(p^p)$ trebuie să fie un multiplu nenul al lui p, fie acesta k_p. Mai mult, fiindcă $S(p^p)$ se divide cu p^p, trebuie să avem $k_p \geq p$ (se vede că $p(p-1)!$ se divide cu p^{p-1}, dar nu şi cu p^p). Atunci p^2 este cel mai mic număr al cărui factorial se divide cu p^p, de unde concluzia.

Asemănător pot fi definite *a doua şi a treia funcţie Smarandache*: $S_2(n)$ este cel mai mic număr natural pentru care $S_2(n)!!$ se divide cu n (unde $m!!$ este produsul numerelor nenule cel mult egale cu m, de aceeaşi paritate ca şi m); $S_3(n)$ este cel mai mic număr natural pentru care $S_3(n)!!!$ se divide cu n (unde $m!!!$ este produsul numerelor nenule cel mult egale cu m, care dau acelaşi rest ca şi m la împărţirea cu 3).

4. *Dacă $n \geq 3$ este un număr par liber de pătrate, iar p este cel mai mare factor prim din descompunerea sa, atunci $S_2(n) = 2p$.* (**Gilbert Johnson**)

Soluţie. Fie $n = 2 \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot p$, cu $2 < a < b < \cdots < p$ numere prime. Dacă $S_2(n) = 2p - k$, unde $1 \leq k < 2p$, atunci $(2p-k)!!$ nu se divide prin p. Evident că

$(2p)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2a) \cdot \ldots \cdot (2b) \cdot \ldots \cdot (2p)$ se divide la n şi, cum este cel mai mic număr cu această proprietate, urmează concluzia.

5. *Fie p număr prim impar; să se determine $S_2\left(p^{k+2}\right)$, unde $p = 2k+1$.* (**Ivan Godunov**)

Soluţie. Ca în rezolvarea problemei **3**, se arată că $S_2\left(p^{k+2}\right) = p^2$.

6. *Dacă n este multiplu nenul al lui 3, atunci $S_3(n)$ este tot multiplu de 3.* (**K. L. Ramsharan**)

Soluţie. Fie $m = S_3(n)$; dacă m nu ar fi multiplu de 3, atunci $m!!! = m(m-3) \cdot \cdot (m-6) \ldots$ nu s-ar divide nici el cu 3 şi atunci $m!!!$ nu se divide cu n. Rămâne că $S_3(n)$ este multiplu de 3.

7. *Să se rezolve ecuaţia diofantică $S_2(x) = p$, unde p este un număr prim.* (**Gilbert Johnson**)

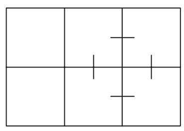
Soluţie. Pentru p prim fixat, vom determina numărul de numere naturale x astfel încât $S_2(x) = p$. Avem că $p!!$ se divide cu x, iar p este cel mai mic întreg cu această proprietate. Cum p este prim, x trebuie să fie multiplu de p.

a) Dacă $p = 2$, atunci $x = 2$.

b) Dacă $p > 2$, atunci x este produsul dintre p şi o combinaţie de 0, 1 sau mai mulţi dintre factorii 3, 5, ... , $p-2$. Notând $k = \dfrac{p-3}{2}$, avem $C_k^0 = 1$ soluţie cu un singur factor ($x = p$), C_k^1 soluţii cu doi factori ($x = p \cdot 3, p \cdot 5, \ldots, p \cdot (p-2)$), C_k^2 soluţii cu trei factori etc. Numărul total de soluţii este cel mult egal cu $C_k^0 + C_k^1 + \cdots + C_k^k = 2^k$.

Recreaţii ... matematice

Soluţiile problemelor enunţate la paginile 15 şi 26.



1. Înlăturând segmentele marcate se obţine o figură formată din trei pătrate.

2. Cu o tăietură făcută în veriga a treia obţinem trei bucăţi de lanţ formate din o verigă, două verigi şi patru verigi. În prima zi călătorul plateşte o verigă; a doua zi dă bucata formată din două verigi şi ia înapoi o verigă; a treia zi dă hangiului veriga izolată; a patra zi dă bucata din patru verigi şi primeşte ca rest celelalte trei verigi de la hangiu; a cincea zi dă iarăşi veriga izolată; a şasea zi dă bucata din două verigi şi ia veriga înapoi; în sfârşit, în a şaptea zi dă hangiului şi veriga rămasă.

Aşadar, este suficientă o singură în lanţ pentru a putea fi făcută plata convenită zilnic.

3. Iată interpretarea corectă a calculului efectuat: dacă există o soluţie în $\mathbb{R}$ a ecuaţiei $x^2 - x + 1 = 0$, aceasta poate fi -1. Egalitatea $3 = 0$, obţinută punând $x = -1$ în ecuaţie, arată că -1 nu este soluţie şi, deci, ecuaţia nu are soluţii în $\mathbb{R}$.

MATEMATICA ÎN CLASELE PRIMARE

În legătură cu o problemă de aritmetică propusă la BAC'99.

Romanţa GHIŢĂ şi Ioan GHIŢĂ[1]

În august 1999, la bacalaureat, profilul pedagogic, a fost propusă problema:

Într-un depozit erau 185 *t cărbuni, iar în altul* 237 *t. Din primul depozit se iau câte* 15 *t cărbuni pe zi, iar din al doilea câte* 18 *t pe zi. După câte zile a rămas în depozitul al doilea de* $1\frac{1}{2}$ *ori mai mult cărbune dacât în primul?*

Soluţie ([1]). Dacă în cel de-al doilea depozit ar fi $\frac{2}{3}$ din 237 t (adică 158 t) şi din el s-ar scoate zilnic $\frac{2}{3}$ din 18 t (adică 12 t), după numărul de zile cerut cantităţile ar fi egale. Diferenţa de $185\,\mathrm{t} - 158\,\mathrm{t} = 27\,\mathrm{t}$ este anulată de diferenţa de 3 t dintre cantităţile scoase zilnic în 9 zile.

Considerăm că această soluţie necesită unele clarificări. Întâi, $\frac{2}{3}$ reprezintă inversul lui $1\frac{1}{2}$. Apoi, diferenţa de 3 t nu este cea dintre 18 şi 15, ci dintre 15 şi 12; coincidenţa între diferenţele de tone scoase zilnic este una nefericită.

Practic, dintr-o cantitate x aflată în depozitul I se scade zilnic câte a, iar dintr-o cantitate y aflată în depozitul II se scade zilnic b ($x < y$, $a < b$). Ne interesează numărul p de zile după care în depozitul II rămâne o cantitate de $\frac{m}{n} > 1$ ori mai mare decât cea rămasă în depozitul I ($a > \frac{n}{m}b$, $x > \frac{n}{m}y$).

Dacă în depozitul II ar fi $\frac{n}{m}y$ şi s-ar scoate zilnic $\frac{n}{m}b$, după cele p zile ar rămâne cantitatea $C = \frac{n}{m}y - p \cdot \frac{n}{m}b = \frac{n}{m}(y - pb)$, egală cu cea rămasă în primul depozit (deoarece $y - pb = \frac{m}{n}(x - pa)$ din ipoteza problemei). Diferenţa $y - \frac{n}{my}$ este anulată de diferenţa $a - \frac{n}{m}b$ în $\left(x - \frac{n}{m}y\right) : \left(a - \frac{n}{m}b\right)$ zile.

Putem formula probleme asemănătoare, cu condiţia de a alege datele în aşa fel încât să fim conduşi la operaţii cu numere naturale.

Probleme propuse.

1. Într-o tabără şcolară sunt 792 elevi, iar în alta 531. Din fiecare tabără pleacă din 5 în 5 minute grupuri de câte 36 şi respectiv 23 elevi în drumeţii. După câte minute în prima tabără se vor afla de 9/7 ori mai mulţi elevi decât într-a doua?

2. În două coşuri se găsesc 405 şi respectiv 800 bomboane. În fiecare zi se vând câte 15, respectiv 32 bomboane. După câte zile în coşul al doilea vor fi cu 60% mai multe bomboane decât în primul?

Bibliografie

1. Gh. Andrei şi colab. - *Admiterea 1999*, Ed. GIL, Zalău, 1999.

[1] Profesori, Col. Naţ. "I. M. Clain", Blaj

Concursul "Recreaţii Matematice"

Ediţia a III-a, Iaşi, 28 August 2003

Clasa a VII-a

1. Rezolvaţi în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuaţia $\dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1} = 1$.

Alexandru Negrescu, Botoşani (RecMat-2/2003)

2. Un triunghi are două mediane perpendiculare, iar suma lungimilor lor constantă. Să se determine maximul ariei triunghiului.

Mihai Gavriluţ, Roman

3. Fie XOY un unghi oarecare şi P un punct în interiorul lui. Se consideră punctele $A, B \in OX$ cu $A \in (OB)$ şi $C, D \in OY$ cu $C \in (OD)$ astfel încât triunghiurile PAB şi PCD să fie echilaterale. Arătaţi că, dacă dreptele OP, AD, BC sunt concurente, atunci P se află pe bisectoarea unghiului XOY.

Temistocle Bîrsan, Iaşi (RecMat-1/2003)

Clasa a VIII-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat. Arătaţi că există o infinitate de numere $x, y, z \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$.

Lucian Tuţescu, Craiova (RecMat-1/2003)

2. Găsiţi întregii pozitivi n, x_1, x_2, $\ldots$, x_n astfel încât $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2003$ şi produsul $x_1 x_2 \ldots x_n$ să fie maxim.

Agnes Constantinescu, Harghita

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Cubul este pătat cu cafea pe mai puţin de jumătate din suprafaţa lui totală. Arătaţi că există două puncte pe suprafaţa cubului coliniare cu centrul cubului care nu sunt pătate cu cafea.

Valerica Benţa, Iaşi şi Mugur Roşca, Craiova

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\dfrac{1}{2\sqrt{[x]^3}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{[x+1]^3 \cdot [x]}} = \dfrac{2}{[x] \cdot [x+2]}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

Daniel Jinga, Piteşti (RecMat-1/2003)

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface

$$\left(n^2 + 3n + 3\right) f(n+2) - 2\left(n^2 + n - 1\right) f(n+1) + \left(n^2 - n + 1\right) f(n) = 0,$$

pentru orice n natural. Ştiind că $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$, calculaţi $f(2003)$.

Andrei Nedelcu, Iaşi

3. Fie pătratul $ABCD$, E mijlocul lui (AB), $M \in (CD)$, $N \in (AD)$ astfel încât $BM \parallel EN$. Să se arate că MN este tangenta cercului $\mathcal{C}(S, r)$ înscris în pătrat.

Nicu Miron, Iaşi

Clasa a X-a

1. Fie $a, b \in (0,1) \cup (1, \infty)$ şi funcţia injectivă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x) + f(b^x)$ este constantă. Să se arate că $ab = 1$ şi că există funcţii f care satisfac ipotezele problemei.

Dan Popescu, Suceava (RecMat-1/2003)

2. Să se afle locul geometric al imaginilor numărului complex $z = \dfrac{\sin\alpha + i}{\sin\alpha - i}$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Mihai Gavriluţ, Roman

3. Un triunghi de arie S se proiectează pe trei plane perpendiculare două câte două. Dacă ariile proiecţiilor sunt S_1, S_2, respectiv S_3, să se demonstreze că $S \leq S_1 + S_2 + S_3 < S\sqrt{3}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a XI-a

1. Fie D, M două matrice nesingulare de ordin n, D diagonală, iar M triunghiulară. Dacă $D = {}^tMDM$, să se arate că M este tot o matrice diagonală, având ± 1 pe diagonala principală.

Adrian Corduneanu, Iaşi (RecMat-1/2003)

2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere naturale mai mari ca 1. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - y_n}{y_n} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{x_n} - p_{y_n}}{p_{y_n}} = 0$, unde p_n este al n-lea număr prim.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

3. În tetraedrul $ABCD$ se consideră notaţia $(ab) = m\left[\angle\left(ABC; ABD\right)\right]$, corespunzătoare muchiei AB şi analoagele, corespunzătoare la celelalte muchii. Arătaţi că

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos(cd) & \cos(bd) & \cos(bc) \\ \cos(cd) & -1 & \cos(ad) & \cos(ac) \\ \cos(bd) & \cos(ad) & -1 & \cos(ab) \\ \cos(bc) & \cos(ac) & \cos(ab) & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Silviu Boga, Suceava

4. O pată de ulei curge pe un râu. La un moment dat ea intersectează umbra unui fir de telegraf. Să se demonstreze că există un moment în care umbra firului împarte pata de ulei în două porţiuni de aceeaşi arie.

Vlad Martinuşi, Iaşi

Clasa a IX-a (BARAJ)

1. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$xf\left(x^3 + x + 1\right) + f\left(-x^3 + 3x^2 - 4x + 3\right) = x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Silviu Boga, Suceava

2. Se dau mulţimile: $A = \left\{x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{x^3 + x \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$, $C = \left\{x^4 + x^3 + x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$, $D = \left\{2x^4 \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$. Determinaţi mulţimile $A \cap C$, $B \cap D$.

Andrei Nedelcu, Iaşi (RecMat-2/2002)

Concursul interjudeţean "Octav Onicescu"[1]
Ediţia a VII-a, 31 oct. - 2 nov. 2003, Botoşani

Această ediţie a **Concursului de matematică "Octav Onicescu"** a cunoscut o participare numeroasă şi entuziastă, antrenând elevi din 5 judeţe: *Botoşani*, *Iaşi*, *Suceava*, *Vaslui* şi *Vrancea*.

Ceea ce particularizează în mod deosebit acest concurs este faptul că se propun spre rezolvare aceleaşi subiecte pentru toţi participanţii de la clasa a IX-a până la clasa a XII-a. Subiectele propuse nu sunt axate pe materia studiată de fiecare elev la nivelul său de studiu, ci încearcă să pună în valoare abilităţile matematice pure ale concurenţilor.

Deschiderea festivă a concursului şi premierea s-au desfăşurat în Aula Magna a C. N. "A. T. Laurian" din Botoşani, iar alături de elevi şi profesori au participat şi autorităţile locale. De partea organizatorică s-a ocupat **I. S. J. Botoşani** şi **C. N. "A. T. Laurian"**.

Sarcina elaborării subiectului de concurs a revenit, ca în fiecare an, domnilor profesori **Adrian Boţan** şi **Adrian Panaete**, iar misiunea corectării lucrărilor scrise, membrilor catedrei de matematică de la C. N. "A. T. Laurian". Preşedintele comisiei a fost prof. univ. dr. **Eugen Popa** de la Facultatea de Matematică, Universitatea "Al. I. Cuza" din Iaşi.

Publicăm în continuare problemele propuse concurenţilor şi lista premiaţilor:

1. Fie a_1, a_2, a_3, ... , a_{2003} numerele 1, 2, 3, ... , 2003 în altă ordine. Arătaţi că măcar două din numerele $|a_1 - 1|$, $|a_2 - 2|$, ... , $|a_{2003} - 2003|$ sunt egale. (20p)

2. De pe o tablă de şah 7×7 scot un pătrat; arătaţi că pătratele rămase:
a) nu pot fi acoperite cu 24 de dominouri 1×2 dacă pătratul scos e A2;
b) pot fi acoperite cu 24 de dominouri dacă pătratul scos e D4 şi indicaţi o acoperire cu număr minim de dominouri orizontale (justificare). (20p)

3. Dacă n este natural, găsiţi restul împărţirii lui 10^n prin 999 şi arătaţi că un număr natural divizibil cu 999 are măcar 3 cifre nenule. Câte numere cu cel mult 16 cifre fiecare au fix 3 cifre nenule şi se divid cu 999? (30p)

4. Câte pătrate ale unei table de şah 340×121 sunt tăiate în interior de una din diagonalele tablei? Dar pentru o tablă 340×120? (30p)

5. Ali Baba şi cei 40 de hoţi stau în cerc în jurul focului şi vor să împartă în mod egal 4100 de galbeni care iniţial se află împărţiţi la întâmplare la câţiva dintre ei (posibil la unul singur). Ali Baba bate din palme şi la comanda lui fiecare din cei 41 dă un galben vecinului din stânga sa, dacă acesta are mai puţin decât el (dacă vecinul are egal sau mai mult nu primeşte nimic!). Dacă nu au realizat egalitatea, Ali Baba bate din palme din nou etc. Justificaţi că după un timp sumele se egalează (toţi 100 de galbeni). (30p)

Premiaţii sunt: *premiul I* - **Chirilă Cezar** (C. N. "M. Eminescu", Botoşani), *premiul II* - **Istrate Carmen Maria** (C. N. "Unirea", Focşani), *premiul III* - **Pachiţariu Marius** (Colegiul Naţional Iaşi). Au fost acordate 21 menţiuni.

[1] Selecţiuni din materialul trimis redacţiei de către elevul **Alexandru Negrescu** şi prof. **Liliana Tomiţă**, C. N. "A. T. Laurian", Botoşani

Concurs de admitere 2003, Iaşi

Facultatea de Informatică, Universitatea "Al. I. Cuza"

Algebră

I. 1. Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este inelul matricelor pătratice de ordin 3 cu elemente reale, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 = I_3$ şi că are loc relaţia $(A - I_3)\left(A^2 + A + I_3\right) = 0$.

2. Fie $\sigma \in S_3$ o permutare din grupul simetric de grad 3, astfel încât $\sigma^2 = e$ (e notează permutarea identică). Demonstraţi că există $k \in \{1, 2, 3\}$ astfel încât $\sigma(k) = k$.

3. Demonstraţi că polinomul $P = X^3 + \frac{1}{2}X + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

II. 1. Fie G un grup cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că în orice coloană a tablei operaţiei lui G apar n elemente distincte.

2. Fie $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ inelul numerelor întregi. Determinaţi toate morfismele de inele $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

3. Fie $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ corpul numerelor complexe. Să se arate că $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \overline{z}$ este izomorfism de corpuri ($\overline{z}$ notează conjugatul numărului complex z).

Analiză matematică

I. 1. Fie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că şirul $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi mărginită. Demonstraţi că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Să se calculeze $f^{(n)}(0)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar $f^{(n)}$ notează derivata de ordin n a funcţiei f.

II. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

a) Reprezentaţi grafic funcţia $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f_3(x) - f_2(x)}{f_1(x)}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei g.

b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia $f_n(x) = 0$ are o unică soluţie reală, u_n, în intervalul $[0, 1]$.

c) Demonstraţi că şirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

d) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Fac. de Electronică şi Telecomunicaţii, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"

1. Rangul termenului din dezvoltarea $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{3} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ care îl conţine pe a^4 este

a) 8 *b*) 6 *c*) 3 *d*) 4 *e*) 9

2. Suma $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(2^k + 3^k\right)/6^k$ este egală cu

a) $1 - \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{3^n}$ *b*) $2 - \dfrac{1}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}}$ *c*) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2 \cdot 3^n}$ *d*) $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}$
e) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2 \cdot 3^n}$

3. Se consideră inecuaţia $(m+1)e^{-2x}+2(m+1)e^{-x}+m>0,\ x\in\mathbb{R}$, unde $m\in\mathbb{R}$ este un parametru. Valorile lui m pentru care inecuaţia este verificată $\forall x\in\mathbb{R}$ sunt

a) $(-\infty,0]$ *b)* $[0,+\infty)$ *c)* $[-1,0]$ *d)* $(0,1)$ *e)* $(-\infty,-1)$

4. Mulţimea tuturor valorilor $m\in\mathbb{R}$ astfel ca sistemul

$$\begin{cases} mx+y-z=0 \\ x+(m+1)y+z=2+m-m^2 \\ x-2y-mz=-2+3m-m^2 \end{cases}$$

să fie compatibil este

a) $\{2\}$ *b)* $\{-2,-1,2\}$ *c)* $\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ *d)* $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *e)* $\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$

5. Numărul complex z, care satisface $|z|+z=\dfrac{10}{2-i}$ este

a) $2+\dfrac{3}{2}i$ *b)* $-2+5i$ *c)* $\dfrac{3}{2}-2i$ *d)* $\dfrac{1}{2}+3i$ *e)* $\dfrac{3}{2}+2i$

6. Să se determine m astfel ca $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{(1-\cos x)^m}$ să fie finit şi diferit de zero. Să se precizeze şi valoarea lui l.

a) $m=\dfrac{3}{4},l=\dfrac{2}{3}$ *b)* $m=3,l=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ *c)* $m=\dfrac{3}{2},l=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ *d)* $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2},l=\dfrac{2}{3}$

e) $m=2,l=\dfrac{1}{6}$

7. Mulţimea valorilor funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^2}$ este

a) $\left(-\infty,1/e^2\right]$ *b)* $(0,\infty)$ *c)* $\mathbb{R}$ *d)* $(0,\sqrt{e})$ *e)* $\left[1/e^2,\infty\right)$

8. Dacă $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^n+1=0$, atunci valoarea sumei $\dfrac{1}{1-x_1}+\dfrac{1}{1-x_2}+\cdots+\dfrac{1}{1-x_n}$ este

a) $n/2$ *b)* n^2 *c)* n *d)* $n(n+1)$ *e)* $-n$

9. Să se calculeze $I=\displaystyle\int_{-1}^{2}\max\left(x-\frac{x^3}{3},\operatorname{arctg}x\right)dx$.

a) $\operatorname{arctg}2+\ln 3$ *b)* $-\dfrac{5}{12}+2\operatorname{arctg}2-\dfrac{1}{2}\ln 5$ *c)* $\dfrac{5}{12}-2\operatorname{arctg}3$

d) $\dfrac{5}{11}-2\operatorname{arctg}2+\ln 3$ *e)* $-\dfrac{5}{12}+\operatorname{arctg}2$

10. Să se afle soluţia ecuaţiei $\arcsin\dfrac{1}{x-1}+\arcsin\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{\pi}{2}$.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ *b)* $-\sqrt{3+\sqrt{5}}$ *c)* $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ *d)* $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$ *e)* $\sqrt{1+\sqrt{5}}$

Fac. de Automatică şi Calculatoare, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"

1. Să se determine parametrul real m astfel încât ecuaţia $x^2+2mx+(m+4)=0$ să admită rădăcinile reale x_1 şi x_2 verificând $x_1<1<x_2$.

a) $m\in\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2},\infty\right)$ *b)* $m\in\left(-\infty,-\dfrac{5}{3}\right)$ *c)* $m\in\left(-\dfrac{3}{5},\infty\right)$

d) $m\in\emptyset$ *e)* $m\in\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2},-\dfrac{3}{5}\right)$

2. Aflaţi numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomială $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[5]{3}\right)^{23}$.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4 *e*) 5

3. Fie sistemul

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+ay+2az=b \\ a^2x+a^2y+2a^2z=b^2 \end{cases} \qquad a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0.$$

Care din următoarele afirmaţii este falsă?

a) Dacă $a=0$, sistemul este incompatibil *b*) Dacă $a=b$, sistemul este compatibil nedeterminat *c*) Există $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$ astfel încât sistemul are soluţie unică *d*) Dacă $a\neq 0$ şi $a\neq b$, sistemul este incompatibil *e*) Dacă $a=1$ şi $b\neq 1$, atunci sistemul este incompatibil

4. Fie $M=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ şi legea de compoziţie internă pe M dată prin $x\circ y=3ax+by+xy$, $\forall x,y\in M$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$. Să se afle a şi b astfel încât $(M,\circ)$ să fie grup abelian şi să se precizeze simetricul x' al unui element oarecare $x\in M$.

a) $a=\dfrac{1}{3}, b=1, x'=\dfrac{-x}{x+1}$ *b*) $a=1, b=3, x'=\dfrac{x}{x+1}$ *c*) $a=\dfrac{1}{3}, b=1, x'=\dfrac{x}{x+1}$ *d*) $a=1, b=\dfrac{1}{3}, x'=\dfrac{-x}{x+1}$ *e*) $a=\dfrac{1}{3}, b=1, x'=\dfrac{1}{x+1}$

5. Se dă şirul definit prin relaţia $x_{n+1}=x_n+(-a)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x_1=0$, unde $0<a<1$. Care din următoarele afirmaţii este adevărată:

a) şirul este strict crescător cu limita $+\infty$ *b*) şirul este strict descrescător cu limita $-\infty$ *c*) şirul nu este monoton, dar are limita $\dfrac{-a}{a+1}$ *d*) şirul este strict crescător cu limita 1 *e*) şirul nu este monoton, deci nu are limită

6. Se dă $f:\mathbb{R}\backslash\{0,2,4,6\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x-4}+\dfrac{5}{x-6}+\pi$. Numărul punctelor în care graficul funcţiei intersectează axa Ox este

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3 *e*) 4

7. Fie ecuaţia diferenţială $y'+\dfrac{1}{x}y=6x$, $x>0$. Să se precizeze intervalul pentru care $y(x)>0$, unde $y(x)$ este soluţia care satisface condiţia $y(1)=1$.

a) $x\in(1,2)$ *b*) $x\in\left(\sqrt[3]{2},\infty\right)$ *c*) $x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\infty\right)$ *d*) $x\in(2,3)$ *e*) $x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

8. Se dau triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ ce au centrele de greutate G şi G'. Atunci vectorul $\overrightarrow{GG'}$ este egal cu

a) $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})$ *b*) $\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})$ *c*) $\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'A'})$ *d*) $\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CB'})$ *e*) $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'})$

9. Să se determine mulţimea punctelor din planul complex care sunt imaginile numerelor z care verifică ecuaţia $z^2-z|z|+|z|^2=0$.

a) două drepte perpendiculare *b*) un cerc cu centrul în origine *c*) două drepte paralele *d*) două semidrepte *e*) două cercuri concentrice

10. Numărul soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{\pi}{4}$ este

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4 *e*) o infinitate

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 2003

Clasele primare

P.44. *Un vecin al unui vecin al numărului* 81 *este egal cu un vecin al unui vecin al numărului* 77*. Despre ce număr este vorba?*

(Clasa I) **Mihaela Rusu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Acest număr trebuie să fie mai mare ca 77 şi mai mic decât 81. Numărul se află în secvenţa 77□□□81. Este vorba despre numărul 79.

P.45. *Adunând trei numere naturale a, b, c obţinem suma* 62*. Primul număr este mai mare decât al treilea şi împreună au suma* 12*. Care sunt cele trei numere?*

(Clasa a II-a) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Numărul $b = 62 - 12 = 50$. Perechea (a, c) poate fi: $(12, 0)$; $(11, 1)$; $(10, 2)$; $(9, 3)$; $(8, 4)$ sau $(7, 5)$. Tripletul (a, b, c) poate lua valorile: $(12, 50, 0)$; $(11, 50, 1)$; $(10, 50, 2)$; $(9, 50, 3)$; $(8, 50, 4)$ sau $(7, 50, 5)$.

P.46. *Mihai, Dan şi Petru practică fiecare un alt fel de sport şi anume: tenis, fotbal sau volei. Mihai şi voleibalistul locuiesc în acelaşi bloc. Cel care joacă volei şi cel care joacă fotbal l-au urmărit pe Petru la un meci. Ce sport practică fiecare?*

(Clasa a II-a) **Adina Dohotaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din textul problemei se deduce că Petru nu joacă volei sau fotbal, deci el joacă tenis. Mihai şi voleibalistul locuiesc în acelaşi bloc. Aceasta înseamnă că Mihai nu joacă volei. Soluţia problemei este: Petru joacă tenis, Mihai joacă fotbal şi Dan joacă volei.

P.47. *Diferenţa a două numere este* 48*. Această diferenţă este cu* 22 *mai mare decât jumătatea unuia dintre ele. Determinaţi numerele.*

(Clasa a III-a) **Înv. Rodica Rotaru, Bârlad**

Soluţie. Fie $a - b = 48$. Avem două cazuri: 1) $48 = b : 2 + 22$ de unde obţinem $b = 52$ şi $a = 100$. 2) $48 = a : 2 + 22$ de unde obţinem $a = 52$ şi $b = 4$.

P.48. *Un agricultor împarte un teren în trei parcele. În fiecare an, fiecare parcelă este cultivată numai cu una din culturile: grâu, porumb sau legume. Începând cu anul* 2003*, agricultorul se hotărăşte ca pe fiecare parcelă să fie altă cultură în trei ani consecutivi.*

a) Care este primul an după 2003 *în care se repetă culturile pe cele trei parcele?*

b) Se poate preciza care este ordinea culturilor pe cele trei parcele în anul 2019*?*

(Clasa a III-a) **Andreea Surugiu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Presupunem că în anul 2003 avem ordinea (grâu, legume, porumb). În anul 2004 putem avea (legume, porumb, grâu) sau (porumb, grâu, legume). În anul 2005 putem avea (porumb, grâu, legume) sau (legume, porumb, grâu). În 2006 avem din nou ordinea (grâu, legume, porumb). Răspunsul la *a*) este anul 2006. *b*) Ordinea culturilor se mai repetă în 2009, 2012, 2015, 2018. Nu putem preciza ordinea culturilor în anul 2019.

P.49. *La un moment dat, cerând unei persoane anul naşterii, aceasta răspunde: "anul acesta împlinesc* 25 *ani, iar dacă aş scrie toate numerele începând cu* 1 *şi terminând cu anul naşterii şi apoi toate numerele începând cu* 1 *şi terminând cu* *anul în care ne aflăm mi-ar trebui* 13710 *cifre. În ce an ne aflam când am pus întrebarea?*

(*Clasa a III-a*) **Prof. Cătălin - Cristian Budeanu, Iaşi**

Soluţie. Pentru scrierea numerelor de la $1 - 999$ sunt necesare 2889 cifre. Rezultă că anul naşterii nu poate fi format din trei cifre. Într-adevăr, $2 \cdot 2889 + 25 \cdot n < 13710$, $n \leq 4$. Anul naşterii este de forma $\overline{abcd}$. Fie x numărul cifrelor pentru scrierea numerelor de la 1 la $\overline{abcd}$. Transpunând în ecuaţie ceea ce a spus persoana, obţinem: $x + (x + 4 \cdot 25) = 13710$, cu soluţia $x = 6805$. Pentru scrierea numerelor de la 1000 la $\overline{abcd}$ sunt necesare $6805 - 2889 = 3916$ cifre, ceea ce înseamnă că de la 100 la $\overline{abcd}$ sunt $3916 : 4 = 979$ numere. Înseamnă că anul $\overline{abcd}$ este 1978. Întrebarea a fost pusă în anul $1978 + 25 = 2003$.

P.50. *a) Câte numere trebuie adăugate şirului* $1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots, 97, 98$ *pentru a obţine toate numerele de la* 1 *la* 98*?*

b) Efectuaţi $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 97 + 98 - 2 \cdot (3 + 4 + 5 + \cdots + 34)$.

(*Clasa a IV-a*) **Georgiana Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. *a*) Lipsesc numerele: $3, 6, 9, \ldots 96$ care pot fi scrise: $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 3, \ldots$, $3 \cdot 32$. Se observă că lipsesc 32 numere.

b) Expresia de calculat se poate scrie:

$$1 + 2 + (4 - 3) + (5 - 3) + (7 - 4) + (8 - 4) + \cdots + (97 - 34) + (98 - 34) =$$
$$= 1 + 2 + (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 63 + 64) = 3 + 64 \cdot 65 : 2 = 3 + 2080 = 2083.$$

P.51. *Produsul a două numere naturale este* 913 368*. Unul din numere are cifra unităţilor şi cifra zecilor mai mare ca* 2 *şi mai mică decât* 8*. Dacă la acest număr mărim cifra zecilor cu* 2 *şi micşorăm cifra unităţilor cu* 1*, obţinem un produs egal cu* 951 425*. Aflaţi cele două numere.*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Elena Zărnescu, Iaşi**

Soluţie. Fie a şi b numerele căutate. Obţinem

$$(a + 20 - 1) \cdot b = 951425 \Leftrightarrow ab + 19b = 951425 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 913368 + 19b = 951425 \Leftrightarrow b = 2003 \Rightarrow a = 913368 : 2003 = 456.$$

P.52. *În trei cutii sunt* 212 *bile. Din prima cutie se scoate un număr de bile, din a doua de* 2 *ori mai mult şi încă două bile, din a treia se scoate cât triplul numărului de bile scos din a doua cutie. În fiecare cutie rămâne un număr de bile egal cu numărul total al bilelor scos din cele trei cutii la un loc. Câte bile au fost în fiecare cutie?*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Notăm cu p numărul bilelor scos din prima cutie. Rezultă că în fiecare cutie rămân $9p + 8$ bile. Deducem că în toate cutiile au fost $36p + 32$ bile. Aşadar, $36p + 32 = 212$, de unde $p = 5$. În cele trei cutii au fost 58, 65, respectiv 89 bile.

P.53. *Efectuând o singură cântărire, să se ia* 475 *g dintr-un kilogram de zahăr utilizând două greutăţi, una de* 200 *g şi cealaltă de* 150 *g.*

(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Utilizăm o balanţă cu braţe egale. Distribuim kilogramul de zahăr şi câte una din cele două greutăţi, pe cele două talere, până realizăm poziţia de echilibru. Pe fiecare taler vom avea 675 g. Masa căutată este pe talerul în care se află greutatea de 200 g: 675 g − 200 g = 475 g zahăr.

Clasa a V-a

V.36. *Fie n un număr impar, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ numere care împărţite la n dau câturi distincte şi resturi distincte. Arătaţi că valoarea minimă a sumei $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ este multiplu de 12.*

Dragoş Ungureanu, elev, Iaşi

Soluţie. Conform ipotezei, avem: $a_1 = nc_1 + r_1$, $a_2 = nc_2 + r_2, \ldots, a_n = nc_n + r_n$, unde $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Astfel, suma
$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) + \frac{n(n-1)}{2}$$
este minimă dacă $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, deci
$$S_{\min} = n\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}.$$
Cum n este impar, rezultă că $(n-1)(n+1) \vdots 8$, deci $S_{\min} \vdots 4$. Pe de altă parte, deoarece n, $n-1$, $n+1$ sunt numere consecutive, rezultă că $S_{\min} \vdots 3$. Prin urmare, $S_{\min}$ este multiplu de 12.

V.37. *Comparaţi fracţiile $a = \dfrac{333331}{333334}$ şi $b = \dfrac{222221}{222223}$.*

Maria Cojocaru, Iaşi

Soluţie. Avem $\dfrac{1}{a} = 1 + \dfrac{3}{333331}$ şi $\dfrac{1}{b} = 1 + \dfrac{2}{222221}$. Cum $3 \cdot 222221 > 2 \cdot 333331$, rezultă că $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$, deci $b > a$.

V.38. *Să se arate că $2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e \neq 2003$, $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$.*

Irina Ispas, studentă, Iaşi

Soluţie. Presupunem că există cinci numere naturale $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ astfel încât
$$2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e = 2003. \tag{1}$$
Dacă $a \neq 0$, atunci termenul din stânga al egalităţii (1) este par şi atunci avem o contradicţie. Pentru $a = 0$, relaţia (1) devine: $2^b + 2^c + 2^d + 2^e = 2002$. Deoarece $2^{10} = 1024$, rezultă că numai e ar putea avea, eventual, valoarea 10.

Dacă $e = 10$, atunci $2^b + 2^c + 2^d = 978$. În acest caz, dacă $b, c, d \leq 8$, atunci $2^b + 2^c + 2^d \leq 3 \cdot 256 < 978$. Aşadar, $d = 9$ şi $2^b + 2^c = 466$, ceea ce nu este posibil.

Dacă toate numerele b, c, d, e sunt strict mai mici ca 10, se observă că cel mult trei numere pot fi 9 (altfel avem $2^b + 2^c + 2^d + 2^e \geq 4 \cdot 512 > 2002$) şi cel puţin trei trebuie să fie 9 (deoarece, în caz contrar, avem $2^b + 2^c + 2^d + 2^e < 2^9 + 2^9 + 2^8 + 2^8 < < 2002$). Prin urmare, $c = d = e = 9$ şi atunci $2^b = 2002 - 3 \cdot 2^9 = 476$, absurd.

V.39. *Să se determine numerele prime $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ astfel încât numerele $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, $p_3 - p_2$, $p_4 - p_3$ să fie, de asemenea, prime.*

Petru Minuţ, Iaşi

Soluţie. Deoarece $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ este un număr prim mai mare ca 2, rezultă că el este impar şi atunci unul dintre numerele p_1, p_2, p_3, p_4 trebuie să fie par, deci $p_1 = 2$. Cum p_2, p_3 şi p_4 sunt impare, înseamnă că $p_3 - p_2$ şi $p_4 - p_3$ sunt pare şi având în vedere că sunt prime, rezultă că $p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = 2$. De aici, deducem că $p_3 = p_2 + 2$ şi $p_4 = p_2 + 4$. Se observă că $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ şi $p_4 = 7$ este o soluţie a problemei ($2 + 3 + 5 + 7 = 17$ este număr prim). Dacă $p_2 > 3$, atunci $p_2 = 3k + 1$ sau $p_2 = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}^*$. În cazul $p_2 = 3k + 1$, avem $p_3 = 3k + 3$ care nu este prim, iar în cazul $p_2 = 3k + 2$, avem $p_4 = 3k + 6$, care nu este prim. Aşadar, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ este singura soluţie.

V.40. *Este posibilă o partiţionare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 12n + 9\}$ în $4n + 3$ submulţimi disjuncte, fiecare cu câte trei elemente, astfel încât în fiecare submulţime un element să fie suma celorlaltor două?*

Titu Zvonaru, Bucureşti

Soluţia I. Fie $\{a, b, c\}$ o mulţime astfel încât $a = b + c$. De aici, rezultă că elementele mulţimii $\{a, b, c\}$ sunt ori toate pare, ori două impare şi unul par. Aşadar, pentru ca să fie posibilă o partiţie ca în problemă, trebuie ca mulţimea dată să conţină un număr par de numere impare. Deoarece mulţimea dată are $6n+5$ numere impare, rezultă că partiţionarea nu este posibilă.

Soluţia II. Să presupunem că ar fi posibilă o partiţie în condiţiile impuse. Atunci, fiecare din cele $4n + 3$ submulţimi de trei elemente are suma elementelor egală cu un număr par, deci suma elementelor mulţimii $\{1, 2, \ldots, 12n + 9\}$ ar trebui să fie număr par. Cum, $1 + 2 + \cdots + 12n + 9 = \dfrac{(12n + 10)(12n + 9)}{2} = (6n + 5)(12n + 5)$, care este un număr impar, rezultă că partiţionarea cerută nu este posibilă.

Clasa a VI-a

VI.36. *Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Arătaţi că printre valorile naturale ale lui n care fac adevărată propoziţia $n^2 + k \,\vdots\, n + k$, există cel puţin trei pătrate perfecte.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Din $n^2 + k = n^2 - k^2 + k^2 + k = (n - k)(n + k) + k^2 + k$, rezultă că $n^2+k \,\vdots\, n+k$ dacă şi numai dacă $k^2+k \,\vdots\, n+k$. Cum $A = \left\{k, k + 1, k^2 + k\right\} \subset D_{k^2+k}$, putem lua $n + k$ din mulţimea A şi atunci obţinem $n \in \left\{0, 1, k^2\right\}$. Astfel, am găsit trei pătrate perfecte care verifică cerinţa problemei.

VI.37. *Numerele* 1160, 1604 *şi* 2270 *dau acelaşi rest la împărţirea prin n. Aflaţi împărţitorul n.*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Conform ipotezei, avem: $1160 = nc_1+r$, $1604 = nc_2+r$, $2270 = nc_3+r$, unde $r < n$ şi $r, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}$. Scăzând aceste egalităţi două câte două, obţinem $444 = n(c_2 - c_1)$, $666 = n(c_3 - c_2)$ şi $1110 = n(c_3 - c_1)$, deci n este divizor comun al numerelor 444, 666, 1110. Cum $(444, 666, 1110) = 222$ rezultă că $n \in \{1, 2, 3, 6, 37, 74, 111, 222\}$, valori care verifică ipoteza problemei.

VI.38. *Demonstraţi că nu există numere naturale x, y, z direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive, astfel încât $x + y + z$ să fie număr prim.*

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

Soluţie. Dacă presupunem contrariul, avem

$$\frac{x}{n} = \frac{y}{n+1} = \frac{z}{n+2} = \frac{x+y+z}{3n+3}, \quad \text{cu } n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

De aici, obţinem că $3y = x + y + z$, deci $3 \,|\, x + y + z$, care împreună cu faptul că $x + y + z$ este prim ne conduce la concluzia că $x + y + z = 3$ şi deci $y = 1$. Înlocuind în relaţia (1), găsim $\dfrac{x}{n} = \dfrac{1}{n+1}$, adică $x = \dfrac{n}{n+1}$, care nu aparţine lui $\mathbb{N}$.

VI.39. *Radu şi Mihai joacă de mai multe ori un joc în urma căruia câştigătorul primeşte a puncte, iar cel care pierde primeşte b puncte ($a, b \in N^*$, $a > b$). Dacă scorul final este $61 - 49$ în favoarea lui Radu, iar Mihai a câştigat 4 partide, aflaţi a şi b.*

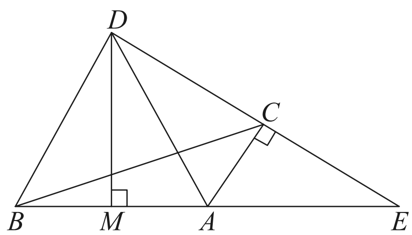
Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Dacă notăm cu x numărul partidelor câştigate de Radu, avem: $xa+4b = = 61$, $4a + xb = 49$, de unde obţinem că $(x + 4)(a + b) = 110$. De aici, având în vedere că $x + 4 \geq 9$ şi $a + b \geq 3$, rezultă că $x + 4 = 22$ şi $a + b = 5$ sau $x + 4 = 11$ şi $a + b = 10$ sau $x + 4 = 10$ şi $a + b = 11$. În primul caz, avem $x = 18$, dar atunci $xa + 4b$ este un număr par, diferit de 61, deci această situaţie nu convine. Procedând la fel, constatăm că nici al treilea caz nu convine. În al doilea caz, găsim $x = 7$, $a = 7$ şi $b = 3$, care este soluţia problemei.

VI.40. *Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 120°$. Perpendiculara în C pe AC intersectează mediatoarea lui $[AB]$ în D; notăm $\{E\} = CD \cap AB$. Să se arate că $AB = 2AC$ dacă şi numai dacă $m(\widehat{BDE}) = 90°$ şi $BE = 2AB$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie M mijlocul lui AB.



Presupunem că $AB = 2AC$. În acest caz rezultă că $AM = AC$, deci $\widehat{CDA} = \widehat{ADM} = = \widehat{MDB} = \alpha$. Cum suma unghiurilor patrulaterului $DMAC$ este $360°$, obţinem că $\alpha = 30°$, deci $\widehat{BDE} = 90°$. Triunghiul DAB este isoscel şi are unghiul $\widehat{BDA}$ de $60°$, adică este echilateral şi, prin urmare, $DA = AB$. În plus $\widehat{DBA} = 60°$, deci $\widehat{AEC} = 30°$. Atunci $\triangle ACD \equiv \triangle ACE$ (C.U.), de unde $AD = AE$. În concluzie, $BA = AD = AE$, adică $BE = 2AB$.

Fie acum $\widehat{BDC} = 90°$ şi A mijlocul lui BE. Cum $AC \parallel BD$, rezultă că $[AC]$ este linie mijlocie în triunghiul BDE, deci $AC = \dfrac{1}{2}BD$. Din $\widehat{CAE} = 60°$ şi $CA \parallel BD$, obţinem că $\widehat{DBA} = 60°$, deci triunghiul DBA este echilateral, ceea ce conduce la concluzia $BD = AB$. Aşadar, avem $AC = \dfrac{1}{2}AB$ sau $AB = 2AC$.

Clasa a VII-a

VII.36. *Să se arate că* $\sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{2n-1}{n}} < 2n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţia I (un grup de elevi de la **Colegiul Naţional** din Iaşi şi **Alexandru Negrescu**, elev, Botoşani)**.** Avem $\sqrt{\dfrac{k}{n}} < \dfrac{1 + k/n}{2} = \dfrac{k+n}{2n}$, $\forall k = \overline{1, 2n-1}$. Ca urmare,

$$\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{2n-1}{n}} < \frac{1}{2}\left[2n - 1 + \frac{1}{n}\left(1 + \cdots + (2n-1)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2n-1+\frac{1}{n}\cdot\frac{(2n-1)\,2n}{2}\right] = 2n-1.$$

Soluţia II. Membrul din stânga al inegalităţii date se poate scrie grupând termenii de forma $\sqrt{\dfrac{n-k}{n}}$, $\sqrt{\dfrac{n+k}{n}}$, $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. În acest fel, obţinem $n-1$ paranteze şi termenul $\sqrt{\dfrac{n}{n}} = 1$. Deoarece

$$\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}+\sqrt{\frac{n+k}{n}}\right)^2 = 2+2\sqrt{\frac{n-k}{n}}\sqrt{\frac{n+k}{n}} < 2+2\,\frac{\dfrac{n-k+n+k}{n}}{2} = 4,$$

rezultă că $\sqrt{\dfrac{n-k}{n}}+\sqrt{\dfrac{n+k}{n}} < 2$, de unde concluzia.

VII.37. *Arătaţi că în baza de numeraţie 7 printre numerele ce se scriu cu cifrele $0,1,2$ există o infinitate care sunt pătrate perfecte şi o infinitate ce nu sunt pătrate perfecte. Aceste afirmaţii rămân valabile dacă se folosesc cifrele $3,5,6$?*

Ruxandra Ioana Vâlcu, elevă, Iaşi

Soluţie. Se observă că $\underbrace{100\ldots01}_{n+1\text{ cifre}}{}^2_{(7)} = (7^n+1)^2 = 7^{2n}+2\cdot7^n+1 = \underbrace{10\ldots020\ldots1}_{2n+1\text{ cifre}}{}_{(7)}$ este pătrat perfect, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $\underbrace{10\ldots020\ldots2}_{2n+1\text{ cifre}}{}_{(7)} = \underbrace{10\ldots020\ldots1}_{2n+1\text{ cifre}}{}_{(7)}+1$ nu este pătrat perfect pentru nici un $n \in \mathbb{N}^*$, deoarece este cuprins între $(7^n+1)^2$ şi $(7^n+2)^2$.

Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci putem scrie $n = 7k+r$, unde $k,r \in \mathbb{N}$, $r < 7$. Deoarece $n^2 = 7k'+r'$, cu $r' \in \{0,1,2,4\}$, rezultă că nici un pătrat perfect scris în baza 7 nu se termină cu 3, 5 sau 6. Prin urmare, răspunsul la ultima întrebare este negativ.

VII.38. *Fie a, b, c cifre nenule, $a \neq c$. Să se arate că dacă $\dfrac{\overline{abb\ldots bc}}{\overline{cbb\ldots ba}} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ca}}$ (termenii primei fracţii conţinând câte 2002 cifre b), atunci $b = a+c$.*

Mihaela Bucătaru, Iaşi

Soluţie. Dacă notăm $n = \underbrace{11\ldots1}_{2002\text{ cifre}}$, avem succesiv:

$$\frac{a\cdot10^{2003}+10nb+c}{c\cdot10^{2003}+10nb+a} = \frac{10a+c}{10c+a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{2003}\left(a^2-c^2\right)+100nb\,(c-a)+10nb\,(a-c)+10\left(c^2-a^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{2003}\,(a+c)-100nb+10nb-10\,(c+a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+c)\cdot10\cdot\left(10^{2002}-1\right)-90bn = 0 \Leftrightarrow (a+c)\cdot10\cdot9n-90bn = 0 \Leftrightarrow a+c = b.$$

VII.39. *Dacă $x < y < z$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, atunci $x^n+y^n \neq z^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.*

Dumitru Neagu, Iaşi

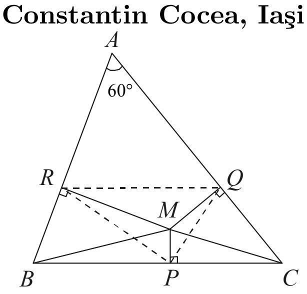
Soluţie. Din relaţia $z > y > x$, rezultă că $z^{n-2} > y^{n-2}$ şi $z^{n-2} > x^{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 3$. De aici, obţinem că, pentru orice $n \geq 3$, avem:

$$z^n = z^{n-2}\cdot z^2 = z^{n-2}\left(x^2+y^2\right) > x^{n-2}\cdot x^2+y^{n-2}\cdot y^2 = x^n+y^n.$$

VII.40. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, iar $M \in \operatorname{Int} ABC$*

astfel încât $m(\widehat{BMC}) = 150°$. Notăm cu P, Q, R proiecţiile lui M pe BC, CA şi respectiv AB. Să se arate că $\triangle PQR$ este dreptunghic.

Constantin Cocea, Iaşi



Soluţie. Deoarece patrulaterele $MPBR$ şi $MPCQ$ sunt inscriptibile, avem: $\widehat{MPR} = \widehat{RBM} = 90° - \widehat{RMB}$ şi $\widehat{MPQ} = \widehat{QCM} = 90° - \widehat{QMC}$. Astfel, obţinem:

$$\widehat{RPQ} = \widehat{MPR} + \widehat{MPQ} = 180° - (\widehat{RMB} + \widehat{QMC}) =$$
$$= 180° - (360° - \widehat{RMQ} - \widehat{BMC}) =$$
$$= 180° - (360° - 120° - 150°) = 180° - 90° = 90°.$$

Clasa a VIII-a

VIII.36. *Determinaţi cardinalul minim al unei mulţimi B pentru care putem defini funcţii $f : \mathbb{R} \to B$ astfel încât $f(-1) < 0$ şi $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Iulia Zanoschi, elevă, Iaşi

Soluţie. Vom demonstra că mulţimea B trebuie să aibă cel puţin trei elemente şi că există o funcţie care are codomeniul B format din trei elemente şi îndeplineşte restul condiţiilor din enunţ.

Avem $f(1) = f((-1)(-1)) = f(-1) f(-1) > 0$. Pe de altă parte, din $f(0) = f(0 \cdot (-1)) = f(0) f(-1)$, rezultă că $f(0)[f(-1) - 1] = 0$, deci $f(0) = 0$. Prin urmare, $f(-1)$, $f(0)$ şi $f(1)$ sunt trei numere distincte, ceea ce înseamnă că B are cel puţin trei elemente. În fine, se observă că $f : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, verifică toate condiţiile cerute.

VIII.37. *If $a, b, c \in (0, \infty)$ prove the following inequalities:*

a) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) \geq 24$ *where* $abc = 1$;

b) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) \geq \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ *where* $ab+bc+ac = 1$.

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Montenegro

Soluţie. *a)* Se ştie că, oricare ar fi numerele a, b, c, are loc egalitatea:

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a). \qquad (1)$$

Având în vedere identitatea (1) şi inegalitatea mediilor, putem scrie:

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a) \geq$$
$$\geq 3 \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 24abc = 24.$$

b) Soluţia I (**Irina Mustaţă**, elevă, Iaşi). Prin înmulţirea ultimelor două paranteze din partea dreaptă a relaţiei (1) şi ţinând cont că $ab + bc + ca = 1$, obţinem $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(c^2+1)$; similar, avem şi $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(b+c)(a^2+1)$ şi $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(c+a)(b^2+1)$. Prin adunarea acestora avem

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = (a+b)(c^2+1) + (b+c)(a^2+1) + (c+a)(b^2+1) =$$
$$= 2(a+b+c) + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) =$$
$$= 2(a+b+c) + (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc, \text{ adică}$$

$$(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b+c)-3abc. \qquad (2)$$

Observvăm că din $3=3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$ rezultă că $a+b+c\geq\sqrt{3}$, iar din $1=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ deducem că $abc\leq\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. Revenind la (2) vom obţine $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Soluţia II (**Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi). Cum $ab+ac+bc=1$, avem:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=$$

$$=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)\right]=(a+b+c)^3-3(a+b+c).$$

Astfel, inegalitatea de la punctul *b*) se va scrie $3(a+b+c)-3abc\geq\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ sau

$$a+b+c-abc\geq\frac{8\sqrt{3}}{9}. \qquad (2)$$

Pentru a justifica inegalitatea (2), vom demonstra dubla inegalitate:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\geq\sqrt[3]{abc},\quad \forall a,b,c>0. \qquad (3)$$

Pentru prima parte a relaţiei (3), observăm că

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\geq\frac{ab+bc+ca}{3}\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq 3(ab+ac+bc)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0,$$

evident adevărată. Pentru partea a doua, folosim inegalitatea mediilor:

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\geq\sqrt{\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2}=\sqrt[3]{abc}.$$

Revenind la inegalitatea (2), avem:

$$a+b+c-abc\geq 3\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}-\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3=\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Soluţia III (dată de autor). Din inegalitatea lui Carlson:

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\geq\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}},\quad \forall a,b,c>0$$

şi identitatea (1), rezultă că:

$$(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b)(b+c)(c+a)\geq$$

$$\geq 3\cdot 8\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3=3\cdot 8\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

VIII.38. *Fie $n\in\mathbb{N}$ fixat. Arătaţi că există o infinitate de numere $x,y,z\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}$.*

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Dacă luăm $z=-y$, atunci din relaţia dată, obţinem:
$$2y^{2n}=x^{2n}(x-1). \qquad (1)$$
O soluţie a acestei din urmă ecuaţii putem găsi alegând $x-1=2a^{2n}$, $a\in\mathbb{Z}^*$. Într-adevăr, în acest caz egalitatea (1) devine $2y^{2n}=\left(2a^{2n}+1\right)^{2n}\cdot 2a^{2n}$, de unde găsim $y=\pm a\left(2a^{2n}+1\right)$. Deci, există o infinitate de numere cu proprietatea dată: $x=1+2a^{2n}$, $y=a\left(2a^{2n}+1\right)$, $z=-a\left(2a^{2n}+1\right)$, $a\in\mathbb{Z}^*$.

VIII.39. *Fie $ABCD$ un patrulater strâmb cu $[AD]\equiv[BC]$. Să se construiască dreptele paralele d_1,d_2,d_3,d_4 astfel încât $A\in d_1$, $B\in d_2$, $C\in d_3$, $D\in d_4$ şi* $\operatorname{dist}(d_1,d_4)=\operatorname{dist}(d_2,d_3)$.

Horia Mihail Teodorescu, elev, Iaşi

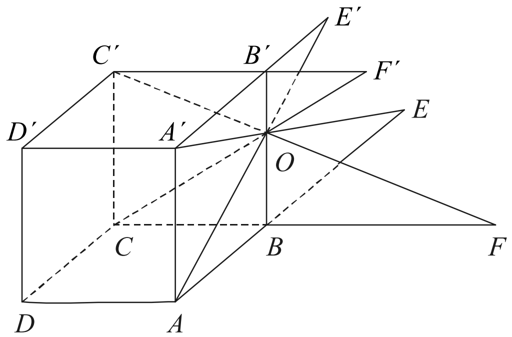
Soluţie. Fie d o dreaptă care face unghiuri egale cu AD şi BC (evident, putem găsi o astfel de dreaptă). Dreptele d_1, d_2, d_3 şi d_4, duse prin A, B, C, respectiv D şi paralele cu d, satisfac condiţiile problemei. Într-adevăr, dacă notăm cu E şi F picioarele perpendicularelor din A şi B pe d_4, respectiv d_3 avem că $\triangle AED\equiv\triangle BFC$ (I. U.), deci $AE=BF$, adică $\operatorname{dist}(d_1,d_4)=\operatorname{dist}(d_2,d_3)$.

VIII.40. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, iar $O\in(BB')$. Dreptele $A'O$ şi $C'O$ intersectează (ABC) în E, respectiv F, iar AO şi CO intersectează $(A'B'C')$ în E', respectiv F'.*

a) Arătaţi că $EF\cdot E'F'$ nu depinde de poziţia lui O;

b) Arătaţi că $S_{BB'E'E}\geq S_{ABCD}$ şi determinaţi O pentru care se atinge egalitatea.

Monica Nedelcu, Iaşi



Soluţie. *a*) Cum $(A'B'C')\parallel(ABC)$ şi $(EOF)\cap(A'B'C')=A'C'$, $(EOF)\cap(ABC)=EF$, rezultă că $EF\parallel A'C'$, deci $\triangle A'OC'\sim\triangle EOF$, de unde deducem că
$$\frac{EF}{A'C'}=\frac{EO}{OA'}=\frac{BO}{B'O}. \qquad (1)$$
Analog, putem demonstra că $\triangle AOC\sim\triangle E'OF'$, deci
$$\frac{E'F'}{AC}=\frac{E'O}{OA}=\frac{B'O}{OB}. \qquad (2)$$
Din (1) şi (2), obţinem $\dfrac{EF\cdot E'F'}{AC\cdot A'C'}=1$, deci $EF\cdot E'F'=AC^2=\text{const}$.

b) Fie $B'O=x$. Atunci, avem $\dfrac{B'E'}{a}=\dfrac{x}{a-x}$ şi $\dfrac{BE}{a}=\dfrac{a-x}{x}$. De aici rezultă că
$$S_{BB'E'E}=\frac{BB'\cdot(B'E'+BE)}{2}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a-x}+\frac{a-x}{x}\right)\geq\frac{a^2}{2}\cdot 2=a^2=S_{ABCD}\,.$$
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\dfrac{x}{a-x}=1$, adică $x=\dfrac{a}{2}$, ceea ce înseamnă că O este mijlocul segmentului $[BB']$.

Clasa a IX-a

IX.36. *Determinaţi $x<0<y$ astfel încât $xy+\dfrac{y}{x}=y^3-5y+2$.*

Cezar Lupu, elev, Constanţa

Soluţie. Ecuaţia dată este echivalentă cu:

$$x+\frac{1}{x}+5=y^2+\frac{2}{y}. \tag{1}$$

Cum $x<0$, rezultă că $x+\frac{1}{x}+5\le -2+5=3$, cu egalitate numai pentru $x=-1$. Pe de altă parte, având în vedere că $y>0$, putem scrie:

$$y^2+\frac{2}{y}=y^2+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\ge 3\sqrt[3]{y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}}=3,$$

cu egalitate numai pentru $y=1$. Aşadar, egalitatea (1) este posibilă dacă şi numai dacă $x+\frac{1}{x}+5=3=y^2+\frac{2}{y}$, adică pentru $x=-1$ şi $y=1$.

IX.37. *Pentru $x\in[1,\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$, demonstraţi inegalitatea*

$$\left(x^{n+1}+1\right)(x^n-1)\ge 2nx^n(x-1).$$

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Soluţia I. Inegalitatea dată se transformă succesiv astfel:

$$x^{2n+1}-x^{n+1}+x^n-1\ge 2nx^{n+1}-2nx^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{2n+1}-1\ge(2n+1)\left(x^{n+1}-x^n\right) \tag{1}$$

Inegalitatea (1) este adevărată pentru $x=1$, iar pentru $x>1$ este echivalentă cu $\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}\ge(2n+1)x^n$ sau $\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}{2n+1}\ge x^n$, care rezultă din inegalitatea mediilor în felul următor:

$$\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}{2n+1}\ge\sqrt[2n+1]{1\cdot x\cdot x^2\cdots x^{2n}}=x^{\frac{(2n+1)2n}{2(2n+1)}}=x^n.$$

Soluţia II (Irina Mustaţă, elevă, Iaşi**).** Prin inducţie completă.

IX.38. *Să se arate că* $\frac{x^{n+1}}{y^n}+\frac{y^{n+1}}{z^n}+\frac{z^{n+1}}{x^n}\ge x+y+z$, $\forall x,y,z>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Gigel Buth, Satu Mare

Soluţie. În GM - 4/2002, p. 146, *L. Panaitopol* enunţă şi demonstrează rezultatul următor:

Dacă $p\ge1$ şi $a_i\ge0$, $b_i>0$ pentru $i\in\overline{1,n}$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{b_i^{p-1}}\ge\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{p-1}}.$$

Inegalitatea din enunţ rezultă imediat din aceasta.

IX.39. *Să se rezolve ecuaţia* $\frac{1}{2\sqrt{[x]^3}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{[x]\cdot[x+1]^3}}=\frac{2}{[x]\cdot[x+2]}$.

Daniel Jinga, Piteşti

Soluţie. Ecuaţia are sens dacă $[x]>0$, adică $[x]\ge1$. Dacă facem notaţia $[x]=y\in\mathbb{N}^*$, ecuaţia dată devine:

$$\frac{1}{2y\sqrt{y}}+\frac{1}{3(y+1)\sqrt[3]{y}}=\frac{2}{y(y+2)}. \tag{1}$$

Deoarece $\sqrt{y} = \sqrt{y \cdot 1} \le \dfrac{y+1}{2}$ (2) şi $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y \cdot 1 \cdot 1} \le \dfrac{y+2}{3}$ (3), rezultă că $\dfrac{1}{2y\sqrt{y}} + \dfrac{1}{3(y+1)\sqrt[3]{y}} \ge \dfrac{1}{y(y+1)} + \dfrac{1}{(y+1)(y+2)} = \dfrac{2}{y(y+2)}$. Prin urmare, ecuaţia (1) are soluţie dacă şi numai dacă (2) şi (3) sunt simultan egalităţi, adică $y = 1$. Deci soluţia ecuaţiei date este $x \in [1, 2)$.

IX.40. *Fie $M \neq G$ în planul $\triangle ABC$ şi D, E, F mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ şi respectiv $[AB]$. Considerăm punctele X, Y, Z astfel încât $\overrightarrow{XD} = m\overrightarrow{XM}$, $\overrightarrow{YE} = m\overrightarrow{YM}$, $\overrightarrow{ZF} = m\overrightarrow{ZM}$, $m \neq 1$.*

a) Dacă $m \neq \dfrac{3}{2}$, atunci AX, BY, CZ sunt concurente în S, cu $\overrightarrow{SG} = \dfrac{2m}{3}\overrightarrow{SM}$.

b) Dacă $m = \dfrac{3}{2}$, atunci AX, BY, CZ sunt paralele cu GM.

Virgil Nicula, Bucureşti

Soluţie. *a*) Avem:

$$\overrightarrow{SG} = \frac{2m}{3}\overrightarrow{SM} \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MG} = \frac{2m}{3}\overrightarrow{SM} \Leftrightarrow \frac{2m-3}{3}\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{MG} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MS} = \frac{3}{3-2m}\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MS} = \frac{1}{3-2m}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).$$

Fie punctul S' definit prin egalitatea $\overrightarrow{MS'} = \dfrac{1}{3-2m}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$. Se poate verifica, prin calcul, faptul că S' aparţine dreptelor AX, BY, CZ, deci acestea vor fi concurente în $S' \equiv S$ şi atunci este adevărată şi egalitatea $\overrightarrow{SG} = \dfrac{2m}{3}\overrightarrow{SM}$. Să demonstrăm, de exemplu, că $S' \in AX$. Pentru aceasta vom demonstra că vectorii $\overrightarrow{XS'}$ şi $\overrightarrow{S'A}$ sunt coliniari:

$$\overrightarrow{XS'} = \overrightarrow{MS'} - \overrightarrow{MX} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3-2m} - \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{2-2m} =$$
$$= \frac{(2-2m)\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}{(3-2m)(2-2m)},$$
$$\overrightarrow{S'A} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MS'} = \overrightarrow{MA} - \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3-2m} = (2-2m)\overrightarrow{XS'}.$$

b) Pentru $m = \dfrac{3}{2}$, avem:

$$\overrightarrow{XD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{XM} \Leftrightarrow \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{XM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MX} = -2\overrightarrow{MD} = -(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

şi atunci $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$. Analog se obţine $\overrightarrow{YB} = \overrightarrow{ZC} = 3\overrightarrow{MG}$, deci dreptele AX, BY, CZ sunt paralele.

Clasa a X-a

X.36. *Să se rezolve inecuaţia $a^{\log_b^2 x} + x^{\log_b x} \le a + b$, unde $a, b \in (1, \infty)$.*

Daniela Dodan, elevă, Iaşi

Soluţie. Din egalitatea $x = b^{\log_b x}$, $x > 0$, rezultă că $x^{\log_b x} = b^{\log_b^2 x}$, $x > 0$. Deci, inecuaţia dată este echivalentă cu

$$a^{\log_b^2 x} + b^{\log_b^2 x} \le a + b. \tag{1}$$

Dacă facem notaţia $\log_b^2 x = \alpha \geq 0$ şi avem în vedere obsevaţiile $\alpha > 1 \Rightarrow a^\alpha + b^\alpha >$ $> a + b$, $\alpha \leq 1 \Rightarrow a^\alpha + b^\alpha \leq a + b$, obţinem că inecuaţia (1) este echivalentă cu $\log_b^2 x \leq 1$, deci $x \in \left[b^{-1}, b\right]$.

X.37. *Fie $a, b \in (0,1) \cup (1, \infty)$ şi funcţia injectivă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x) + f(b^x)$ este constantă. Să se arate că $ab = 1$ şi că există funcţii f care satisfac ipotezele problemei.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Fie $g(x) = f(a^x) + f(b^x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $k \in \mathbb{R}$. Atunci, avem $k = f(x) + f\left(b^{\log_a x}\right) = f\left(a^{\log_b x}\right) + f(x)$, $\forall x > 0$, de unde rezultă că $f\left(b^{\log_a x}\right) =$ $= f\left(a^{\log_b x}\right)$. Cum f este funcţie injectivă, deducem că $b^{\log_a x} = a^{\log_b x}$, $x > 0$, deci $\log_a^2 b = 1$, adică $a = b$ sau $ab = 1$. Dacă $a = b$, atunci $f(a^x) = \dfrac{g(x)}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, sau $f(x) = \dfrac{k}{2}$, $x > 0$, ceea ce contrazice injectivitatea funcţiei f. Pentru $b = \dfrac{1}{a}$ şi $f(x) = \log_a x$, se obţine $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

X.38. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a > b > c > d$. Să se arate că a, b, c, d sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $(a-b)(b-c)(c-d) = \left(\dfrac{a-d}{3}\right)^3$.*

A. V. Mihai, Bucureşti

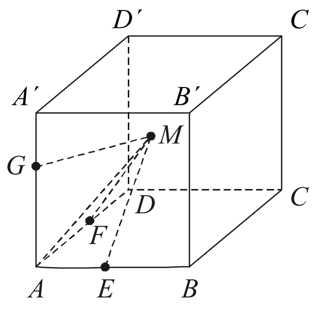
Soluţie. Dacă a, b, c, d sunt în progresie aritmetică de raţie r, atunci egalitatea dată este echivalentă cu $r \cdot r \cdot r = \left(\dfrac{3r}{3}\right)^3$, care este, evident, adevărată.

Reciproc, dacă are loc egalitatea din enunţ, atunci $a - d = 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-d)}$, sau $(a-b) + (b-c) + (c-d) = 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-d)}$, adică media aritmetică a numerelor $a - b$, $b - c$ şi $c - d$ este egală cu media lor geometrică. De aici rezultă că $a - b = b - c = c - d$, deci a, b, c, d sunt în progresie aritmetică.

X.39. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Dacă $M \in \operatorname{Int} A'B'C'D'$, notăm cu α, β, γ măsurile unghiurilor pe care AM le face cu AB, AD şi respectiv AA'. Să se arate că*

$$AM < a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma < AC'.$$

Cătălin Calistru, Iaşi



Soluţie. Fie E, F şi G proiecţiile punctului M pe laturile AB, AD şi respectiv AA'. Astfel avem $\cos\alpha = \dfrac{AE}{AM}$, $\cos\beta = \dfrac{AF}{AM}$ şi $\cos\gamma = \dfrac{AG}{AM}$, de unde deducem că $AE\cos\alpha + AF\cos\beta + AG\cos\gamma =$ $= \dfrac{AE^2 + AF^2 + AG^2}{AM} = \dfrac{AM^2}{AM} = AM$. De aici, având în vedere că $AE < AB = a$, $AF < AD = b$, $AG < AA' = c$ şi $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$, rezultă că $AM < a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$. Pentru a doua parte a inegalităţii vom folosi inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz şi identitatea $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = AC'.$$

X.40. *a) Pentru* $x, y, z \geq 0$, *demonstraţi inegalitatea*

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\right)\cdot\sqrt{xy+xz+yz}\geq 3\sqrt{6xyz}.$$

b) Cu notaţiile uzuale, în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{R}{r}-2\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. *a)* Din relaţiile

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\geq 3\sqrt[6]{(x+y)(x+z)(y+z)}\geq 3\sqrt[6]{8xyz}=3\sqrt{2}\sqrt[6]{xyz}\ \text{şi}$$

$$\sqrt{xy+xz+yz}\geq\sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}=\sqrt{3}\sqrt[6]{x^2y^2z^2}$$

rezultă că

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\right)\sqrt{xy+xz+yz}\geq 3\sqrt{6}\sqrt{xyz}=3\sqrt{6xyz}.$$

b) Vom aplica inegalitatea de la punctul *a)* pentru $x=p-a$, $y=p-b$ şi $z=p-c$. Cu notaţiile făcute, avem:

$$x+y=c,\quad x+z=b,\quad y+z=a,$$

$$xy+xz+yz=\sum(p-a)(p-b)=\sum\left(p^2-(a+b)p+ab\right)=$$
$$=3p^2-4p^2+\sum ab=-p^2+\left(p^2+r^2+4Rr\right)=r^2+4Rr,$$

$$xyz=(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=pr^2.$$

Astfel, inegalitatea de la *a)* devine $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\sqrt{r^2+4Rr}\geq 3\sqrt{6pr^2}$ sau $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\left(r^2+4Rr\right)\geq 54pr^2$, deci $1+4\,\dfrac{R}{r}\geq\dfrac{27(a+b+c)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}$. De aici obţinem că

$$\frac{R}{r}-2\geq\frac{27(a+b+c)}{4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}-\frac{9}{4}=\frac{9}{4}\,\frac{3(a+b+c)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}=$$
$$=\frac{9}{4}\,\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}.$$

Clasa a XI-a

XI.36. *Fie* D, M *două matrice nesingulare de ordin* n, D *diagonală, iar* M *triunghiulară. Dacă* $D={}^tMDM$, *să se arate că* M *este tot o matrice diagonală, având* ±1 *pe diagonala principală.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie.

Fie $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$, cu $\lambda_i \neq 0$, $i=\overline{1,n}$, $M=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n}\\ 0 & m_{22} & \dots & m_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & m_{nn}\end{pmatrix}$, $m_{ii}\neq 0$, $i=\overline{1,n}$ şi M_{ij} complementul algebric al lui m_{ij} în matricea M. Notăm cu $d=\det M\neq 0$. Relaţia dată este echivalentă cu $DM^{-1}={}^tMD$. Deoarece

$$DM^{-1}=\frac{1}{d}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1}\\ 0 & M_{22} & \dots & M_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & M_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{d}\begin{pmatrix}\lambda_1 M_{11} & \lambda_1 M_{21} & \dots & \lambda_1 M_{n1}\\ 0 & \lambda_2 M_{22} & \dots & \lambda_2 M_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n M_{nn}\end{pmatrix} \quad \text{şi}$$

$${}^tMD=\begin{pmatrix}m_{11} & 0 & \dots & 0\\ m_{12} & m_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 m_{11} & 0 & \dots & 0\\ \lambda_1 m_{12} & \lambda_2 m_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1 m_{1n} & \lambda_2 m_{2n} & \dots & \lambda_n m_{nn}\end{pmatrix}$$

rezultă că $m_{ij}=0$, oricare ar fi $i<j$ şi $\dfrac{\lambda_i M_{ii}}{d}=\lambda_i m_{ii}$, $i=\overline{1,n}$. Din $m_{ij}=0$, pentru $i<j$, deducem că M este matrice diagonală şi atunci $\dfrac{M_{ii}}{d}=\dfrac{1}{m_{ii}}$, $i=\overline{1,n}$, deci avem $m_{ii}^2=1$, $i=\overline{1,n}$, adică $m_{ii}=\pm 1$, $i=\overline{1,n}$. Cazul în care M este inferior triunghiulară se tratează în mod analog.

XI.37. *Fie* $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *astfel încât* $\det(A+\alpha\,{}^tA)=0$, *unde* $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. *Să se arate că* $\det(A+{}^tA)=\dfrac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}\det A$.

Marian Ionescu, Piteşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. $P(x)=\det(A+x\,{}^tA)$, $x\in\mathbb{C}^*$ este o funcţie polinominală cu gradul mai mic sau egal cu 3. Deoarece

$$P(x)=\det\left(x\left(\frac{1}{x}A+{}^tA\right)\right)=x^3\det\left(\frac{1}{x}A+{}^tA\right)=$$
$$=x^3\det\left(\frac{1}{x}{}^tA+A\right)=x^3P\left(\frac{1}{x}\right),\quad \forall x\in\mathbb{C}^*,$$

rezultă că P este polinom reciproc, deci $P(x)=(\det A)x^3+ax^2+ax+\det A$. Cum, prin ipoteză, $P(\alpha)=0$, înseamnă că şi $P\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=0$. De aici, având în vedere că $P(-1)=0$, obţinem că $P(x)=(\det A)(x-\alpha)\left(x-\dfrac{1}{\alpha}\right)(x+1)$. Aşadar,

$$\det\left(A+{}^tA\right)=P\left(1\right)=\left(\det A\right)\left(1-\alpha\right)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot 2=\frac{-2\left(\alpha-1\right)^2}{\alpha}\det A.$$

XI.38. *Să se determine funcţiile continue* $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *pentru care* $f\left(f\left(x\right)\right)+2f\left(x\right)=3x,\ \forall x\geq 0.$

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Fie $f_n\left(x\right)=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ ori}}\left(x\right),\ x\geq 0,\ n\in\mathbb{N}^*$. Pentru orice $n\geq 3$ şi $x\geq 0$, avem că $f_k\left(x\right)+2f_{k-1}\left(x\right)=3f_{k-2}\left(x\right),\ \forall k=\overline{2,n}$, de unde prin sumare deducem că $f_n\left(x\right)+3f_{n-1}\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,\ \forall n\geq 3,\ \forall x\geq 0$. De aici, obţinem:

$$f_3\left(x\right)+3f_2\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,$$
$$f_4\left(x\right)+3f_3\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,$$
$$f_5\left(x\right)+3f_4\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n\left(x\right)+3f_{n-1}\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,\ \forall n\geq 3,\ \forall x\geq 0.$$

Mai departe, înmulţind prima ecuaţie cu $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$, a doua cu $\left(-\frac{1}{3}\right)^1$, a treia cu $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ etc. şi apoi adunându-le, găsim relaţia

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}f_n\left(x\right)+3f_2\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right)+3x\right)\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}\right)$$

sau

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}f_n\left(x\right)+9x-6f\left(x\right)=\frac{3}{4}\left(f_1\left(x\right)+3x\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right),\forall n\geq 3,\forall x\geq 0. \tag{1}$$

Din ipoteză rezultă că $f\left(x\right)\leq\frac{3x}{2},\ \forall x\geq 0$, şi atunci $f_n\left(x\right)\leq\left(\frac{3}{2}\right)^n x,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\geq 0$. De aici, obţinem că $0\leq\frac{f_n\left(x\right)}{3^n}\leq\frac{x}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\geq 0$, adică

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n\left(x\right)}{3^n}=0,\quad\forall x\geq 0. \tag{2}$$

Din (1) şi (2), rezultă că $9x-6f\left(x\right)=\frac{3}{4}\left(f\left(x\right)+3x\right),\ \forall x\geq 0$, deci $f\left(x\right)=x,\ \forall x\geq 0$.

Observaţie. Nu este nevoie de *continuitatea* funcţiei f.

XI.39. *Fie şirul* $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ *astfel încât şirul* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)_{n\geq 1}$ *este convergent. Dacă* $\left(x_n\right)_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}_+^*$ *are proprietatea că* $x_n\leq x_{n+1}\left(1+x_ny_{n+1}\right),\ \forall n\geq 1$, *arătaţi că şirul* $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

Soluţie. Deoarece $x_n>0,\forall n\geq 1$, rezultă că inegalitatea din enunţ este echiva-

lentă cu $\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}\leq y_{n+1}$, $\forall n\geq 1$, de unde deducem că
$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_1}\leq y_2+y_3+\cdots+y_n=\sum_{i=1}^{n}y_i-y_1,\quad \forall n\geq 1.$$
Cum în partea dreaptă a ultimei relaţii este un şir convergent, deci mărginit, rezultă că şirul $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ este şi el mărginit.

Pe de altă parte, relaţia $\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}}\leq y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-\sum\limits_{i=1}^{n-1}y_i$ este echivalentă cu $\dfrac{1}{x_n}-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\leq\dfrac{1}{x_{n-1}}-\sum\limits_{i=1}^{n-1}y_i$, $\forall n\geq 2$, sau, cu notaţia $z_n=\dfrac{1}{x_n}-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$, $z_n\leq z_{n-1}$, $\forall n\geq 2$. De aici, având în vedere că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, fiind diferenţa a două şiruri mărginite, rezultă că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Prin urmare, şirul cu termenul general $\dfrac{1}{x_n}=z_n+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$ este convergent.

XI.40. *Fie $x_0\in[-1,1]$; arătaţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, ecuaţia $3x-4x^3=x_n$ are o singură soluţie $x_{n+1}\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$. Demonstraţi că şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(3^n x_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi calculaţi limitele lor.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Să arătăm, pentru început, că dacă $a\in[-1,1]$, atunci ecuaţia $3x-4x^3=a$ are o singură soluţie în intervalul $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$. Pentru aceasta, considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=3x-4x^3-a$. Deoarece $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$ $=(-1-a)(1-a)\leq 0$ şi f este continuă, rezultă că f se anulează cel puţin o dată în intervalul $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$. Cum $f'(x)=3\left(1-4x^2\right)\geq 0$, $\forall x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, înseamnă că f este strict crescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, deci ecuaţia $f(x)=0$ are o singură soluţie în intervalul $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

Mai putem observa că, dacă $\alpha=\arcsin a$, avem $3\sin\dfrac{\alpha}{3}-4\sin^3\dfrac{\alpha}{3}=\sin\alpha=a$ şi $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ implică $\sin\dfrac{\alpha}{3}\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$. Deci $\sin\dfrac{\alpha}{3}$ este tocmai soluţia din intervalul $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ a ecuaţiei $3x-4x^3=a$. Astfel, am demonstrat că, pentru orice $a\in[-1,1]$, ecuaţia $3x-4x^3=a$ are o singură soluţie în intervalul $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ şi anume $\sin\dfrac{\alpha}{3}=\sin\dfrac{\arcsin a}{3}$.

Revenind la problema noastră, rezultă, din cele arătate mai sus, că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, x_{n+1} este bine definit şi $x_{n+1}=\sin\dfrac{\arcsin x_n}{3}$. De aici, obţinem că

$\arcsin x_{n+1} = \dfrac{\arcsin x_n}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $\arcsin x_n = \dfrac{\arcsin x_0}{3^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Astfel avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\arcsin x_n) = 0$ şi

$$\lim_{n\to\infty} 3^n x_n = \lim_{n\to\infty} (3^n \arcsin x_n) \cdot \frac{x_n}{\arcsin x_n} = \arcsin x_0.$$

Clasa a XII-a

XII.36. *Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care ecuaţia $x^2 = x + \widehat{1}$ are soluţie unică în $\mathbb{Z}_n$; rezolvaţi ecuaţia în acest caz.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Dacă $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este soluţie a ecuaţiei $x^2 = x + \widehat{1}$, atunci şi $\widehat{1} - \widehat{a}$ este soluţie a acestei ecuaţii $((\widehat{1} - \widehat{a})^2 = \widehat{1} - \widehat{2a} + \widehat{a}^2 = \widehat{1} - \widehat{2a} + \widehat{a} + \widehat{1} = (\widehat{1} - \widehat{a}) + 1)$. Cum ecuaţia trebuie să aibă soluţie unică, este necesar să avem $\widehat{a} = \widehat{1} - \widehat{a}$, sau $\widehat{2a - 1} = \widehat{0}$. Deoarece $\widehat{a}^2 = \widehat{a} + 1$ implică $\widehat{4}\widehat{a}^2 = \widehat{4}\widehat{a} + \widehat{4}$, sau $(\widehat{2a} - \widehat{1})^2 = \widehat{5}$, rezultă că $\widehat{5} = \widehat{0}$. De aici, obţinem că $n = 5$ şi atunci ecuaţia dată are soluţia unică $\widehat{a} = \widehat{3}$.

XII.37. *Fie $(G, +)$ un subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$. Să se determine morfismele crescătoare de la $(G, +)$ la $(\mathbb{R}, +)$.*

Dan Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, Hunedoara

Soluţie. Dacă $G = \{0\}$, atunci $f : G \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ este funcţia căutată.

Dacă $G \neq \{0\}$, atunci există $x_0 \in G \setminus \{0\}$ şi atunci dacă notăm $a = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$, observăm că $a \geq 0$. Folosind definiţia morfismului de grupuri se poate demonstra prin inducţie că $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in G$. De aici, deducem că $f(nx_0) = nf(x_0) = nax_0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Fie un element oarecare $y \in G$. Dacă $x_0 > 0$, avem succesiv:

$$\left[\frac{n(y + x_0)}{x_0}\right] \leq \frac{n(y + x_0)}{x_0} < \left[\frac{n(y + x_0)}{x_0}\right] + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow$$

$$f\left(\left[\frac{n(y + x_0)}{x_0}\right] x_0\right) \leq f(n(y + x_0)) \leq f\left(\left(\left[\frac{n(y + x_0)}{x_0}\right] + 1\right) x_0\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow$$

$$\left[\frac{n(y + x_0)}{x_0}\right] ax_0 \leq n(f(y) + ax_0) \leq \left(\left[\frac{n(y + x_0)}{x_0}\right] + 1\right) ax_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{n(y + x_0)}{x_0}\right] ax_0 \leq f(y) + ax_0 \leq \left(\frac{1}{n}\left[\frac{n(y + x_0)}{x_0}\right] + \frac{1}{n}\right) ax_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde, trecând la limită pentru $n \to \infty$, obţinem

$$ax_0 \frac{y + x_0}{x_0} \leq f(y) + ax_0 \leq ax_0 \frac{y + x_0}{x_0},$$

deci $f(y) = ay$. Dacă $x_0 < 0$, se ajunge, în mod analog, la acelaşi rezultat.

În sfârşit, observăm că funcţia $f : G \to \mathbb{R}$, $f(y) = ay$, $a > 0$, este un morfism crescător de grupuri.

XII.38. *Determinaţi funcţiile derivabile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x) = g(x) + x$ şi $g'(x) = f(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Adunând cele două relaţii date, obţinem $(f+g)'(x) = (f+g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sau $\left(e^{-x}(f+g)\right)'(x) = 0$, de unde găsim $f(x) + g(x) = Ce^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară. Revenind la prima ecuaţie, avem

$$f'(x) = Ce^x + x - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

sau $(e^x f(x))' = Ce^{2x} + xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(x) = \dfrac{C}{2}e^x + k_1 e^{-x} + x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Analog, obţinem $g(x) = \dfrac{C}{2}e^x - k_2 e^x - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se verifică uşor că aceste funcţii satisfac sistemul de ecuaţii dat.

XII.39. *Fie $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{g(n)}}{x+\alpha}dx$, unde $\alpha \in [1, \infty)$.*

Adrian Sandovici, Piatra Neamţ

Soluţie. Din ipoteză rezultă că există n_0 astfel încât $f(n) > 0$ şi $g(n) > 0$, $\forall n \geq n_0$. Pentru $n \geq n_0$, avem:

$$I_n = f(n) \int_0^1 \frac{x^{g(n)}dx}{x+\alpha} = \frac{f(n)}{g(n)} \int_0^1 \left(x^{g(n)}\right)' \frac{x}{x+\alpha}\, dx =$$

$$= \frac{f(n)}{g(n)} \left[\left.\frac{x^{g(n)+1}}{x+\alpha}\right|_0^1 - \alpha \int_0^1 \frac{x^{g(n)}}{(x+\alpha)^2}\, dx \right].$$

Deoarece

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{g(n)}dx}{(x+\alpha)^2} \leq \int_0^1 x^{g(n)}dx = \frac{1}{g(n)+1}$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{g(n)}dx}{(x+\alpha)^2} = 0$. Aşadar, avem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{\beta}{1+\alpha}$.

XII.40. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă astfel încât $xf'(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x}$ există şi este finită. Să se arate că*

$$f(1) \geq \min\left(2\int_0^1 f(x)\, dx, \int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx\right).$$

Marcel Chiriţă, Bucureşti

Soluţie. Din $xf'(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$ rezultă că $\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\, dx \geq \int_0^1 f(x)\, dx$, sau $\left. xf(x)\right|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx \geq \int_0^1 f(x)\, dx$, deci $f(1) \geq 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ (1).

Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{f(x)}{x}$ există şi este finită, rezultă că $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$. Astfel, avem

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \leq \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_\varepsilon^1 f'(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} (f(1) - f(\varepsilon)) = f(1),$$

ceea ce, împreună cu relaţia (1), conduce la inegalitatea din enunţ.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 1 / 2003

A. Nivel gimnazial

G36. *Fie $x, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât x divide $10^n - 1$, însă x nu divide $10^k - 1$ pentru $k < n$. Să se arate că x divide $10^m - 1$ dacă şi numai dacă $m \vdots n$.*

N. N. Hârţan, Iaşi

Soluţie. Dacă $m \vdots n$, atunci $m = 0$ sau există $q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m = nq$. În primul caz, avem $10^m - 1 = 0 \vdots x$, iar în al doilea avem:

$$10^m - 1 = (10^n)^q - 1 = (10^n - 1)\left((10^n)^{q-1} + \cdots + 1\right) \vdots x.$$

Să presupunem acum că $10^m - 1 \vdots x$, $m \neq 0$ şi $m = nq + r$, cu $0 < r < n$. De aici şi din ipoteză, obţinem că $x \mid 10^m - 1 - (10^{nq} - 1) = 10^{nq+r} - 10^{nq} = 10^{nq}(10^r - 1)$. Deoarece din $x \mid 10^n - 1$ rezultă că $(x, 10) = 1$, deci $(x, 10^{nq}) = 1$, din relaţia precedentă deducem că $x \mid 10^r - 1$, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, dacă $10^m - 1 \vdots x$, atunci $m \vdots n$.

G37. *$2n$ muzicieni $(n > 2)$ participă la un festival. La fiecare concert, o parte dintre ei cântă iar ceilalţi ascultă. Să se determine numărul minim de concerte astfel încât fiecare muzician să-i asculte pe toţi ceilalţi.*

Titu Zvonaru, Bucureşti

Soluţie. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ cei $2n$ muzicieni. Dacă la un concert, unul dintre ei ascultă pe un coleg care cântă, spunem că are loc o "audiţie". Astfel, la un concert la care cântă p muzicieni, există $p(2n-p)$ audiţii. Deoarece $\sqrt{p(2n-p)} \leq$ $\leq \dfrac{p + 2n - p}{2} = n$, adică $p(2n-p) \leq n^2$, rezultă că numărul maxim de audiţii are loc atunci când n muzicieni cântă şi n ascultă.

Să presupunem că la primul concert cântă muzicienii $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pentru a putea fi ascultat de $a_2, a_3, \ldots, a_n$, muzicianul a_1 trebuie să mai cânte la un concert în care să nu cânte $a_2, a_3, \ldots, a_n$, apoi a_2 trebuie să cânte într-un concert în care nu cântă $a_1, a_3, \ldots, a_n$ şi aşa mai departe. Deci, numărul minim de concerte este cel puţin $n+1$. Să arătăm că acest număr este $n+1$ indicând o aranjare a celor $n+1$ concerte astfel încât să fie îndeplinită cerinţa problemei. Pentru aceasta, facem notaţiile:

$$A_k = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}\} - \{a_{n+k}\}, \quad B_k = \{a_1, a_2, \ldots a_n\} - \{a_k\}, \quad k = \overline{1, n}$$

şi repartizăm muzicienii astfel:

	Muzicieni care cântă	Muzicieni care ascultă
1)	$a_1, a_2, \ldots, a_n$	$a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}$
2)	a_1, A_1	B_1, a_{n+1}
3)	a_2, A_2	B_2, a_{n+2}
...	....	....
n)	a_{n-1}, A_{n-1}	B_{n-1}, a_{2n-1}
$n+1$)	a_n, A_n	B_n, a_{2n}

G38. *Mulţimea $A \subset \mathbb{Z}$ are cinci elemente. Adunând în toate modurile posibile* *câte trei elemente din mulţime, obţinem următoarele* 10 *sume:* 3*,* 6*,* 8*,* 10*,* 11*,* 13*,* 15*,* 16*,* 18*,* 20*. Determinaţi mulţimea A.* (*În legătură cu o problemă de concurs din Iugoslavia.*)

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $A = \{a, b, c, d, e\}$ cu $a < b < c < d < e$ şi fie $S = a + b + c + d + e$. Adunând cele 10 sume din enunţ obţinem 120. Deoarece în această sumă fiecare element al mulţimii A apare exact de 6 ori, rezultă că $6S = 120$, deci $S = 20$. Prin urmare, adunând în toate modurile posibile câte două elemente din mulţime, obţinem următoarele 10 rezultate: 17 $(= 20 - 3)$, 14 $(= 20 - 6)$, 12, 10, 9, 7, 5, 4, 2, 0. Acum, din $a + b = 0$ şi $a + c = 2$, găsim $b = -a$ şi $c = 2 - a$. Apoi, din $e + d = 17$ şi $e + c = 14$, deducem că $d = -e + 17$ şi $c = -e + 14$, deci $e = a + 12$. Aşadar, putem scrie $A = \{a, -a, -a + 2, -a + 5, a + 12\}$. A treia sumă (în ordine crescătoare) este $a + d$ sau $b + c$ şi este egală cu 4. Cum $a + d = a - a + 5 = 5$, rămâne doar $b + c = -a - a + 2 = -2a + 2 = 4$, de unde rezultă că $a = -1$. În concluzie, avem $A = \{-1, 1, 3, 6, 11\}$.

G39. *Fie* $x_i \in \mathbb{R}$*,* $i = \overline{1, n}$*, unde* $n \geq 2003$*, astfel încât*

$$\begin{cases} x_1 - (n+1)\,x_2 + nx_3 \geq n - 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} - (n+1)\,x_{n-1} + nx_n \geq n - 1 \\ x_{n-1} - (n+1)\,x_n + nx_1 \geq n - 1 - n^2 \\ x_n - (n+1)\,x_1 + nx_2 \geq 2n - 1. \end{cases}$$

Dacă $x_1 = 1$*, să se calculeze* x_{2003}*.*

Romeo Cernat, Iaşi

Soluţie. Cu notaţiile $y_k = x_k - k + 1$, $k = \overline{1, n}$, sistemul dat devine:

$$y_1 - (n+1)\,y_2 + ny_3 \geq 0,\ y_2 - (n+1)\,y_3 + ny_4 \geq 0,\ \ldots\ ,\ y_n - (n+1)\,y_1 + ny_2 \geq 0, \quad (1)$$

de unde, prin adunare, obţinem $0 \geq 0$. Aşadar, toate inegalităţile din sistemul (1) trebuie să fie egalităţi, adică

$$y_1 - y_2 = n\,(y_2 - y_3)\,,\quad y_2 - y_3 = n\,(y_3 - y_4)\,,\quad \ldots\quad ,\ y_n - y_1 = n\,(y_1 - y_2)\,. \quad (2)$$

Înmulţind membru cu membru relaţiile din sistemul (2), obţinem

$$\begin{aligned} &(y_1 - y_2)\,(y_2 - y_3) \cdot \ldots \cdot (y_{n-1} - y_n)\,(y_n - y_1) = \\ &= n^n\,(y_1 - y_2)\,(y_2 - y_3) \cdot \ldots \cdot (y_{n-1} - y_n)\,(y_n - y_1)\,, \end{aligned}$$

de unde rezultă că una din paranteze este zero şi atunci conform cu (2), avem $y_1 = = y_2 = \cdots = y_n$. Prin urmare, $1 = x_1 = x_2 - 1 = x_3 - 2 = \cdots = x_n - n + 1$, deci $x_{2003} = 2003$.

G40. *Comparaţi numerele reale a şi b, ştiind că* $a^2 - 14a + b^2 + 6b + 33 = 0$*.*

Bogdan Răducanu, elev, Iaşi

Soluţia I (un grup de elevi de la **Colegiul Naţional** din Iaşi şi **Alexandru Negrescu**, elev, Botoşani**)**. Relaţia din enunţ se scrie $(a - 7)^2 + (b + 3)^2 = 25$. Deducem că $|a - 7| \leq 5$ şi $|b + 3| \leq 5$, de unde $a \in [2, 12]$ şi $b \in [-8, 2]$. Deci $b \leq 2 \leq a$ şi cum $a \neq b$ (prin verificare directă), rezultă că $a > b$.

Soluţia II. Dacă facem notaţia $a = b + t$ problema revine la compararea lui t cu zero. Înlocuind pe a în egalitatea dată, obţinem $2b^2 + 2b\,(t - 4) + t^2 - 14t + 33 = 0$, ecuaţie care are soluţie dacă şi numai dacă $\Delta = t^2 - 8t + 16 - 2t^2 + 28t - 66 =$

$= -t^2 + 20t - 50 \geq 0$. De aici, rezultă că $t \in \left[10 - 5\sqrt{2}, 10 + 5\sqrt{2}\right]$, deci $t > 0$. Aşadar, avem $a > b$.

G41. *Dacă $0 < x \leq y \leq z$, să se arate că*

$$3 \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{x}{z} + 1 + \frac{z}{x} \leq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Prima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor. Inegalitatea a doua este echivalentă cu $x^2y + z^2x + y^2z \leq x^2z + y^2x + z^2y$, sau $(y - x)(z - x)(z - y) \geq 0$, care este adevărată în virtutea ipotezei $0 < x \leq y \leq z$. Inegalitatea a treia este echivalentă cu $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq \frac{x}{z} + 1$, adică $(z - y)(x - y) \leq 0$, care este adevărată. În sfârşit, pentru a demonstra ultima inegalitate vom folosi din nou inegalitatea mediilor. Avem: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 \geq 2 \cdot \frac{x}{z}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \geq 3$, $\left(\frac{z}{x}\right)^2 + 1 \geq 2 \cdot \frac{z}{x}$. Adunând aceste relaţii, obţinem $2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) \geq 2\left(\frac{x}{z} + 1 + \frac{z}{x}\right)$, q.e.d.

G42. *Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, dacă $[x] + [x + a] = [bx]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

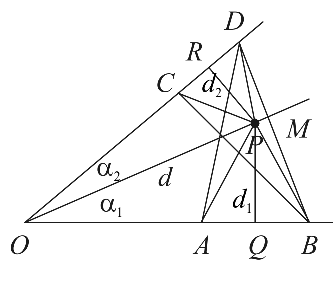
Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Luând $x = 0$ în egalitatea dată găsim $[a] = 0$, deci $a \in [0, 1)$. Din relaţiile $x - 1 + x + a - 1 < [x] + [x + a] = [bx] \leq bx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $a - 2 \leq x(b - 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $b = 2$. Aşadar, avem $[x] + [x + a] = [2x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde, având în vedere că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, deducem că $[x + a] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1). De aici, luând $x = \frac{1}{2}$, obţinem $a + \frac{1}{2} \in [1, 2)$, adică $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap [0, 1) = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci putem alege un $x_0 \in \left(1 - a, \frac{1}{2}\right)$ şi avem $0 < x_0 + \frac{1}{2} < 1 < x_0 + a$. În acest caz însă $\left[x_0 + \frac{1}{2}\right] = 0$, iar $[x_0 + a] \geq 1$, deci relaţia (1) nu este valabilă. Prin urmare, avem $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, valori care verifică egalitatea dată.

G43. *Fie $\widehat{xOy}$ un unghi oarecare şi P un punct în interiorul său. Se consideră punctele $A, B \in [Ox$ cu $A \in (OB)$ şi $C, D \in [Oy$ cu $C \in (OD)$ astfel încât triunghiurile PAB şi PCD să fie echilaterale. Arătaţi că dreptele OP, AD şi BC sunt concurente dacă şi numai dacă P se află pe bisectoarea unghiului dat.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Fie $OP \cap BD = \{M\}$, $PR \perp CD$, $PQ \perp AB$ ($R \in CD$, $Q \in AB$) şi $PQ = d_1$, $PR = d_2$, $OP = d$. Avem:



$$\frac{MB}{MD} = \frac{OB \sin \alpha_1}{OD \sin \alpha_2} = \frac{OB\, d_1}{OD\, d_2}\ , \quad OQ = \sqrt{d^2 - d_1^2}\ ,$$

$$OA = OQ - AQ = \sqrt{d^2 - d_1^2} - d_1/\sqrt{3},$$

$$OB = OQ + QB = \sqrt{d^2 - d_1^2} + d_1/\sqrt{3},$$

$$OR = \sqrt{d^2 - d_1^2}, \quad OC = \sqrt{d^2 - d_2^2} - d_2/\sqrt{3}, \quad OD = \sqrt{d^2 - d_2^2} + d_2/\sqrt{3}.$$

Cu aceste observaţii, putem scrie succesiv: OP, AD şi BC sunt concurente $\Leftrightarrow$

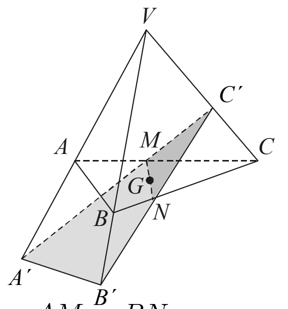
$$\frac{MB}{MD} \cdot \frac{CD}{CO} \cdot \frac{AO}{AB} = 1 \Leftrightarrow \frac{OB \cdot d_1}{OD \cdot d_2} \cdot \frac{2d_2/\sqrt{3}}{OC} \cdot \frac{OA}{2d_1/\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow OA \cdot OB = OC \cdot OD \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{d^2 - d_1^2} - d_1/\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{d^2 - d_1^2} + d_1/\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{d^2 - d_2^2} - d_2/\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{d^2 - d_2^2} + d_2/\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow d^2 - d_1^2 - d_1^2/3 = d^2 - d_2^2 - d_2^2/3 \Leftrightarrow d_1 = d_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

G44. *Fie $VABC$ o piramidă, iar G centrul de greutate al $\triangle ABC$. Un plan ce trece prin G taie dreptele VA, VB, VC în A', B' şi respectiv C'. Să se arate că* $\frac{VA}{VA'} + \frac{VB}{VB'} + \frac{VC}{VC'} = 3$.

Constantin Cocea, Iaşi



Soluţie. Fie $\{N\} = B'C' \cap BC$ şi $\{M\} = A'C' \cap AC$. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiurile VAC şi VBC, obţinem: $\frac{A'A}{A'V} \cdot \frac{C'V}{C'C} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$ şi $\frac{B'B}{B'V} \cdot \frac{C'V}{C'C} \cdot \frac{NC}{NB} = 1$, de unde rezultă că $\frac{A'A}{VA'} + \frac{B'B}{VB'} = \frac{CC'}{VC'}\left(\frac{AM}{MC} + \frac{NB}{NC}\right) = \frac{CC'}{VC'}$ sau $\frac{VA' - VA}{VA'} + \frac{VB' - VB}{VB'} = \frac{VC - VC'}{VC'}$ sau $\frac{VA}{VA'} + \frac{VB}{VB'} + \frac{VC}{VC'} = 3$. (Am folosit că $G \in MN$ implică $\frac{AM}{MC} + \frac{BN}{NC} = 1$.)

G45. *Fie $SABC$ un tetraedru în care $\triangle ABC$ nu este echilateral, iar muchiile $[SA], [SB], [SC]$ nu sunt toate congruente. Demonstraţi că există şase puncte $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pe dreptele SA, SB, SC, BC, AC şi respectiv AB astfel ca patrulaterele $A_1B_1A_2B_2$, $B_1C_1B_2C_2$ şi $A_1C_1A_2C_2$ să fie trapeze isoscele ($A_1B_1 \| A_2B_2$, $A_1C_1 \| A_2C_2$, $B_1C_1 \| B_2C_2$) dacă şi numai dacă*

$$SA^2\left(AB^2 - AC^2\right) + SB^2\left(BC^2 - BA^2\right) + SC^2\left(CA^2 - CB^2\right) = 0.$$

Daly Marciuc, Satu Mare

Soluţie. Să presupunem că $A_1B_1A_2B_2$, $B_1C_1B_2C_2$ şi $A_1C_1A_2C_2$ sunt trapeze isoscele în modul indicat. Din $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ rezultă că $B_2A_2 \parallel AB$ şi apoi, analog, rezultă că $B_2C_2 \parallel BC$ şi $A_2C_2 \parallel AC$. De aici, deducem că $AB_2A_2C_2$ şi $BA_2B_2C_2$ sunt paralelograme, deci C_2 este mijlocul lui AB. Analog, obţinem că B_2 şi A_2 sunt mijloacele laturilor AC şi BC.

Din $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$ şi $B_1C_1 \parallel BC$ rezultă că

$$\frac{A_1A}{SA} = \frac{B_1B}{SB} = \frac{C_1C}{SC} = k. \tag{1}$$

Notând $BC = a$, $AC = b$ şi $AB = c$, avem: $A_1B_2^2 = A_2B_1^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k^2SA^2 + \frac{b^2}{4} - k \cdot \frac{SA^2 + b^2 - SC^2}{2} = k^2SB^2 + \frac{a^2}{4} - k \cdot \frac{SB^2 + a^2 - SC^2}{2}, \text{ deci}$$

$$A_1B_2^2 = A_2B_1^2 \Leftrightarrow 2k\left(SB^2 - SA^2\right) = a^2 - b^2. \tag{2}$$

În mod analog, găsim echivalenţa:

$$B_1C_2^2 = C_1B_2^2 \Leftrightarrow 2k\left(SB^2 - SC^2\right) = c^2 - b^2. \tag{3}$$

În fine, din (2) şi (3) rezultă că

$$SA^2\left(c^2 - b^2\right) + SB^2\left(a^2 - c^2\right) + SC^2\left(b^2 - a^2\right) = 0. \tag{4}$$

Reciproc, relaţia (4) poate fi scrisă astfel:

$$\frac{a^2 - b^2}{2\left(SB^2 - SA^2\right)} = \frac{c^2 - b^2}{2\left(SB^2 - SC^2\right)} \overset{\text{not}}{=} k. \tag{5}$$

Alegem A_1, B_1, C_1 pe SA, SB, SC astfel încât să avem relaţia (1). În acest caz din (5) rezultă că $A_1B_1A_2B_2$ şi $B_1C_1B_2C_2$ sunt trapeze isoscele, unde A_2, B_2 şi C_2 sunt mijloacele laturilor BC, AC şi AB ($A_1B_1 \parallel AB \parallel A_2B_2$ etc.). Dacă $A_1B_1A_2B_2$ şi $B_1C_1B_2C_2$ sunt trapeze isoscele înseamnă că $A_1A_2 = B_1B_2$ şi $B_1B_2 = C_1C_2$, deci $A_1A_2 = C_1C_2$, adică şi $A_1C_1A_2C_2$ este isoscel.

B. Nivel liceal

L36. *Fie $\triangle ABC$ şi $\mathcal{M}$ triunghiul său median. Dacă P este un punct aflat în interiorul sau pe laturile lui $\mathcal{M}$, iar A', B', C' sunt intersecţiile dreptelor AP, BP, CP cu laturile BC, CA şi respectiv AB, atunci* $\dfrac{1}{4} < \dfrac{AP \cdot BP \cdot CP}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \dfrac{8}{27}$.

Marian Ionescu, Piteşti

Soluţie. Notăm $S_1 = \sigma(PBC)$, $S_2 = \sigma(PCA)$, $S_3 = \sigma(PAB)$ şi $S = \sigma(ABC)$. Se stabilesc cu uşurinţă relaţia $\dfrac{AP}{AA'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S}$ şi analoagele şi se deduce relaţia lui Gergonne $\dfrac{AP}{AA'} + \dfrac{BP}{BB'} + \dfrac{CP}{CC'} = 2$. Cu inegalitatea mediilor obţinem $2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{AP}{AA'} \cdot \dfrac{BP}{BB'} \cdot \dfrac{CP}{CC'}}$, de unde deducem a doua parte a dublei inegalităţi din enunţ. Pentru prima parte, observăm mai întâi că, dacă P se află în interiorul sau pe laturile triunghiului $\mathcal{M}$, au loc inegalităţile $S_2+S_3 \geq S_1$, $S_3+S_1 \geq S_2$ şi $S_1+S_2 \geq S_3$. Notând $x = \dfrac{1}{2}(S_2 + S_3 - S_1)$, $y = \dfrac{1}{2}(S_3 + S_1 - S_2)$, $z = \dfrac{1}{2}(S_1 + S_2 - S_3)$, $t = x + y + z$ şi observând că $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ (numai unul poate fi nul), $t > 0$, avem:

$$\frac{AP}{AA'} \cdot \frac{BP}{BB'} \cdot \frac{CP}{CC'} = \frac{(S_2 + S_3)(S_3 + S_1)(S_1 + S_2)}{S^3} =$$
$$= \frac{(t + x)(t + y)(t + z)}{8t^3} > \frac{t^3 + t^2(x + y + z)}{8t^3} = \frac{2t^3}{8t^3} = \frac{1}{4}.$$

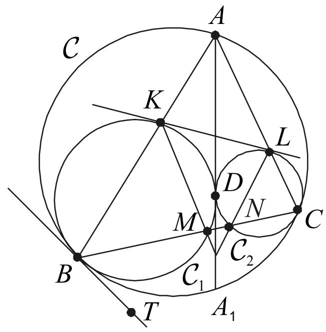
Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi.

Notă. Această problemă apare în articolul *"About elementary inequalities in triangle"* (**M. Dincă**, **M. Bencze**) din revista *Octogon Math. Magazine*, 9 (2001), no. 1B, p. 472. Aici nu se cere ca punctul P să fie în interiorul sau pe laturile triunghiului $\mathcal{M}$, dar soluţia prezentată este incorectă.

L37. *Fie cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}$ astfel încât $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior în D, iar cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente interior lui $\mathcal{C}$ în B, respectiv C. Tangenta* *comună interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi A_1, dreapta AB taie $\mathcal{C}_1$ în K, iar AC taie $\mathcal{C}_2$ în L. Să se arate că* $\dfrac{1}{DA}+\dfrac{1}{DA_1}=\dfrac{2}{KL}$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Fie $\{M\}=\mathcal{C}_1\cap BC$, $\{N\}=\mathcal{C}_2\cap BC$ şi T un punct pe tangenta în B la cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.



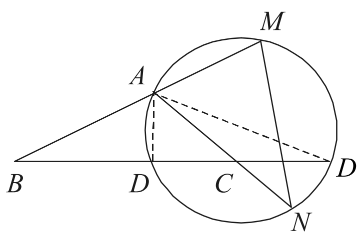
Arătăm că dreapta KL este tangenta comună exterioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. Într-adevăr, avem $m(\widehat{MKB})=m(\widehat{MBT})=m(\widehat{CBT})=m(\widehat{CAB})$, deci $MK\parallel CA$. Ca urmare, $\widehat{MKL}\equiv\widehat{KLA}$. Cum $\widehat{KLA}\equiv\widehat{CBA}$, deoarece $\triangle KLA\sim\triangle CBA$ (fapt ce decurge din $AK\cdot AB=AL\cdot AC=AD^2$), rezultă că $\widehat{MKL}\equiv\widehat{CBA}$. Deci $\widehat{MKL}\equiv\widehat{MBA}$, adică KL este tangentă la cercul $\mathcal{C}_1$. Analog se arată că drepta KL este tangentă la $\mathcal{C}_2$.

Aplicăm teorema lui Casey pentru cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, cercurile degenerate A, A_1 tangente interior la $\mathcal{C}$ şi obţinem relaţia $AD\cdot A_1D+AD\cdot A_1D=AA_1\cdot KL$ sau $\dfrac{2}{KL}=\dfrac{AA_1}{AD\cdot A_1D}$, adică $\dfrac{2}{KL}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{A_1D}$.

L38. *Fie $\triangle ABC$ şi punctele $D,D'\in BC$ conjugate armonic în raport cu vârfurile B şi C. Cercul circumscris $\triangle ADD'$ intersectează AB în M şi AC în N. Arătaţi că, dacă $MN\perp BC$, atunci $[AD$ şi $[AD'$ sunt bisectoarele unghiului $\widehat{A}$ (interioară şi exterioară) sau $m(\widehat{A})=90°$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Avem $MN\perp DD'\Leftrightarrow MD^2+ND'^2=MD'^2+ND^2$ (1). Dacă notăm $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{D'B}{D'C}=\alpha$, atunci $BD=\dfrac{\alpha a}{1+\alpha}$, $CD=$ $=\dfrac{a}{1+\alpha}$, $BD'=\dfrac{\alpha a}{\alpha-1}$, $CD'=\dfrac{a}{\alpha-1}$ (2). Exprimând puterea punctelor B şi C faţă de cercul (ADD'), vom obţine relaţiile: $c\cdot BM=BD\cdot BD'$ şi $b\cdot CN=CD\cdot CD'$ sau



$$BM=\frac{\alpha^2a^2}{c\,(\alpha^2-1)}\quad\text{şi}\quad CN=\frac{a^2}{b\,(\alpha^2-1)}.\qquad(3)$$

Utilizând teorema cosinusului în $\triangle BMD$, $\triangle CND'$, $\triangle BMD'$ şi $\triangle CND$, (1) se scrie

$$\big(BM^2+BD^2-2BM\cdot BD\cos B\big)+\big(CN^2+CD'^2-2CN\cdot CD'\cos C\big)=$$
$$=\big(BM^2+BD'^2-2BM\cdot BD'\cos B\big)+\big(CN^2+CD^2+2CN\cdot CD\cos C\big)$$

şi, ţinând seama de (2) şi (3), găsim $-4\alpha\left(\alpha^2-1\right)a^2+\dfrac{4\alpha^3a^3}{c}\cos B-\dfrac{4a^3\alpha}{b}\cos C=0.$ Din nou utilizând teorema cosinusului, obţinem

$$-\left(\alpha^2-1\right)2b^2c^2+\alpha^2b^2\left(a^2+c^2-b^2\right)-c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)=0\quad\text{sau}$$
$$b^2\left(a^2-b^2-c^2\right)\alpha^2-c^2\left(a^2-b^2-c^2\right)=0,$$

ultima echivalentă cu $\alpha=\pm\dfrac{c}{b}$ sau $a^2=b^2+c^2$, de unde rezultă concluzia.

L39. *Determinaţi toate numerele naturale nenule n pentru care* $\dfrac{an\,(an+2)}{p\,(p+1)}$ *este pătrat perfect, unde $a, p \in \mathbb{N}^*$.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Fie $\dfrac{a^2n^2+2an}{p\,(p+1)} = y^2$, $y \in \mathbb{N}^*$. Avem $(an+1)^2 - p\,(p+1)\,y^2 = 1$, de unde, cu $x = an+1$, obţinem ecuaţia lui Pell: $x^2 - p\,(p+1)\,y^2 = 1$, care are soluţia fundamentală $(x_0, y_0) = (2p+1, 2)$ şi soluţia generală

$$x_k = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k + \left(x_0 - y_0\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(2p+1+2\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k + \left(2p+1-2\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k}\right],$$
$$y_k = \frac{1}{2\sqrt{p\,(p+1)}}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k - \left(x_0 - y_0\sqrt{p\,(p+1)}\right)^k\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{p\,(p+1)}}\left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} - \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k}\right].$$

Prin urmare, avem:

$$n_k = \frac{1}{2a}\left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k} - 2\right]$$

care este soluţie dacă $2a \mid \left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k} - 2\right]$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi.

L40. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât* $\det\left(A^2B + AB^2\right)$ *este impar. Să se arate că $A + \alpha B$ este inversabilă pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Marian Ursărescu, Roman

Soluţie. Deoarece $\det\left(A^2B + AB^2\right) = \det A \cdot \det(A+B) \cdot \det B$ este un număr impar, rezultă că $\det A$, $\det(A+B)$ şi $\det B$ sunt numere impare. Fie polinomul $p(X) = \det(A + XB) = \det A + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + (\det B)\,X^n$. Cum $p(1) = \det(A+B) = \det A + a_1 + \cdots + a_{n-1} + \det B$ este număr impar, înseamnă că şi $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ este număr impar. Să presupunem acum că polinomul p are o rădăcină raţională $\alpha = \dfrac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p,q) = 1$. În acest caz, avem $p \mid \det A$ şi $q \mid \det B$, deci p şi q sunt impare. Din $p(\alpha) = 0$, rezultă că $(\det A)\,q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + (\det B)\,p^n = 0$, sau $(\det A)\,q^n + (\det B)\,p^n + $ $+ a_1\left(p^{n-1}q - 1\right) + \cdots + a_{n-1}\left(p^{n-1}q - 1\right) = -\left(a_1 + \cdots + a_{n-1}\right)$, egalitate care este falsă deoarece membrul din stânga este par, iar cel din dreapta este impar. Prin urmare $p(\alpha) = \det(A + \alpha B) \neq 0$, pentru orice număr raţional α, adică matricea $A + \alpha B$ este inversabilă oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{Q}$.

L41. *Demonstraţi că grupul simetric S_{32} nu are elemente de ordin* 2002.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Presupunem că există $\sigma \in S_{32}$ un element de ordin 2002. Fie $\sigma =$ $= \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ descompunerea sa în produs de cicli disjuncţi cu ordinele k_1, k_2, $\ldots$,

k_n. Avem $k_1+k_2+\cdots+k_n=32$ şi $[k_1,k_2,\ldots,k_n]=2002$. Cum $2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, rezultă că există k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4}, nu neapărat distincte, astfel încât $2\mid k_{i1}$, $7\mid k_{i2}$, $11\mid k_{i3}$, $13\mid k_{i4}$. Dacă k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4} sunt distincte, atunci $k_{i1}+k_{i2}+k_{i3}+k_{i4}\geq 33$, ceea ce este fals. Dacă două, sau mai multe, din cele patru ordine coincid, atunci ordinul corespunzător se divide cu produsul factorilor ce-i corespund, fiind mai mare sau egal decât produsul aceloraşi factori şi deci mai mare sau egal decât suma lor. Astfel, în acest caz obţinem iarăşi că suma ordinelor este mai mare sau egală cu 33, ceea ce este fals.

L42. *Fie* $(A,+,\cdot)$ *un inel comutativ şi finit, cu cel puţin* 5 *elemente şi cu* $1+1\in A$ *inversabil. Fie* $M=\left\{x\in A\mid x^2=1\right\}$, $I=\left\{x\in A\mid x^2=x\right\}$. *Să se arate că* $\operatorname{card}M=\operatorname{card}I<\operatorname{card}A\,/2$.

Ovidiu Munteanu, Braşov

Soluţie. Dacă $a\in A$, atunci $2^{-1}(1+a)\in A$ şi avem: $2^{-1}(1+a)\in I\Leftrightarrow \left(2^{-1}(1+a)\right)^2=2^{-1}(1+a)\Leftrightarrow 2^{-2}\left(1+2a+a^2\right)=2^{-1}(1+a)\Leftrightarrow 1+2a+a^2= =2(1+a)\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a\in M$, de unde rezultă egalitatea $\operatorname{card}M=\operatorname{card}I$.

Să demonstrăm acum partea a doua a relaţiei date. Dacă avem $\operatorname{card}I=2$, atunci $\operatorname{card}A\geq 5>2\operatorname{card}I$. În continuare ne ocupăm de cazul în care $\operatorname{card}I>2$. În această situaţie, fie $a\in I\setminus\{0,1\}$ şi atunci $1-a\in I\setminus\{0,1,a\}$. Într-adevăr, dacă $1-a=a$, rezultă că $a=2^{-1}$, adică a este inversabil şi din $a^2=a$ obţinem $a=1$, ceea ce este fals. Avem deci $\operatorname{card}I>3$. Fie $J=\{x\in A\mid -x\in I\}$ şi atunci $I\cap J=\{0\}$, pentru că $x\in I\cap J$ înseamnă $x=-x=x^2$, deci $2x=0$, adică $x=0$. Pe de altă parte, avem $I\cap M=\{1\}$ şi $J\cap M=\{-1\}$. Cum I, J, M au acelaşi număr de elemente, rezultă că are loc $\operatorname{card}A\geq 3\operatorname{card}I-3>2\operatorname{card}I$.

L43. *Determinaţi polinoamele* $P\in\mathbb{R}[X]$ *pentru care* $P(z)\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Polinoamele de gradul 1, $P(X)=aX+b$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$ verifică ipoteza, deci sunt soluţii ale problemei. Arătăm că acestea sunt singurele soluţii.

Fie $P\in\mathbb{R}[X]$ cu $\operatorname{grad}P=n\geq 2$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+ +\cdots+a_n$ $(a_0\neq 0)$ funcţia polinomială asociată acestuia. Fie $a_0>0$ (la fel se va proceda dacă $a_0<0$). Observăm că $\forall m\in\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x)=m$ are numai soluţii reale (n soluţii), în caz contrar ar exista $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ şi $f(z)=m\in\mathbb{R}$.

Dacă n este par, atunci $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty$. De aici şi din continuitatea lui f, rezultă că $\operatorname{Im}f=[m,\infty)$, unde $m=\inf\{f(x);x\in\mathbb{R}\}$. Pentru $k<m$ ecuaţia $f(x)=k$ nu are soluţii reale, fals.

Dacă n este impar, avem $f'(x)=na_0x^{n-1}+\cdots$, deci $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f'(x)=+\infty$ şi $f'(x)>0$ pentru $|x|$ suficient de mare. Deci f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty,\alpha)$ şi (β,∞) $(\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ convenabil aleşi). De aici, din continuitatea funcţiei f (deci mărginirea ei pe orice interval $[\alpha,\beta]$) şi din faptul că $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deducem că $\exists\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(\beta)\geq f(x)$, $\forall x\in(-\infty,\beta]$. Ca urmare ecuaţiile $f(x)=k$, cu $k>f(\beta)$ au soluţie reală unică, fals.

L44. *Fie* $n\geq 2$ *număr natural, iar* $f_0,f_1,f_2,\ldots$ *un şir de polinoame definit prin* $f_0=(X+1)^n$, $f_{p+1}=X\cdot f_p'$, $\forall p\geq 0$. *Definim încă* $h_p=f_p-\sigma_1^{p-1}f_{p-1}+ +\cdots+(-1)^{p-1}\sigma_{p-1}^{p-1}f_1$, $\forall p\geq 1$, *unde* $\sigma_k^n=\sum\limits_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}i_1i_2\ldots i_k$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$

sunt sumele simetrice fundamentale ale numerelor $1, 2, \ldots, n$. *Să se arate că* $h_p = n(n-1)\cdots(n-p+1) X^p (X+1)^{n-p}$, $\forall p = 1, 2, \ldots$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Să arătăm că $h_{p+1} = Xh'_p - ph_p$. Avem $h_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sigma_k^p f_{p+1-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(\sigma_k^{p-1} + p\sigma_{k-1}^{p-1}\right) f_{p+1-k} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \sigma_k^{p-1} f_{p+1-k} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k p\sigma_{k-1}^{p-1} f_{p+1-k} =$$

$= X \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \sigma_k^{p-1} f'_{p-k} - p \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sigma_{k-1}^{p-1} f_{p+1-k} = Xh'_p - ph_p$ (am considerat $\sigma_0^n = 1$ şi $\sigma_k^n = 0$, pentru $k < 0$ sau $k > n$).

Demonstraţia se poate face prin inducţie şi se bazează pe formula stabilită. Direct din enunţ, deducem că $h_1 = f_1 = Xf'_0 = nX(X+1)^{n-1}$. Să presupunem acum că are loc egalitatea $h_p = n(n-1)\cdots(n-p+1) X^p (X+1)^{n-p}$. În acest caz, putem scrie:

$$\begin{aligned} h_{p+1} = Xh'_p - ph_p &= n(n-1)\cdots(n-p+1) pX^p (X+1)^{n-p} + \\ &+ n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p) X^{p+1} (X+1)^{n-p+1} - \\ &- pn(n-1)\cdots(n-p+1) X^p (X+1)^{n-p} = \\ &= n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p) X^{p+1} (X+1)^{n-p+1}. \end{aligned}$$

Să mai observăm că, deoarece $h_n = n!\,X^n$, $h_{n+1} = Xn!\,nX^{n-1} - n\,n!\,X^n = 0$, rezultă că $h_p = 0$, pentru orice $p \geq n+1$.

L45. *Fie* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *continuă. Dacă funcţia* $F : [0,\infty) \to R$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ *este mărginită, să se arate că* $\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 xf(nx)\,dx = 0$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Dacă în integrala $I_n = \int_0^1 nxf(nx)\,dx$ facem schimbarea de variabilă $nx = t$, obţinem $I_n = \int_0^n \frac{t}{n} f(t)\,dt$. Fie $\varepsilon \in (0,1)$. Avem

$$|I_n| \leq \int_0^{n\varepsilon} \frac{n\varepsilon}{n} f(t)\,dt + \int_{n\varepsilon}^{n} \frac{n}{n} f(t)\,dt = \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(t)\,dt + \int_{n\varepsilon}^{n} f(t)\,dt. \quad (1)$$

Deoarece F este mărginită, există $M > 0$ astfel încât $F(x) < M$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ (2). Cum f este continuă, rezultă că F este derivabilă şi $F'(x) = f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, deci F este crescătoare. De aici, având în vedere mărginirea funcţiei F, deducem că există $\lim_{x\to\infty} F(x)$ şi este finită. Prin urmare, $\lim_{x\to\infty} (F(x) - F(x\varepsilon)) = \lim_{x\to\infty} \int_{x\varepsilon}^{x} f(t)\,dt = 0$, de unde rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ are loc:

$$\left| \int_{n\varepsilon}^{n} f(t)\,dt \right| = \int_{n\varepsilon}^{n} f(t)\,dt < \varepsilon. \quad (3)$$

Din relaţiile (1), (2), şi (3) obţinem $|I_n| < \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(t)\,dt + \varepsilon < \varepsilon(M+1)$, $\forall n \geq n_0$, ceea ce înseamnă că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Probleme propuse

Clasele primare

P.64. Într-o piesă de teatru sunt 12 personaje, copii şi adulţi. Câţi copii joacă în piesă, dacă la fiecare doi adulţi corespunde un copil?
(*Clasa I*) **Alexandra Radu, elevă, Iaşi**

P.65. Se dau jetoanele $\boxed{\text{AT}}$ $\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\text{CRE}}$ $\boxed{\text{ŢII}}$ $\boxed{\text{AŢII}}$ $\boxed{\text{RECR}}$ $\boxed{\text{EA}}$ $\boxed{\text{RE}}$ $\boxed{\text{REC}}$. Care este numărul cel mai mare de jetoane cu care se poate forma cuvântul "RECREAŢII"?
(*Clasa I*) **Oxana Pascal, elevă, Rep. Moldova**

P.66. Într-o livadă sunt tot atâţia peri cât şi meri. Sunt 6 rânduri cu peri şi 4 rânduri cu meri. Numărul merilor de pe un rând întrece cu 5 numărul perilor de pe un rând. Câţi pomi sunt în acea livadă?
(*Clasa II-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.67. Dintr-o mulţime de 5 copii, orice grupare de trei conţine cel puţin o fată. Câţi băieţi pot fi în mulţime?
(*Clasa II-a*) **Andreea Surugiu, elevă, Iaşi**

P.68. Dacă Ina ar împărţi numărul nucilor culese de ea la numărul nucilor culese de sora sa, ar obţine 7 rest 6. Ştiind că Ina a cules cu 78 nuci mai mult decât sora sa, aflaţi câte nuci a cules fiecare.
(*Clasa III-a*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

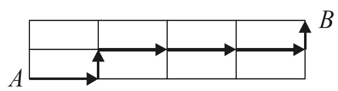
P.69. Într-o împărţire cu rest, în care împărţitorul este mai mare ca nouă, mărind împărţitorul cu o unitate şi efectuând din nou împărţirea obţinem câtul 9 şi restul 0. Aflaţi câtul şi restul împărţirii iniţiale.
(*Clasa III-a*) **Înv. Mariana Toma, Muncelu de Sus (Iaşi)**

P.70. Într-o tabără internaţională de matematică sunt elevi din patru ţări: Bulgaria, Grecia, Republica Moldova şi România. Dacă 21 elevi nu sunt din Bulgaria, 23 nu sunt din Grecia, 22 elevi nu sunt din Republica Moldova şi 21 elevi nu sunt din România, câţi elevi sunt din fiecare ţară?
(*Clasa III-a*) **Georgiana Ciobanu, elevă, Iaşi**

P.71. Fiecare pătrat din figura alăturată $\square\square\square$ se colorează cu o altă culoare. În câte moduri putem face acest lucru având la dispoziţie patru culori?
(*Clasa IV-a*) **Înv. Cătălina Raţă, Coarnele Caprei (Iaşi)**

P.72. Aruncăm două zaruri şi adunăm punctele de pe cele două feţe de deasupra. *a*) Câte sume diferite putem obţine? *b*) Câte sume se pot forma în trei moduri diferite?
(*Clasa IV-a*) **Înv. Gheorghe Toma, Muncelu de Sus (Iaşi)**

P.73. În figura alăturată este pus în evidenţă un drum format din şase segmente care pleacă din A şi ajunge în B. Câte drumuri de felul acesta se pot construi?



(*Clasa IV-a*) **Înv. Constantin Raţă, Coarnele Caprei (Iaşi)**

Clasa a V-a

V.46. Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $11^n + 9^n$ şi $11^n - 9^n$ sunt simultan pătrate perfecte.

Andrei - Sorin Cozma, elev, Iaşi

V.47. Să se arate că numărul $\overline{51a51a}$ nu poate fi scris ca produsul a patru numere prime.

Cătălin Budeanu, Iaşi

V.48. Se consideră fracţiile $x_1 = \dfrac{9}{14}$, $x_2 = \dfrac{10}{21}$, $x_3 = \dfrac{11}{28}$, $\ldots$. Scrieţi fracţia x_{1000} şi apoi ordonaţi crescător primele 1000 de fracţii.

Dumitru Gherman, Paşcani

V.49. Determinaţi numărul tripletelor $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ dacă $3a + 2b + c = 598$ şi $a + 2b + 3c = 602$. Dacă în plus $a < b < c$, determinaţi a, b şi c.

Gheorghe Iurea, Iaşi

V.50. Câte numere de 7 cifre se pot scrie folosind cifrele 1, 2 şi 3, astfel încât 1 să apară de 2 ori, 2 să apară de 3 ori şi 3 să apară de 2 ori? Dar dacă în locul cifrelor 1, 2 şi 3 considerăm cifrele 0, 1 şi respectiv 2?

Petru Asaftei, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.46. Suma dintre opusul unui număr natural şi inversul altui număr natural este $-119,992$. Să se determine numerele.

Ciprian Baghiu, Iaşi

VI.47. Aflaţi restul împărţirii numărului $N = 2844^{2844} + 4107^{4107} + 6398^{6398}$ prin 79.

Tamara Culac, Iaşi

VI.48. *a*) Într-o proporţie cu termeni nenuli, un extrem este suma celorlalţi trei termeni dacă şi numai dacă celălalt extrem are inversul egal cu suma inverşilor celorlalţi trei termeni.
b) Dacă din patru numere raţionale nenule distincte unul este suma celorlalţi trei, iar altul are inversul egal cu suma inverselor celorlaltor trei, atunci numerele sunt termeni ai unei proporţii.

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

VI.49. Să se arate că orice număr natural relativ prim cu 10 admite un multiplu care se scrie folosind numai cifra 3.

Lucian - Georges Lăduncă, Iaşi

VI. 50. Fie $\triangle ABC$ cu $[AC] \equiv [BC]$, D mijlocul lui $[AB]$, P un punct pe dreapta AB, iar M şi L picioarele perpendicularelor din P pe AC, respectiv BC. Să se arate că $[DM] \equiv [DL]$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Clasa a VII-a

VII.46. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:
a) $x^{100} + x^{77} + x^{50} + x^{21} + x^{10} + x^5 + 1 > 0$;
b) $x^{100} - x^{77} + x^{50} - x^{21} + x^{10} - x^5 + 2 < 0$.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (Suceava)

VII.47. Să se rezolve în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $u^2v + uv^2 = 2u^2 + 2v^2 - 40$.

Mihai Crăciun, Paşcani

VII.48. Dacă $a_i = i + \sqrt{i}$, $\forall i = \overline{1, 2004}$, precizaţi dacă numărul

$$N = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 + \cdots + a_{2001} - a_{2002} - a_{2003} + a_{2004}$$

este negativ, pozitiv sau nul.

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

VII.49. Fie $\triangle ABC$ echilateral şi $D \in (BC)$. Notăm cu M_1, M_2 mijloacele segmentelor $[BD]$, respectiv $[CD]$. Paralela prin M_1 la AC intersectează AB în F, iar paralela prin M_2 la AB intersectează AC în E. Să se arate că dreptele AD, M_1E şi M_2F sunt concurente.

Nicolae Gross şi Lucian Tuţescu, Craiova

VII. 50. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ şi $[CD]$. O paralelă la baze intersectează AD, AC, BD şi BC în punctele E, F, G şi respectiv H. Să se arate că $EH = 3FG$ dacă şi numai dacă DF, CG şi AB sunt drepte concurente.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.46. Să se demonstreze că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} = 2003$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

VIII.47. Pentru $\forall x \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{\left(x^5+x^3+x^2+1\right)\left(x^3+x^2+2\right)+\left(x^4+x^3+x+1\right)\left(x^3+x+2\right)+\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)}{x^6+x^5+x^4+2x^3+x^2+x+1} \geq 6.$$

Mircea Coşbuc, elev, Iaşi

VIII.48. Găsiţi numerele prime p şi q pentru care $p^2 + q = 37q^2 + p$.

Liviu Smarandache, Craiova

VIII.49. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în A cu $AB = AC = a$. Considerăm $MA \perp (ABC)$, $MA = a\sqrt{2}$ şi $N \in AM$ astfel încât $m(\widehat{CN, BM}) = 60^\circ$. Să se afle lungimea segmentului $[AN]$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

VIII.50. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AB = BC$, $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) \leq 90^\circ$ şi fie O mijlocul lui $[BD]$. Pe perpendiculara în O pe planul (ABC) se ia un punct V astfel încât $OV = OB$. Să se arate că $d\,(D, (VAB)) = 2\,d\,(D, (VAC))$ dacă şi numai dacă $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$.

Monica Nedelcu, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.46. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt[2n]{x-2} = 2$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Popescu, Suceava

IX.47. Să se determine şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere strict pozitive pentru care

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n^2 = (-1)^{n-1} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad \forall n \geq 1.$$

Marian Ursărescu, Roman

IX.48. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$. Să se arate că
$$\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \geq \frac{3}{2}.$$
Cezar Lupu, elev, Constanţa

IX.49. Să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel în fiecare din ipotezele:
a) $2m_a + b = 2m_b + a$; *b*) $2m_a + a = 2m_b + b$.

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

IX.50. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ascuţitunghic ABC. Dacă A, B, C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului, iar $A \cdot \overrightarrow{IA} + B \cdot \overrightarrow{IB} + C \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.

Constantin Micu, Melineşti (Dolj)

Clasa a X-a

X.46. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $2^{x-1} + 2^{x^2-1} = \dfrac{y^2 + ay + a^2}{y^2 + a^2}$ să aibă soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Petru Răducanu, Iaşi

X.47. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte, cu $z_2 + z_3 = 2$ şi astfel încât $|z_1 - 1| = |z_2 - 1| = |z_3 - 1|$. Să se arate că $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)$ este număr complex pur imaginar.

Lidia Nicola, Craiova

X.48. Se consideră planele paralele α şi β aflate la distanţa h unul de celălalt şi $\triangle ABC$ echilateral inclus în planul β.

a) Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ pentru care $MA^2 + h^2 = MB^2 + MC^2$.

b) Să se determine $M \in \alpha$ astfel încât suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie minimă.

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

X.49. Să se arate că $\sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z - 3 \sin x \sin y \sin z \geq$
$$\geq \frac{3}{4} \left[\sin x \left(1 - \cos (y - z)\right) + \sin y \left(1 - \cos (z - x)\right) + \sin z \left(1 - \cos (x - y)\right)\right],$$
$\forall x, y, z \in [0, \pi/3]$.

Marian Tetiva, Bârlad

X.50. Fie $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{1, n}$; notăm cu $f(p)$ numărul tripletelor (A, B, C) de submulţimi (nu neapărat nevide) cu reuniunea $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, oricare două disjuncte şi astfel încât numărul $\sum\limits_{i \in M \setminus A} a_i + \sum\limits_{i \in M \setminus B} b_i + \sum\limits_{i \in M \setminus C} c_i - p$ să fie multiplu de 3 (convenim ca $\sum\limits_{i \in \emptyset} x_i = 0$). Arătaţi că dacă $f(0) = f(1) = f(2)$, atunci există i pentru care $a_i + b_i + c_i \,\vdots\, 3$.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Clasa a XI-a

XI.46. Determinaţi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pentru care $\det(A + B) = 2$ şi $\det(A + 3B) = 5$.

Cezar Lupu, elev, Constanţa

XI.47. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice cu $a_{ij} = \begin{cases} a, \text{ dacă } i = j \\ b, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$, unde $b \neq 0$ şi $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$. Arătaţi că A este inversabilă şi determinaţi A^{-1}.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.48. Se defineşte şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin $x_n = x_{n-1}^2 - [x_{n-1}]$, $\forall n \geq 1$; $x_0 \in$ $\in \left[0, \left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

XI.49. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ şiruri de numere reale astfel încât $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| + |x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1}| \leq a_n$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

XI.50. Fie $n \in 2\,\mathbb{N}$, iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f\left(\dfrac{nx+y}{n+1}\right) \geq$ $\geq f\left(\sqrt[n+1]{x^n y}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi crescătoare pe $[0, \infty)$. (În legătură cu *Problema 2819* din *Crux Mathematicorum*, nr. 2/2003.)

Titu Zvonaru, Bucureşti

Clasa a XII-a

XII.46. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian cu proprietatea că simetricul oricărui element $x \in [-1, 1]$ se află în $[-1, 1]$, unde $x * y = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

XII.47. Fie $G = (a, b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, iar "$\cdot$" înmulţirea numerelor reale. Să se determine a, b astfel încât $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right) \cong (G, \cdot)$ printr-un izomorfism de forma $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Alexandru Blaga şi Ovidiu Pop, Satu Mare

XII.48. Fie $(G, \cdot)$ grup de element neutru e şi $x, y \in G$ penrtru care avem:

a) $\exists k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ a. î. $x^k = e$; *b*) $\exists p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ a. i. $xy = y^p x$.

Să se arate că:

1) $xy^n x^{k-1} = y^{np}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; 2) $xy = yx \Leftrightarrow y^{n(p-1)} = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Haivas, Iaşi

XII.49. Se consideră numerele reale $b > a \geq 0$, $c \geq 1$ şi funcţiile continue $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{na}^{nb} g(x)\,dx = d \in \mathbb{R}$. Să se arate că şirul $(u_n)_{n\geq 1}$, $u_n = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{c + f(x) + g(nx)}\,dx$ este convergent şi să se afle limita sa.

D. M. Bătineţu - Giurgiu, Bucureşti

XII.50. Fie $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s(n!)}{\ln^k \ln n}$, unde $k \in \mathbb{N}$ este fixat.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G56. Fie $m \in \mathbb{Z}$, $n \in 2\,\mathbb{Z}+1$ fixate. Să se arate că ecuaţia $nx + y = m$, $x, y \in \mathbb{Z}$ are o unică soluţie (x_0, y_0) cu proprietatea că $|y_0| < |n|/2$.

Petru Asaftei, Iaşi

G57. Un şeic a lăsat moştenire celor doi fii ai săi cinci cămile, cu condiţia ca unul să primească jumătate, iar celălalt o treime. Moştenitorii nu şi-au putut împărţi averea, aşa că au apelat la un înţelept care trecea pe acolo, călare pe o cămilă. Cum a procedat înţeleptul?

Câte probleme asemănătoare mai putem formula (în care moştenirea este de n cămile, iar fiii primesc a p-a şi a q-a parte)?

Gabriel Popa, Iaşi

G58. Să se rezolve în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $2^x + 1 = 5^y$.

Irina Mustaţă, elevă, şi Valentina Blendea, Iaşi

G59. Fie $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid s\,(2000n) + s\,(2002n) = 2s\,(2001n)\}$, unde prin $s\,(x)$ am notat suma cifrelor lui x. Demonstraţi că orice număr natural nenul are un multiplu ce aparţine lui A.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

G60. Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$ are loc

$$\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} \le \frac{1}{4} + \frac{4abc}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}\ .$$

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

G61. Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$ are loc

$$\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)^3 \ge 54\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{abc} \ge 27\,\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\ .$$

Marian Tetiva, Bârlad

G62. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care se poate înscrie pătratul $MNPQ$ de centru O ($M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (AD)$). Să se arate că $AB + BC + CD + DA \ge \sqrt{2}\,(AO + BO + CO + DO)$. Când are loc egalitatea?

Lucian Tuţescu, Craiova şi Ioan Şerdean, Orăştie

G63. În $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 10°$ şi $m(\widehat{B}) = 100°$ construim $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel ca $m(\widehat{MCB}) = 40°$ şi $m(\widehat{NBC}) = 75°$. Să se afle $m(\widehat{AMN})$.

Octavian Bondoc, Piteşti

G64. Prin punctul P al laturii (AC) a $\triangle ABC$ se duc paralele la medianele AA' şi CC', care intersectează laturile (BC) şi (AB) în E, respectiv F. Fie $\{M\} = EF \cap AA'$, $\{N\} = EF \cap CC'$, iar L şi Q mijloacele segmentelor $[FP]$, respectiv $[PE]$. Să se arate că dreptele ML, NQ şi $A'C'$ sunt concurente.

Andrei Nedelcu, Iaşi

G65. Fie $SABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ dreptunghi, M proiecţia lui D pe SB şi N proiecţia lui C pe SA, iar $\{P\} = AM \cap NB$. Ştiind că $M \in (SB)$ şi $N \in (SA)$, să se arate că $NP \cdot SA \cdot MB = SM \cdot AN \cdot PB$.

Daniel Ştefan Ninu, elev, Iaşi

A. Nivel liceal

L56. Fie $ABCD$ patrulater convex şi $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = AD \cap BC$. Considerăm $J \in (AQ)$, $L \in (BQ)$, $K \in (DP)$, $N \in (AP)$ astfel încât $QJ = AD$, $QL = CB$, $PK = DC$ şi $PN = AB$. Să se arate că $JL \parallel NK$.

Carmen Nejneru, Iaşi

L57. Fie $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi punctele $D \in (CB$, $D' \in (BC$ astfel încât $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. Se mai consideră cercul $\mathcal{C}_1$ tangent la AD, BD şi la $\mathcal{C}$, cercul $\mathcal{C}_2$ tangent la AD', CD' şi la $\mathcal{C}$, iar $\{E\} = \mathcal{C}_1 \cap [BD]$, $\{F\} = \mathcal{C}_2 \cap [D'C]$. Să se arate că cercul circumscris $\triangle AEF$ şi cercul înscris în $\triangle ABC$ sunt concentrice.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L58. Pe muchiile $(Ox$, $(Oy$ şi $(Oz$ ale unui triedru oarecare se consideră punctele $A, L \in (Ox$, $B, M \in (Oy$ şi $C, N \in (Oz$ astfel încât $OA = OB = OC = a$ şi $OL = OM = ON = b$ $(a < b)$. Notăm $\alpha = m(\widehat{Oy, Oz})$, $\beta = m(\widehat{Oz, Ox})$, $\gamma = m(\widehat{Ox, Oy})$ şi $\{P\} = (AMN) \cap (BNL) \cap (CLM)$, $\{Q\} = (LBC) \cap (MCA) \cap (NAB)$. Să se calculeze distanţa PQ în funcţie de a, b, α, β, γ.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L59. Care este probabilitatea ca latura şi diagonalele unui romb, luate la întâmplare, să fie laturile unui triunghi?

Petru Minuţ, Iaşi

L60. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ şi $B_1B_2 \ldots B_n$ $(n > 2)$ două poligoane înscrise în acelaşi cerc de centru O şi având centrele de greutate tot în O. Să se arate că putem renumerota vârfurile poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$ pentru a obţine un nou poligon $A_{i_1}A_{i_2} \ldots A_{i_n}$ în care $A_{i_j} \neq B_j$ pentru $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

L61. Fie $n \geq 3$. Să se determine maximul expresiei $E = x_1^3x_2^2 + x_2^3x_3^2 + \cdots + x_n^3x_1^2 + (n-1)^{2(n-1)}x_1^3x_2^3 \cdots x_n^3$, când numerele nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au suma 1.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

L62. Rezolvaţi ecuaţia $2x^2 = y\,(y+1)$; $x, y \in \mathbb{N}$.

Mircea Bîrsan, Iaşi

L63. Fie $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un grup netrivial în raport cu produsul uzual al matricelor. Presupunem că există $X \in G$ astfel încât pe fiecare linie, respectiv coloană a sa să existe cel mult un element nenul şi acesta egal cu 1. Să se demonstreze că există $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ astfel încât G este izomorf cu un subgrup al lui $GL_k(\mathbb{R})$ (s-a notat $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$).

Ovidiu Munteanu, Braşov

L64. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+2} = \dfrac{[x_{n+1}, x_n]}{x_{n+1}}$, $n \geq 1$. Dacă $x_{2003} = 2004$, demonstraţi că şirul nu este convergent.

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

L65. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = x^{2n}\cos(1/x)$, $\forall x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = x^{2n}\sin(1/x)$, $\forall x > 0$, iar $g(x) = x^{2n+1}\sin(1/x)$, $\forall x < 0$, $g(0) = 0$ şi $g(x) = x^{2n+1}\cos(1/x)$, $\forall x > 0$. Să se afle cel mai înalt ordin de derivabiliate al acestor funcţii şi să se studieze problema continuităţii acestor derivate în origine.

Gheorghe Costovici, Iaşi

Pagina rezolvitorilor

BOTOŞANI

Colegiul Naţional "A. T. Laurian". **Clasa a IX-a**. NEGRESCU Alexandru: VII(39,40,42,44), VIII(36,40,42), IX(36,37,39), X(39,40), G(42,54).

BRAŞOV

Şcoala gen. nr. 5. **Clasa a VII-a**. POSTEUCĂ Bogdan: V.37, VI (37,38,40), VII.39; POSTEUCĂ Raluca: V.37, VI (37,38,40), VII.39.

CONSTANŢA

Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân". **Clasa a X-a**. LUPU Cezar: VIII.37, IX(38,39,40), X(38,40), XI(37,38).

CRAIOVA

Şcoala nr. 22 "M. Eliade". **Clasa a IV-a** (înv. VANŢU Angela). STANCIU Ioan: P(54-63).

HÂRLĂU (Iaşi)

Liceul "Ştefan cel Mare". **Clasa a VI-a**. CIOFU Alexandra: P(50,52), V.37, VI.39, VII.41; SAVA Cristina Amelia: P(52,61,63), V(41,44); SCRIPCARIU Gabriela: P.61, V(41,44), VI(37,42); SPIRIDON Florin: P(50,61), V(37,41), VII.41; SURUGIU Ionuţ: V(37-39), VI(38,39). **Clasa a VIII-a.** ANTOCI Bogdan: VI(39,40,44,45), VII.44; BURICAN Bogdan - Alexandru: VI(37,38,42,44,45), VII(41,44); ROTARU Lucian: VI(39,40,44,45), VII.44.

HUNEDOARA

Liceul "Iancu de Hunedoara". **Clasa a VII-a**. CRĂCIUN Maria: V(43,44), VI(42,44), VII.41.

IAŞI

Colegiul Naţional "C. Negruzzi". **Clasa a V-a**. OLARIU Tudor: P(51,52,61-63), V(43,45), VI.39; TIBA Marius: P(58,61-63), V(42,45), VI.42.

Colegiul Naţional. **Clasa a V-a**. ANDRONIC Adrian: V(36,38,39,41-45), VI.42; ANDRONIC Adrian Constantin: V(36,38,39,41-45), VI.42; BALAN Elena-Lavinia: V(36,38,39,41-44); BARBACARIU Ioana: V(36,38,39,41,42); BERCU Tudor: V(36, 38,39,41-44); CAPRARU Mădălina: V(36,38,41-44); CHELSĂU Andreas: V(36, 38,39,40-45); CHIDIU Alexandru: V(36,38,39,41-45); DOBROVICEANU Cătălina: V(36,38,39,41-43); GAFIŢANU Oana: V(36,39,41-43); GEORGESCU Anca: P(61, 62), V(36,38,41,42,44); MÂNZĂŢEANU Maria-Adelina: V(36,38,39,41-44); MIHAI Monica: V(36,38,39,41-44); MOŞNEGUŢU Cătălina Elena: V(36,38,39,41-44); PALAGHIA Irina: V(36,38,39,41-45); POPA Ana-Maria: V(36,38,39,41-43,45); POTUR George: V(36,38,39,41-44); SMARANDA Sava: V(36,38,40-44); TOMA Alexandra: V(36,38,39,41,42). **Clasa a IX-a**. CAZACU Roxana: VII.41, IX(37,38), G(40,47); CHIRUŢA Marta: VII.41, VIII.42, IX(38,39), G.40; HAMCIUC Adrian: VII(41,42), VIII.42, IX(36,39); PRODAN Diana: VII.41, IX(36,38), G(40,47); TIMOFTE Diana: VII.41, IX(36,38), G(40,47). **Clasa a X-a**. DUMITRESCU Roxana: VIII(37,42), IX(37,39), X(36-38,42), G(40,50); PACHIŢARIU Marius: G(46-50,52), L(46,47,49,50). **Clasa a XI-a**. MUSTAŢĂ Irina: X.42, XI(41,43), XII.45, G(46,47,52), L(46,47).

Liceul "M. Eminescu". **Clasa a V-a**. BOHOTIN Alexandru: P(48,49,51,53,61,62), V.37; COHAL Călin: P(48,58,60,63), V(38,39,42), VI.38. **Clasa a VI-a**. CIMPOI Mihaela: V(42-44), VI(37,42); CIURARU Ionela Alexandra: V(42-44), VI(37,42); IPATE Cristina Alexandra: V(42-44), VI(37,42).

Liceul "G. Ibrăileanu". **Clasa a VII-a**. UNGUREANU Dragoş: V(39,42,45), VI(39,42).

Şcoala nr. 7 "N. Tonitza". **Clasa a II-a** (înv. TUDOSE Elena). CÂRNU Alina: P(54-57,60); DOBRIN Diana - Maria: P(54-57,60); LEONTE Anca: P(54-57,60); POSTICĂ Simona - Alexandra: P(54-57,60); ROTARIU Larisa: P(54-57,60); SAVIN Răzvan: P(54-57,60). **Clasa a II-a** (înv. MELINTE Rodica). BACIU Ciprian: P(54-57,60); BÂRZU Constantin: P(54-57,60); BOTOŞANU Bianca - Mihaela: P(54-57,60); BUZDUGAN Petru - Cătălin: P(54-57,60); CEUCĂ Dănuţ - Vasilică: P(54-57,60); CONSTANTINESCU Diana - Gabriela: P(54-57,60); CUCUTEANU Paul - Cătălin: P(54-57,60); GUŞOVATE Diana - Ştefana: P(54-57,60); LEOGAN Larisa - Diana: P(54-57,60); MIRON Vlad - Ştefan: P(54-57,60); MOTAN Geanina - Diana: P(54-57,60); ROTARIU Marian: P(54-57,60); SUCIUC Raluca: P(54-57,60); TEIU - COSTIN Andrada - Mihaela: P(54-57,60). **Clasa a IV-a** (înv. MARCU Monica). BUTNARU Valentin: P(52,58-62); ONUŢĂ Alin: P(52,58-62).

Şcoala nr. 13 "Alexandru cel Bun". **Clasa a III-a** (înv. SPÂNU Doiniţa). BURLACU Ionuţ: P(54-57,61); DAMIAN Daniel: P(54-57,61); FURTUNĂ Marta: P(54-57,61); IFTENIE Ioana - Cătălina: P(54-57,61); RUSU Alexandru: P(54-57,61); URSU Gina - Ioana: P(54-57,61).

Şcoala nr. 22 "B. P. Hasdeu". **Clasa a II-a** (înv. TÂRZIORU Iuliana). ADĂSCĂLIŢEI Victor: P(54-57,60); APOSTOL Ana - Maria: P(54-57,60,61); BALAN Andrei: P(54-57,60); BURUIANĂ Cătălina: P(54-57,60,61); CUBERSCHI Paula: P(54-57,60,61); EŞANU Geogiana: P(54-57,60); GREIEROSU Claudia: P(54-57,60,61); GÂNDU Alexandra - Livia: P(54-57,60,61); LĂMĂTIC Ioana: P(47,54-57,60); REBEGEA Andrada: P(54,56,57,60,61); UNGUREANU Teofana: P(54-57,60,61). **Clasa a II-a**. (înv. TUTU Laura). ANDRONICIUC Ana - Miruna: P(54-57,60,61); BUHU Vlad: P(54-57,60); BURUIANĂ Sebastian: P(54-57,60,61); BUZĂ Eduard - Andrei: P(54-57,60); CEOBANU Andrei - Nicolae: P(54-57,60); CHICHIRĂU Alexandra - Elena: P(54-57,60,61); COSTĂCHESCU Ioana: P(54-57,60); DOROHOI Ovidiu: P(54-57,60,61); GELIP Ioana: P(54-57,60); GHERAN Ana - Maria: P(54-57,60); GRIGORE Georgiana: P(54-57,60); GURĂU Raluca - Claudia: P(54-57,60); HATESCU Iustina: P(54-57,60); HORBOVANU Bianca - Alexandra: P(54-57,60); NĂSTASE Andrei Ionuţ: P(54-57,60,61). **Clasa a II-a** (înv. DOHOTARU Liliana). TURCU Andrei - Daniel: P(54-57,60,61).

Şcoala nr. 23 "T. Maiorescu". **Clasa a IV-a** (înv. CHIRILĂ Beatrice). TUDORACHE Alexandru - Gabriel: P(54-63).

Şcoala nr. 26 "G. Coşbuc". **Clasa a III-a** (înv. RACU Maria). BARABULĂ Ioana - Mioara: P(54-57,61); BULGARU Ionela - Alexandra: P(54-57,61); BURLACU Claudiu: P(54-57,61); CALOIAN Andrei: P(54-57,61); CĂLIN Georgiana - Andreea: P(54-57,61); CRĂCIUN Mădălina: P(54-57,61); IFROSĂ Adriana: P(54-57,61); IOJĂ Petru - Alexandru: P(54-56,59,61); LEAGĂN Crina - Alexandra: P(54-57,61); MOISA Bogdan: P(54-57,61); PINTILIE Răzvan - Florin: P(54-57,61); RUSU Flavia: P(54-57,61). **Clasa a III-a** (înv. GALIA Paraschiva). ALUPEI Andra - Mădălina: P(54-57,61); CIOABĂ Oana - Cătălina: P(54-57,61); GHERCĂ Marius - Cătălin: P(54-57,61); HOMEA Liviu: P(54-57,61); HUIDEŞ Gina: P(54-57,61); MANOLIU Mădălina: P(54-57,61); MIHĂILESCU Laura: P(54-57,61); PISICĂ Alexandru: P(54-57,61); POPA Florin: P(54-57,61); SCUTARIU Constantin: P(54-57,61).

Premii acordate rezolvitorilor

Pentru apariţia de trei ori la rubrica *"Pagina rezolvitorilor"* redacţia revistei *"Recreaţii matematice"* acordă câte o **diplomă** şi un **premiu** în cărţi următorilor elevi:

BARABULĂ Ioana (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

BURLACU Ionuţ (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2003 (6pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

BUTNARU Valentin (Şc. nr. 7 "N. Tonitza", cl. a IV-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (6pb), 1/2004 (6pb);

CALOIAN Andrei (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

CĂLIN Georgiana (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

CIOABĂ Oana - Cătălina (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

CRĂCIUN Mădălina (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

DAMIAN Daniel (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2003 (6pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

FURTUNĂ Marta (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

IFTENIE Ioana - Cătălina (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2003 (6pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

LEAGĂN Crina - Alexandra (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

MIHĂILESCU Laura - Ioana (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

MOISĂ Bogdan (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

NEGRESCU Alexandru (C. N. "A. T. Laurian", Botoşani, cl. IX-a): 1/2003 (15pb), 2/2003 (17pb), 1/2004 (14pb);

ONUŢĂ Alin (Şc. nr. 7 "N. Tonitza", cl. a IV-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (6pb), 1/2004 (6pb).

PINTILIE Răzvan - Florin (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

POSTEUCĂ Bogdan (Şc. nr. 5, Braşov, cl. a VII-a): 1/2002 (5pb), 1/2003 (6pb), 1/2004 (5pb).

POSTEUCĂ Raluca (Şc. nr. 5, Braşov, cl. a VII-a): 1/2002 (5pb), 1/2003 (6pb), 1/2004 (5pb).

RUSU Alexandru (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2003 (8pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

RUSU Flavia (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

SCUTARU Constantin (Şc. nr. 26 "G. Coşbuc", cl. a III-a): 1/2003 (5pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb);

URSU Gina - Ioana (Şc. nr. 13 "Alexandru cel Bun", cl. a III-a): 1/2003 (7pb), 2/2003 (5pb), 1/2004 (5pb).

LISTA MEMBRILOR FILIALEI IAŞI a S. S. M.

continuare din nr. 1/2000, 1/2001, 1/2002 şi 1/2003

110. MIHĂILĂ Marcela	Şcoala "D.D.Pătrăşcanu", Tomeşti (Iaşi)
111. BOBOC Romela	Şcoala "D.D.Pătrăşcanu", Tomeşti (Iaşi)
112. TEMNEANU Mitică	Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi
113. MIRON Mirel	Liceul "C. Negruzzi", Iaşi
114. ROTUNDU Raluca	Şcoala gen. Gropniţa, jud. Iaşi
115. APETREI Laura	
116. NAVROTESCU Mariana	Gr. şc. "Al. I. Cuza", Iaşi
117. CHIORESCU Daniela Marinela	Gr. şc. "D. Mangeron", Iaşi
118. AVĂDANI Adela	Şcoala gen. nr.37, Iaşi
119. STRACHINĂ Monica	Şcoala gen. nr.37, Iaşi
120. BÂRGHIŞAN Mariana	Gr. şc. "Tehnoton", Iaşi
121. SPIRIDON Ana - Mărioara	Şc. nr. 3 "Iordache Cantacuzino", Paşcani
122. TUDORACHE Nelu	Liceul "V. Alecsandri", Iaşi
123. DASCĂLU Cristina	Liceul "M. Eminescu", Iaşi
124. CORDUNEANU Adrian	Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi
125. ROŞU Mărioara	Liceul de artă, Iaşi

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **popagabriel@go.com** . Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**